LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Mathématiques

EXERCICES PSI

Énoncés

Solutions

Commentaires

D. GUININ

Tout le nouveau programme

Bréal
L'ÉDITEUR DES PRÉPAS

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Mathématiques

EXERCICES
PSI

D. GUININ

1, rue de Rome - 93561 Rosny-sous-Bois cedex

Bréal
L'ÉDITEUR DES PRÉPAS

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Titres disponibles dans la filière PSI

Mathématiques 2e année

- Analyse PSI
- Algèbre et géométrie PSI

Physique 2e année

- Optique MP-PC-PSI-PT
- Électromagnétisme PC-PSI
- Physique des ondes PC-PSI
- Thermodynamique PC-PSI
- Mécanique des fluides PC-PSI
- Électrotechnique PSI
- Électronique PSI

Chimie 2e année

- Chimie PSI

Exercices 2e année

- Mathématiques PSI
- Physique PSI

Maquette et couverture : Sophie Martinet.
Réalisation : 16 iS.

ISBN 2 7495 0511 9

Avant-propos

Dans la perspective de passer le cap de l'écrit et de faire une bonne prestation orale, cet ouvrage vous propose 169 sujets d'oraux et 25 problèmes.

Il a pour ambition de vous aider à «rentrer» dans un sujet, de le «lire», sans se limiter à une solution idéale ou académique.

- ## Sujets d'oraux

  Ils sont tous tirés d'annales récentes de concours.

  Le plus délicat est souvent la phase de démarrage : *par quel bout le prendre ?* C'est pourquoi les solutions proposées sont accompagnées et entrecoupées de commentaires dont le but est de :

  > Réfléchir à haute voix, comme c'est indispensable lors de toute épreuve orale, qu'il s'agisse des colles en cours d'année ou, à plus forte raison, d'un oral «pour de vrai».

  Les énoncés de «planches» sont relativement brefs et il est de l'initiative du candidat d'en tirer le maximum. L'objet des commentaires est aussi de donner des idées dans ce sens.

  Certaines solutions peuvent être éclairées par une figure qui n'est pas nécessairement proposée. Confronté à cette situation, vous devez avoir le réflexe de faire «votre» figure. Et votre virtuosité dans l'utilisation d'une calculatrice fera le reste !

  Souvent, plusieurs pistes s'offrent à vous et plusieurs solutions sont satisfaisantes. C'est pourquoi certains sujets proposent plusieurs démarches.

  La connaissance du cours est supposée acquise et les exercices de «rodage basique» sont travaillés en classe. C'est le minimum vital pour utiliser cet ouvrage avec profit.

- ## Thèmes d'étude et problèmes

  Les 25 thèmes d'étude et problèmes recouvrent tout le programme de PSI.

  Contrairement aux sujets d'oraux, ils sont découpés en questions et alinéas à travers lesquels la logique du sujet est transparente. Pour cette raison, il n'est proposé qu'une seule solution, sans beaucoup de commentaires.

Ce double aspect vous permet de disposer d'un outil de travail personnel, complet et adapté à la dure réalité des concours.

Ce livre d'exercices, qui complète les *Précis d'analyse* et *Précis d'algèbre et géométrie, PSI*, Éditions Bréal, constitue pour vous une bonne base de révision des notions indispensables aux concours.

Les auteurs

Sommaire

Sommaire

CHAPITRE 1

Arithmétique
Algèbre générale

Sujets d'oraux

(A) Dénombrement

Ex. 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le nombre de surjections d'un ensemble à $n+1$ éléments sur un ensemble à n éléments.

Soit A de cardinal $n+1$: $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$, B de cardinal n : $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, et S l'ensemble des surjections de A sur B.

Pour $f \in S$, il existe $i \in [\![1, n]\!]$, $(j, k) \in [\![1, n+1]\!]^2$, $j \neq k$, uniques tels que $f(a_j) = f(a_k) = b_i$ et alors $f_{|A \setminus \{a_j, a_k\}}$ est une bijection de $A \setminus \{a_j, a_k\}$ sur $B \setminus \{b_i\}$.

L'application Φ définie sur S par :

$$\Phi : f \mapsto b_i, \{a_j, a_k\}, f_{|A \setminus \{a_j, a_k\}}$$

est injective, donc :

$$\mathrm{Card}\, S = \mathrm{Card}\, \Phi(S) = n \times C_{n+1}^2 \times (n-1)!.$$

En conclusion, $\mathrm{Card}\, S = \dfrac{n(n+1)!}{2}$.

(B) Nombres complexes – Identités algébriques

Ex. 2

Résoudre l'équation $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. $\qquad (E)$

Soit $\mathbb{U} = \{Z \in \mathbb{C} \ / \ |Z| = 1\}$, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, posons $X = e^{ix}$, $Y = e^{iy}$, $Z = e^{iz}$, l'équation proposée se lit :

$$X + Y + Z = 0, \quad (X, Y, Z) \in \mathbb{U}^3 \qquad (E')$$

> Il est bien connu que $1 + j + j^2 = 0$ avec $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ donc $(1, j, j^2)$ est solution de (E'). Nous allons vérifier, qu'à une rotation près $\left((X, Y, Z) \mapsto (Xe^{i\alpha}, Ye^{i\alpha}, Ze^{i\alpha})\right)$, et une permutation près sur (X, Y, Z), c'est là l'unique solution de (E').

Remarquons d'abord que (E) est équivalente à :

$$1 + e^{i(y-x)} + e^{i(z-x)} = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

en posant $u = y - x$, $v = z - x$, on est donc ramené à étudier l'équation :

$$1 + e^{iu} + e^{iv} = 0, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2 \qquad (E_1)$$

qui s'écrit aussi : $1 + \cos u + \cos v = 0$, $\sin u + \sin v = 0$, $\quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$.

$\sin v = -\sin u$ donne $v = -u \bmod 2\pi$ ou $v = \pi + u \bmod 2\pi$.

Pour $v \equiv \pi + u \mod 2\pi$, on a $\cos v + \cos u = 0$, ce cas est donc à rejeter et (E_1) équivaut ainsi à :

$$v \equiv -u \mod 2\pi \quad , \quad \cos u = -\frac{1}{2}.$$

Finalement les solutions des (E_1) sont les couples :

$$\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2\ell\pi\right) \quad \text{et} \quad \left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2\ell\pi\right), \quad (k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$$

et pour (E) on obtient les triplets :

$$\left(\alpha, \alpha + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \alpha - \frac{2\pi}{3} + 2\ell\pi\right) \text{ et } \left(\alpha, \alpha - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \alpha + \frac{2\pi}{3} + 2\ell\pi\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}, (k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$$

Ex. 3

Soit $N = 101010 \ldots 101$ écrit en base 10.

L'entier N est-il premier ?

Le nombre N s'écrit avec p fois le chiffre 1 et $p-1$ fois le chiffre 0 et on a :

$$N = 1 + 10^2 + \ldots + 10^{2(p-1)} = \frac{10^{2p} - 1}{10^2 - 1}.$$

> Une exploration numérique avec un logiciel de calcul formel montre que si 101 est premier, il n'en est pas de même pour $10101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37$ ou pour $1010101 = 73 \times 101 \times 137$. En fait, nous allons prouver que N est non premier dès que $p \geqslant 3$. Ceci nécessite de faire apparaître une factorisation après la simplification par $10^2 - 1$ et, pour ce faire, nous allons procéder différemment selon que p est pair ou impair.

- Premier cas : p est pair, $p = 2n$ avec $n \geqslant 2$

Alors :

$$N = \frac{10^{4n} - 1}{10^2 - 1} = \frac{10^{2n} - 1}{10^2 - 1} \times \left(10^{2n} + 1\right) = \left(1 + 10^2 + \ldots + 10^{2(n-1)}\right)\left(10^{2n} + 1\right).$$

Puisque $n \geqslant 2$, on a $1 + 10^2 + \ldots + 10^{2(n-1)} > 1$, donc N n'est pas premier.

- Deuxième cas : p est impair, $p = 2n+1$ avec $n \geqslant 1$

Alors :

$$N = \frac{10^{4n+2} - 1}{10^2 - 1} = \frac{10^{2n+1} - 1}{10 - 1} \times \frac{10^{2n+1} + 1}{10 + 1}$$

donc, en utilisant $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a^{2n-k} b^k$, il vient :

$$\begin{aligned} N &= \left(1 + 10 + \ldots + 10^{2n}\right)\left(1 - 10 + 10^2 + \ldots + (-1)^k 10^k + \ldots + 10^{2n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{2n} 10^k \times \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k 10^k \end{aligned}$$

ce qui prouve que N n'est pas premier.

Ex. 4

Quels sont les entiers naturels n tels que $n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1$ soit le carré d'un entier ?

Posons $A(n) = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1$.

Il est clair que $n = 0$ convient : $A(0) = 1^2$.

On se propose de démontrer que c'est la seule solution.

Supposons maintenant $n \geqslant 1$ donc $A(n) \geqslant 7$. S'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A(n) = p^2$, on a $p^2 \geqslant 7$ donc $p \geqslant 3$ et d'autre part :

$$n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1 = n^2(n+1)^2 + 2n^2 + 1 \quad \text{avec} \quad n \geqslant 1$$

donne $\quad p^2 < n^2(n+1)^2 + 2n(n+1) + 1$

c'est-à-dire $\quad p^2 < \left(n(n+1) + 1\right)^2$

soit aussi $\quad p < n^2 + n + 1$

ou encore $\quad n^2 + n + 1 - p \geqslant 1$.

Écrivons alors
$$\begin{aligned} A(n) &= n^2(n+1)^2 + 2n(n+1) + 1 - 2n \\ &= \left(n^2 + n + 1\right)^2 - 2n. \end{aligned}$$

L'égalité $A(n) = p^2$ donne :

$$\begin{aligned} 2n &= \left(n^2 + n + 1\right)^2 - p^2 \\ &= \left(n^2 + n + 1 - p\right)\left(n^2 + n + 1 + p\right) \end{aligned}$$

et, avec $n^2 + n + 1 - p \geqslant 1$, il vient $2n \geqslant n^2 + n + 1 + p$, c'est-à-dire :

$$n^2 - n + 1 + p \leqslant 0$$

ce qui est évidemment absurde.

Ex. 5

Soit $a_n = 2^n + 1$. On suppose que a_n est premier, que peut-on dire de n ?

> Une exploration numérique montre que pour $n \leqslant 20$, a_n est premier lorsque $n = 1, 2, 4, 8, 16$ c'est-à-dire lorsque n est de la forme $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^k$. On peut donc supposer qu'une condition nécessaire pour que a_n soit premier est que n soit de la forme 2^p.

Supposons que $n \neq \{2^k / k \in \mathbb{N}\}$. Alors en considérant la décomposition de n en facteurs premiers, il existe j impair, $j \geqslant 3$, et $k \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^k j$ donc aussi $n = 2^k(2t+1)$, $t \geqslant 1$. On en déduit $a_n = b^{2t+1} + 1$ où on a posé $b = 2^{2^k}$. L'identité :

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} = (x+y)\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k x^{2n-k} y^k$$

donne maintenant :

$$a_n = (b+1)\sum_{k=0}^{2t}(-1)^k b^{2t-k}$$

ce qui prouve que a_n est non premier.

En prenant la contraposée de cette implication, on en déduit que si a_n est premier, alors n est de la forme 2^k, $k \in \mathbb{N}$.

On note que cette condition n'est pas suffisante puisque $2^{2^5} + 1 = 641 \times 6\,700\,417$ (factorisation fournie par Maple).

> *Remarque.* Les nombres de la forme $2^{2^n} + 1$ sont appelés les nombres de Fermat. Les cinq premiers : 3 ($n = 1$), 5 ($n = 2$), 17 $\left(n = 2^2\right)$, 257 $\left(n = 2^3\right)$ et 65 537 $\left(n = 2^4\right)$ sont premiers mais au-delà, c'est-à-dire pour $n \geqslant 5$, on n'a, à ce jour, découvert aucun nombre premier.

Ex. 6

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 2^{2n+1} divise la partie entière de $\left(\sqrt{13}+3\right)^{2n+1}$.

> Il faut penser à introduire $\left(\sqrt{13}-3\right)^{2n+1}$ en remarquant que $0 < \sqrt{13}-3 < 1$.

D'après la formule du binôme, il existe a_n et b_n entiers naturels tels que :

$$\left(\sqrt{13}+3\right)^{2n+1} = a_n\sqrt{13}+b_n$$

$$\left(\sqrt{13}-3\right)^{2n+1} = a_n\sqrt{13}-b_n$$

en effet, on a :

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{13}+3\right)^{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+1} \mathrm{C}_{2n+1}^{k}\, 13^{\frac{k}{2}} \cdot 3^{2n+1-k}\\ &= \sqrt{13}\sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{2j+1}\, 13^{j} \cdot 3^{2(n-j)} + \sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{2j}\, 13^{j} \cdot 3^{2(n-j)+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{13}-3\right)^{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+1} \mathrm{C}_{2n+1}^{k}\, 13^{\frac{k}{2}} \cdot (-3)^{2n+1-k}\\ &= \sqrt{13}\sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{2j+1}\, 13^{j} \cdot 3^{2(n-j)} - \sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{2j}\, 13^{j} \cdot 3^{2(n-j)+1}\end{aligned}$$

d'où :

$$a_n = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{2j+1}\, 13^{j} \cdot 3^{2(n-j)} \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{2j}\, 13^{j} \cdot 3^{2(n-j)+1}.$$

On en déduit :

$$\left(\sqrt{13}+3\right)^{2n+1} - \left(\sqrt{13}-3\right)^{2n+1} = 2b_n$$

et, compte tenu de $3 < \sqrt{13} < 4$, donc $0 < \sqrt{13}-3 < 1$, il vient :

$$E\left(\left(\sqrt{13}+3\right)^{2n+1}\right) = 2b_n.$$

Nous sommes donc ramenés à prouver que 2^{2n} divise b_n.

> Il suffit maintenant de prouver que les suites $\left(a_n\right)_{\mathbb{N}}$ et $\left(b_n\right)_{\mathbb{N}}$ vérifient une relation de récurrence simple pour mettre en place une démonstration par récurrence.

Avec

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{13}+3\right)^{2n+3} &= a_{n+1}\sqrt{13}+b_{n+1}\\ &= \left(\sqrt{13}+3\right)^{2n+1}\left(\sqrt{13}+3\right)^{2}\\ &= \left(a_n\sqrt{13}+b_n\right)\left(22+6\sqrt{13}\right)\\ &= \left(22a_n+6b_n\right)\sqrt{13}+78a_n+22b_n\end{aligned}$$

puisque le couple $\left(1, \sqrt{13}\right)$ est libre dans $\mathbb{R}$ considéré comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, il vient :

$$a_{n+1} = 22a_n+6b_n \quad , \quad b_{n+1} = 78a_n+22b_n.$$

En écrivant $\left(\sqrt{13}+1\right)^{1} = 1 \cdot \sqrt{13}+3$, on a $a_0 = 1$ et $b_0 = 3$, donc 2^0 divise a_0 et b_0 et les quotients (encore égaux à a_0 et b_0) sont de même parité.

Soit maintenant la propriété $\mathcal{P}(n)$: 2^{2n} divise a_n et b_n et les quotients a'_n et b'_n $\left(a_n = 2^n a'_n,\right.$ $\left.b_n = 2^n b'_n\right)$ sont de même parité.

En supposant $\mathcal{P}(n)$ vraie, on a donc :

$$a_{n+1} = 2^{2n+1}(11a'_n + 3b'_n) \quad , \quad b_{n+1} = 2^{2n+1}(39a'_n + 11b'_n).$$

Les entiers a'_n et b'_n étant de même parité, $11a'_n + 3b'_n$ et $39a'_n + 11b'_n$ sont pairs, c'est-à-dire qu'il existe a'_{n+1} et b'_{n+1} entiers tels que $11a'_n + 3b'_n = 2a'_{n+1}$ et $39a'_n + 11b'_n = 2b'_{n+1}$ d'où aussi :

$$a_{n+1} = 2^{2(n+1)}a'_{n+1} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 2^{2(n+1)}b'_{n+1}.$$

Formons enfin $2(b'_{n+1} - a'_{n+1}) = 28a'_n + 8b'_n = 4(7a'_n + 2b'_n)$, on en déduit :

$$b'_{n+1} - a'_{n+1} = 2(7a'_n + 2b'_n),$$

ce qui montre que a'_{n+1} et b'_{n+1} sont de même parité.

On a ainsi prouvé que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire et, puisque $\mathcal{P}(0)$ est vraie, le principe de récurrence montre que $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$, ce qui achève la démonstration.

C Polynômes et fractions rationnelles

Ex. 7

On cherche les polynômes réels P, non nuls, tels que $P(X^2) = P(X-1)P(X)$ (E).

1) Montrer que toute racine, non nulle, d'un tel polynôme est de module 1.

2) Déterminer tous les polynômes P solutions du problème.

1) Penser au fait qu'un polynôme non nul n'admet qu'un nombre fini de racines.

On suppose que $P \neq 0$ est solution de (E).

Alors $P(z) = 0$ (avec $z \in \mathbb{C}$) donne $P(z^2) = 0$. Donc, si z est racine de P, tout complexe z^{2^k}, $k \in \mathbb{N}$, l'est également.

Pour $|z| > 1$, la suite $\left(|z|^{2^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante donc les complexes z^{2^k} sont deux à deux distincts ce qui donne une impossibilité puisque P aurait alors une infinité de racines.

De même, le cas $0 < |z| < 1$ est à rejeter en remarquant que la suite $\left(|z|^{2^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est alors strictement décroissante.

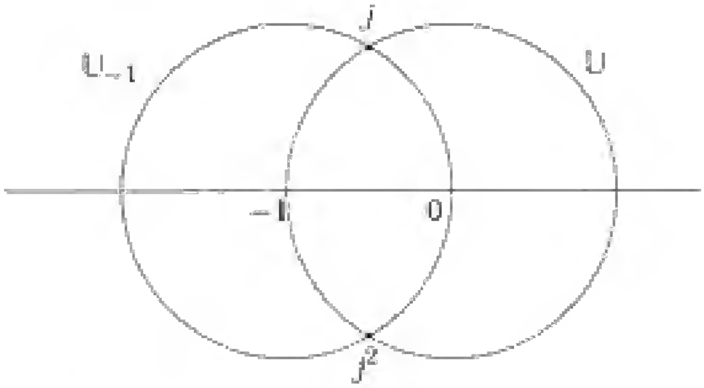
En conclusion, si z est racine de P, on a $z = 0$ ou $z \in \mathbb{U}$ (ensemble des complexes de module 1 ou cercle de centre 0 et de rayon 1).

2) Le 1) nous incite à préciser l'ensemble des racines de P et jusqu'ici nous avons seulement utilisé que si P est solution du problème alors $P(X)$ divise $P(X^2)$. Il est sans doute indispensable d'exploiter maintenant le fait que $P(X-1)$ est également un diviseur de $P(X^2)$.

Si $P \neq 0$ est solution de (E), on a aussi $\forall z \in \mathbb{C}$, $P((z+1)^2) = P(z)P(z+1)$ donc, compte tenu du 1), si $P(z) = 0$ on a $z + 1 = 0$ ou $|z+1|^2 = 1$, c'est-à-dire $z = -1$ ou $|z+1| = 1$, soit encore $z \in \{-1\} \cup \mathbb{U}_{-1}$ où on a posé $\mathbb{U}_{-1} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z+1| = 1\}$: cercle de centre -1 et de rayon 1.

Puisque $P(z) = 0$ donne aussi $z \in \{0\} \cup \mathbb{U}$, on obtient finalement que l'ensemble des racines complexes de P est inclus dans :

$$(\{0\} \cup \mathbb{U}) \cap (\{-1\} \cup \mathbb{U}_{-1}) = \{0, -1, j, j^2\}.$$



En remarquant de plus que P étant réel, j et j^2 ont le même ordre de multiplicité, il en résulte que P est nécessairement de la forme :

$$P(X) = \lambda X^p (X+1)^q (X-j)^m \left(X - j^2\right)^m \quad \text{avec } p + q + 2m = \deg P$$

Éliminons tout de suite le problème de cette constante λ.

En égalant les coefficients dominants dans (E), il vient alors $\lambda = \lambda^2$ donc $\lambda = 1$ (car $\lambda = 0$ donnerait $P = 0$) et :

$$P(X) = X^p (X+1)^q \left(X^2 + X + 1\right)^m.$$

Pour un tel polynôme, on a $P\left(X^2\right) = X^{2p}\left(X^2+1\right)^q \left(X^4 + X^2 + 1\right)^m$ et :

$$P(X-1)P(X) = X^{p+q}(X+1)^q (X-1)^p \left(X^4 + X^2 + 1\right)^m$$

donc P vérifie (E) si et seulement si $p = q = 0$.

Finalement, les solutions du problème sont les polynômes $\left(X^2 + X + 1\right)^m$, $m \in \mathbb{N}$.

Ex. 8

Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P\left(X^2\right) = \left(X^2 + 1\right)P(X). \qquad (E)$$

Commençons par nous intéresser au degré des solutions éventuelles.

L'équation (E) est évidemment linéaire.

Si P est une solution non nulle, en posant $n = \deg P$, on obtient $2n = 2 + n$ donc $n = 2$ et :

$$P(X) = aX^2 + bX + c \quad \text{avec } a \neq 0.$$

Avec $P(X) = aX^2 + bX + c$, il vient $\left(X^2 + 1\right)P(X) = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c$, donc P est solution de (E) si et seulement si :

$$aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c$$

c'est-à-dire $b = 0$ et $c = -a$.

L'ensemble $S(E)$ des solutions de (E) est donc la droite vectorielle dirigée par $X^2 - 1$:

$$S(E) = \left\{ a\left(X^2 - 1\right) / a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ex. 9

1) Montrer que l'ensemble $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqslant \frac{5}{4}\right\}$ est une réunion finie d'intervalles disjoints.

2) Calculer la somme de leurs longueurs.

1) C'est sans difficulté ; on étudie les variations de la fonction rationnelle :

$$f\ :\ x \mapsto \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k}.$$

La fonction $f\ :\ x \mapsto \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k}$ est définie, continue et dérivable sur :

$$\mathcal{D} = \left]-\infty, 1\right[\cup \left]1, 2\right[\cup \dots \cup \left]69, 70\right[\cup \left]70, +\infty\right[.$$

Pour tout $x \in \mathcal{D}$:

$$f'(x) = -\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{(x-k)^2}$$

donc f induit un homéomorphisme décroissant de chaque intervalle I_k, $0 \leqslant k \leqslant 70$, constituant $\mathcal{D}$, sur $f(I_k)$. (On a posé $I_0 = \left]-\infty, 1\right[$, $I_k = \left]k, k+1\right[$, pour $1 \leqslant k \leqslant 69$, et $I_{70} = \left]70, +\infty\right[$.)

Les variations de f sont résumées par le tableau ci-après :

x	$-\infty$	1	2	$\dots$	69	70	$+\infty$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow -\infty$ ||	$\dots$	|| $+\infty \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 0$

On en déduit que, sur chaque I_k, $1 \leqslant k \leqslant 70$, il existe un unique réel a_k tel que $f(a_k) = \frac{5}{4}$ et que l'ensemble A cherché est :

$$\bigcup_{k=1}^{70} \left]k, a_k\right].$$

Il s'agit donc bien d'une réunion finie d'intervalles disjoints.

2) La somme des longueurs est :

$$S = \sum_{k=1}^{70} (a_k - k) = \left(\sum_{k=1}^{70} a_k\right) - \frac{70 \times 71}{2}.$$

Les a_k, $1 \leqslant k \leqslant 70$, sont aussi les racines du polynôme :

$$P = \frac{5}{4} \prod_{j=1}^{70} (X - j) - \sum_{j=1}^{70} j \prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{70} (X - i).$$

En posant $P = \sum_{j=0}^{70} p_j X^{70-j}$ on a $\sum_{k=1}^{70} a_k = -\frac{p_1}{p_0}$ ce qui nous ramène au calcul de p_0 et p_1.

On a évidemment $p_0 = \frac{5}{4}$ et $p_1 = -\frac{5}{4}\sum_{j=1}^{70} j - \sum_{j=1}^{70} j = -\frac{9}{4}\sum_{j=1}^{70} j$ donc :

$$\sum_{k=1}^{70} a_k = \frac{4}{5} \times \frac{9}{4} \times \frac{70 \times 71}{2}$$

et finalement :

$$S = \left(\frac{9}{5} - 1\right) \times \frac{70 \times 71}{2} = \frac{2}{5} \times 70 \times 71 = 2 \times 14 \times 71 = 1988.$$

Ex. 10

Montrer que $a = \cos\frac{\pi}{9}$ est racine d'un polynôme de degré 3 à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

En déduire que a est irrationnel.

La formule donnant $\cos 3x$ sous la forme d'un polynôme en $\cos x$ doit être connue.

On sait que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ donc, pour $x = \frac{\pi}{9}$, on obtient :

$$4a^3 - 3a = \frac{1}{2} \quad \text{soit aussi} \quad 8a^3 - 6a - 1 = 0.$$

Supposons que a soit rationnel. Il existerait $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que :

$$a = \frac{p}{q} \quad \text{avec} \quad p \wedge q = 1$$

et, dans ces conditions, on aurait : $8p^3 - 6pq^2 - q^3 = 0$.

En l'écrivant $p(8p^2 - 6q^2) = q^3$, cette relation montre que p divise q^3 donc, puisque $p \wedge q = 1$, il vient $p = 1$ et $8 - 6q^2 - q^3 = 0$.

En écrivant $q^2(6 + q) = 8$, on voit que q^2 divise 8, et donc $q = 1$ ou $q = 2$.

Pour $q = 1$, on a $q^2(6 + q) = 7$ et pour $q = 2$, $q^2(6 + q) = 32$. Aucune de ces possibilités ne convient, ce qui prouve que a n'est pas rationnel.

Ex. 11

Soit P et Q deux polynômes scindés dans $\mathbb{R}[X]$.

On pose $Q = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$, montrer que $R = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k P^{(k)}$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Notons tout d'abord que la notation simplificative :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$$

se justifie par le fait que la famille $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des coefficients de Q est de support fini, elle représente donc bien une somme finie.

Pour y voir plus clair, commençons par étudier l'opération $*$ définie sur $\mathbb{R}[X]^2$ par :

$$A * B = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k B^{(k)} \text{ pour tout } (A, B) \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } A = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k.$$

On vérifie que l'application $(A, B) \mapsto A * B$ est bilinéaire, puis que $(X - \lambda) * P = P' - \lambda P$ et $[(X - \lambda)A] * P = (A * P)' - \lambda(A * P)$. Ces deux dernières propriétés laissent entrevoir la possibilité d'une démonstration par récurrence.

- Avec $A = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$, $B = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k X^k$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda A + B = \sum_{k\in\mathbb{N}} (\lambda a_k + b_k) X^k$ donc :

$$(\lambda A + B) * P = \sum_{k\in\mathbb{N}} (\lambda a_k + b_k) P^{(k)} = \lambda \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k P^{(k)} + \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k P^{(k)} = \lambda A * P + B * P.$$

On a ainsi vérifié la linéarité de $A \mapsto A * P$. Celle de $P \mapsto A * P$ provient de la linéarité des opérateurs de dérivation : $P \mapsto P^{(k)}$.

Par définition de l'opérateur $*$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$(X - \lambda) * P = P' - \lambda P \quad \text{et} \quad \lambda * P = \lambda P.$$

Avec $A = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$ on obtient $XA = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^{k+1}$ donc $(XA) * P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k P^{(k+1)} = (A * P)'$, et la linéarité de $A \mapsto A * P$ donne :

$$\left[(X - \lambda)A\right] * P = (XA) * P - \lambda A * P = (A * P)' - \lambda(A * P) = (X - \lambda) * (A * P).$$

- Montrons que la propriété est vraie lorsque Q est de degré 1 : $Q = X - \lambda$.

> Nous nous limitons à des polynômes P et Q unitaires, ce qui n'est évidemment pas restrictif en raison de la bilinéarité de l'opération $*$.

En notant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ les racines distinctes de P et $m_1, \ldots, m_p$ leurs ordres de mutiplicité respectifs, on a :

$$P = \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{m_k}.$$

$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_p$ est le degré de P et on peut supposer que les α_i ont été indexés dans l'ordre croissant : $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
(X - \lambda) * P = P' - \lambda P &= \sum_{j=1}^{p} m_j (X - \alpha_j)^{m_j - 1} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{p} (X - \alpha_k)^{m_k} - \lambda \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{m_k} \\
&= \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{m_k - 1} \left(\sum_{j=1}^{p} m_j \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{p} (X - \alpha_k) - \lambda \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k) \right) \\
&= R \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{m_k - 1}
\end{aligned}$$

$$\text{où on a posé} \quad R = \sum_{j=1}^{p} m_j \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{p} (X - \alpha_k) - \lambda \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k) = \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k) \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{X - \alpha_j} - \lambda \right)$$

R est un polynôme de degré $p - 1$ si $\lambda = 0$, de degré p si $\lambda \neq 0$.

Coonsidérons alors la fonction $F : x \mapsto \sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{x - \alpha_j} - \lambda$ définie sur :

$$\mathcal{D} = \left]-\infty, \alpha_1\right[\cup \left]\alpha_1, \alpha_2\right[\cup \cdots \cup \left]\alpha_{p-1}, \alpha_p\right[\cup \left]\alpha_p, +\infty\right[= \bigcup_{i=0}^{p} \left]\alpha_i, \alpha_{i+1}\right[$$

(avec $\alpha_0 = -\infty$, $\alpha_{p+1} = +\infty$).

Chaque m_i est un entier $\geqslant 1$ donc $F'(x) < 0$ et F est strictement décroissante sur chaque intervalle $\left]\alpha_i, \alpha_{i+1}\right[$.

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on a $F(x) \underset{x \to \alpha_i}{\sim} \dfrac{m_i}{x - \alpha_i}$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha_i \\ x < \alpha_i}} F(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha_i \\ x > \alpha_i}} F(x) = +\infty$.

Il en résulte que $F(x)$ s'annule une fois et une seule sur chacun des intervalles $\left]\alpha_i, \alpha_{i+1}\right[$, $i \in [\![1, p-1]\!]$, soit β_i ce point d'annulation.

> La restriction $F_{|]\alpha_i, \alpha_{i+1}[}$ réalise une bijection décroissante de $\left]\alpha_i, \alpha_{i+1}\right[$ sur $F\left(\left]\alpha_i, \alpha_{i+1}\right[\right)$ avec $F\left(\left]\alpha_i, \alpha_{i+1}\right[\right) = \mathbb{R}$ lorsque $1 \leqslant i \leqslant p-1$.

Lorsque $\lambda = 0$ on a ainsi mis en évidence l'existence de $p-1$ racines distinctes : $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-1}$ pour le polynôme R de degré $p-1$.

Donc R est scindé dans $\mathbb{R}$ et $(X - \lambda) * P = R \prod\limits_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{m_k - 1}$ l'est également.

Lorsque $\lambda \neq 0$, puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = -\lambda$, F possède un $p^{\text{ième}}$ point d'annulation $\beta_0 \in \left]-\infty, \alpha_1\right[$ si $\lambda < 0$ ou $\beta_p \in \left]\alpha_p, +\infty\right[$ si $\lambda > 0$ et, comme R est alors de degré p, il en résulte que ce polynôme est scindé dans $\mathbb{R}$ donc que $(X - \lambda) * P$ l'est aussi.

Dans tous les cas, les variations de F sont résumées par le tableau suivant :

x	$-\infty$	α_1	α_2	$\cdots$	α_{p-1}	α_p	$+\infty$
$F(x)$	λ ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ $-\infty$	$\cdots$	$+\infty$ ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ λ

La propriété est ainsi démontrée pour les polynômes Q de degré 1.

- Supposons maintenant qu'elle le soit pour $\deg Q = n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$).

Tout polynôme scindé, unitaire, de degré n s'écrit $Q = (X - \lambda_1)Q_1$ avec Q_1 scindé, unitaire, de degré $n - 1$.

Le calcul préliminaire nous donne alors :

$$Q * P = \left[(X - \lambda_1)Q_1\right] * P = (Q_1 * P)' - \lambda_1(Q_1 * P) = (X - \lambda_1) * \left[Q_1 * P\right]$$

et puisque le polynôme $P_1 = Q_1 * P$ est scindé dans $\mathbb{R}$ d'après l'hypothèse de récurrence, le fait que la propriété soit vraie lorsque $\deg Q = 1$ montre que $(X - \lambda_1) * (Q_1 * P)$ est scindé dans $\mathbb{R}$.

- On a ainsi prouvé que la propriété est héréditaire par rapport à $n = \deg Q \in \mathbb{N}^*$. Donc, puisqu'elle est vraie pour $n = 1$, elle l'est pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Thèmes d'étude – Problèmes

1 Formules de Cardan

Étant donné $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on considère le polynôme $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$, et l'équation (E) : $P(x) = 0$.

1) a) Trouver en fonction de a, b et c un réel λ tel que le coefficient du terme de degré deux du polynôme $Q(X) = P(X + \lambda)$ soit nul.

b) On note alors $Q(X) = X^3 + pX + q$. Exprimer p et q en fonction de a, b et c.

2) Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur p et q pour que le polynôme Q possède dans $\mathbb{C}$ une racine au moins double. Résoudre, dans ce cas, l'équation (E') : $Q(x) = 0$.

3) On suppose que la condition trouvée au 2) n'est pas vérifiée et on veut résoudre l'équation (E').

a) Montrer que tout complexe x peut se mettre sous la forme $x = u + v$ où u et v sont des complexes vérifiant la condition $3uv + p = 0$.

b) Montrer que si x est solution de (E'), u^3 et v^3 sont les racines z_1 et z_2 d'une équation du second degré que l'on formera.

c) En déduire les solutions de (E') en distinguanr les cas $4p^3 + 27q^2 > 0$ et $4p^3 + 27q^2 < 0$.

d) Dans quel cas les racines sont-elles toutes réelles ? Comparer avec l'étude des variations de Q.

4) Application : résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$.

Solution

1) a) et **b)** On trouve facilement $\lambda = -\dfrac{a}{3}$, $p = b - \dfrac{a^2}{3}$, $q = c - \dfrac{ab}{3} + \dfrac{2a^3}{27}$ donc :

$$Q = X^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)X + c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}.$$

2) Q admet une racine double si et seulement si Q et Q' ont une racine commune.
Avec $Q' = 3X^2 + p$, si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $Q(z) = 0$ et $Q'(z) = 0$, on a nécessairement :

$$z^2 = -\frac{p}{3} \quad \text{donc aussi} \quad z\left(p - \frac{p}{3}\right) + q = 0$$

ce qui donne $z = -\dfrac{3q}{2p}$. En écrivant que ce complexe est racine de Q', on obtient alors :

$$4p^3 + 27q^2 = 0.$$

Réciproquement, en supposant $4p^3 + 27q^2 = 0$, le calcul précédent montre que le complexe $z = -\dfrac{3q}{2p}$ est racine de Q'. On a donc aussi $z^2 = -\dfrac{p}{3}$ d'où :

$$z^3 + pz + q = z(z^2 + p) + q = -\frac{3q}{2p}\left(p - \frac{p}{3}\right) + q = 0.$$

Ainsi z est racine commune de Q et Q' et la condition nécessaire et suffisante demandée est :

$$4p^3 + 27q^2 = 0.$$

La somme des racines de Q étant nulle et $-\dfrac{3q}{2p}$ étant racine double, la racine manquante est alors $\dfrac{3q}{p}$.

3) a) u et v sont les racines complexes de $U^2 - xU - \dfrac{p}{3} = 0$.

b) Avec $x = u + v$ et $3uv + p = 0$, on obtient :

$$Q(x) = u^3 + 3uv(u+v) + v^3 + p(u+v) + q = u^3 + v^3 + q.$$

Donc si $Q(x) = 0$, il vient :

$$u^3 + v^3 = -q \text{ et } u^3v^3 = -\frac{p^3}{27},$$

ce qui montre que u^3 et v^3 sont les racines de l'équation :

$$(C)\ :\ z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0.$$

c) Réciproquement, si u^3 et v^3 sont les racines de l'équation (C), on a :

$$u^3 + v^3 = -q \quad \text{et} \quad u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

donc si on impose de plus $uv \in \mathbb{R}$, il vient $3uv + p = 0$ (car p est réel par hypothèse) et, avec le même calcul que ci-dessus, on obtient $Q(u+v) = 0$, c'est-à-dire que $x = u + v$ est racine de Q.

Le discriminant de (C) est $\Delta = q^2 + \dfrac{4p^3}{27}$, on envisage donc deux cas.

- $4p^3 + 27q^2 > 0$

L'équation (C) admet alors deux racines réelles distinctes :

$$z_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Pour tout réel x nous notons $\sqrt[3]{x}$ l'unique réel y tel que $y^3 = x$.

Posons $\alpha = \sqrt[3]{z_1}$ et $\beta = \sqrt[3]{z_2}$, les conditions $u^3 = z_1$ et $v^3 = z_2$ sont équivalentes à $u \in \{\alpha, j\alpha, j^2\alpha\}$ et $v \in \{\beta, j\beta, j^2\beta\}$. Les couples (u, v), tels que $x = u + v$ soit racine de Q, étant donnés par la condition $uv \in \mathbb{R}$, et α, β étant réels, on en déduit que les racines de Q sont $\alpha+\beta$, $j\alpha+j^2\beta$, $j^2\alpha+j\beta$, c'est-à-dire :

$$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}}$$

$$j\sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}} - j^2\sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}}$$

$$j^2\sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}} - j\sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}}$$

- $4p^3 + 27q^2 < 0$

L'équation (C) admet alors deux racines imaginaires conjuguées distinctes :

$$z_1 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}.$$

Posons $\rho = |z_1| = |z_2|$. Puisque $\operatorname{Im} z_1 > 0$, il existe $\theta \in]0, \pi[$ tel que $z_1 = \rho e^{i\theta}$ et $z_2 = \rho e^{-i\theta}$.

Avec $\alpha = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{\theta}{3}}$ et $\beta = \sqrt[3]{\rho}e^{-i\frac{\theta}{3}}$, les conditions $u^3 = z_1$ et $v^3 = z_2$ sont équivalentes à :

$$u \in \{\alpha, j\alpha, j^2\alpha\} \quad \text{et} \quad v \in \{\beta, j\beta, j^2\beta\}.$$

Les couples (u, v), tels que $x = u + v$ soit racine de Q, étant donnés par la condition $uv \in \mathbb{R}$, et α, β étant imaginaires conjugués, on en déduit que les racines de Q sont $\alpha + \beta$, $j\alpha + j^2\beta$, $j^2\alpha + j\beta$, c'est-à-dire :

$$\sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{\theta}{3}} + \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{\theta}{3}} = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta}{3}$$

$$\sqrt[3]{\rho}e^{i\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)} + \sqrt[3]{\rho}e^{-i\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt[3]{\rho}e^{i\left(\frac{\theta}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)} + \sqrt[3]{\rho}e^{-i\left(\frac{\theta}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)} = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\frac{\theta}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$$

d) D'après le c) les racines de (E') sont toutes réelles si et seulement si $4p^3 + 27q^2 < 0$.

On retrouve ce résultat avec les variations de la fonction réelle Q. En effet, avec $Q'(x) = 3x^2 + p$, on obtient :

- si $p \leqslant 0$, Q est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule donc une fois et une seule (avec la condition $4p^3 + 27q^2 \neq 0$, c'est une racine simple) ;
- si $p < 0$, les variations de Q se résument par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$+\infty$
$Q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$Q(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

avec $M = Q\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$ et $m = Q\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$.

- On en déduit que Q a trois racines réelles distinctes si et seulement si $p < 0$ et $mM < 0$.

Avec $Q(x)Q(-x) = \left(q - x(x^2 + p)\right)\left(q + x(x^2 + p)\right) = q^2 - x^2(x^2 + p)^2$, on obtient :

$$mM = q^2 + \frac{p}{3}\left(p - \frac{p}{3}\right)^2 = q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

et il en résulte que la condition précédente équivaut à $4p^3 + 27q^2 < 0$.

On a ainsi retrouvé le résultat déduit du c).

4) Avec les notations des questions précédentes on obtient :

$\lambda = 1$ et $Q(X) = P(X + 1) = X^3 - 6X - 6$ donc $p = q = -6$ et $4p^3 + 27q^2 = 3 \cdot 36$.

L'équation (C) s'écrit $Z^2 - 6z + 8 = 0$, ses racines sont 2 et 4. Donc, d'après le 3)c), les solutions de (E') sont :

$$2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}},\ j\,2^{\frac{1}{3}} + j^2\,2^{\frac{2}{3}},\ j^2\,2^{\frac{1}{3}} + j\,2^{\frac{2}{3}},$$

soit aussi :

$$2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}},\ -2^{-\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{2}{3}} + i\sqrt{3}\left(2^{-\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right),\ -2^{-\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{2}{3}} - i\sqrt{3}\left(2^{-\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right),$$

et celles de (E) sont :

$$1 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}},\ 1 - 2^{-\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{2}{3}} + i\sqrt{3}\left(2^{-\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right),\ 1 - 2^{-\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{2}{3}} - i\sqrt{3}\left(2^{-\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right).$$

2 Une équation polynomiale

On considère le polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$P(X) = X^3 + aX^2 - \overline{a}X - 1$$

où a est un complexe donné et $\overline{a}$ son conjugué.

1) a) On pose $a = \alpha + i\beta$, $(i^2 = -1)$. Discuter, suivant la position dans le plan complexe du point A d'affixe a, le nombre de racines réelles du polynôme P et donner leurs valeurs.

b) Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est racine de P alors $\frac{1}{\overline{z}}$ l'est aussi.

c) En déduire les valeurs de a pour lesquelles P admet une racine au moins double.

d) Montrer que P admet toujours au moins une racine de module 1.

e) Montrer que, si $a \neq 0$, le module de toute racine est strictement inférieur à $1 + |a|$.

2) Dans cette question, on pose $a = \dfrac{1 + i\sqrt{7}}{2}$.

a) Calculer a^2, a^3, a^4, $\overline{a}$, $\overline{a}^2$, $\overline{a}^3$, $\overline{a}^4$, ($\overline{a}^2$ signifie le carré de $\overline{a}$) et les exprimer sous la forme $p + qa$, $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$.

b) Diviser $P(X^2)$ par $P(X)$ (division euclidienne).

En déduire que si λ complexe est racine de P, $\mu = \lambda^2$ et $\nu = \lambda^4$ le sont aussi.

En déduire enfin les valeurs de λ, μ, ν.

c) Montrer que la suite des restes des divisions euclidiennes, par $P(X)$, des polynômes X^{2^n}, $n \in \mathbb{N}$, est périodique.

3) Chercher tous les polynômes Q du troisième degré, à coefficients réels ou complexes tels que $Q(X^2)$ soit divisible par $Q(X)$.

Solution

1) a) Dans ce genre de situation, il est bon de commencer par rechercher des conditions nécessaires.

b) Si z est racine réelle de P, on a $z^3 + az^2 - \overline{a}z - 1 = 0$ et $z^3 + \overline{a}z^2 - az - 1 = 0$ donc, en retranchant membre à membre, $(a - \overline{a})(z^2 + z) = 0$. On envisage donc deux cas : $a \in \mathbb{R}$ et $a \notin \mathbb{R}$.

- Pour $a \in \mathbb{R}$, on obtient $P(X) = (X - 1)\big(X^2 + (1 + a)X + 1\big)$.

Le discriminant du trinôme $X^2 + (1 + a)X + 1$ est $\Delta = (1 + a)^2 - 4 = (a + 3)(a - 1)$ donc,

– si $-3 < a < 1$, P a une seule racine réelle égale à 1 ;

– si $a < -3$ ou $a > 1$, P a trois racines réelles ;

– si $a = -3$ ou $a = 1$, P a deux racines réelles dont une double.

- Pour $a \notin \mathbb{R}$, si z est racine réelle de P, on a $z^2 + z = 0$ donc $z = 0$ ou $z = -1$.

Il est clair que 0 n'est jamais racine de P et -1 est racine si et seulement si $a + \overline{a} = 2$ c'est-à-dire $\alpha = 1$.

c) On note $\overline{P}(X) = X^3 + \overline{a}X^2 - aX - 1$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $P\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right) = -\dfrac{1}{\overline{z}^3}\overline{P}(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.

0 n'étant pas racine de P, il en résulte que $z \in \mathbb{C}$ est racine si et seulement si $\dfrac{1}{\overline{z}}$ est également racine.

d) On remarque que $z = \dfrac{1}{\overline{z}}$ équivaut à $|z| = 1$.

> D'après la question précédente, la connaissance d'une racine z donne celle d'une autre racine sauf dans le cas où $|z| = 1$. Il faut cependant prendre garde au fait que l'on ne sait rien de ce qui concerne les ordres respectifs de ces deux racines.

Supposons que z, de module différent de 1, soit racine double de P. Posons $\rho = |z|$ et $z = \rho\, e^{i\theta}$. Alors $\dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{1}{\rho}e^{i\theta}$ est également racine avec $z \neq \dfrac{1}{\overline{z}}$ et, en écrivant que le produit des racines de P est égal à 1, il vient $\rho\, e^{3i\theta} = 1$ donc $\rho = 1$, ce qui est contradictoire.

En conséquence, si z est racine double de P, on a nécessairement $|z| = 1$ donc $z = e^{i\theta}$ et, toujours avec le produit des racines, on voit qu'une seconde racine est $e^{-2i\theta}$. En considérant la somme des racines, il vient alors $a = -2e^{i\theta} - e^{-2i\theta}$.

Réciproquement, s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = -2e^{i\theta} - e^{-2i\theta}$, on vérifie facilement que :

$$P = \left(X - e^{i\theta}\right)^2\left(X - e^{-2i\theta}\right).$$

Finalement, P admet une racine au moins double si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$a = -2e^{i\theta} - e^{-2i\theta}.$$

e) Si $z_1 \in \mathbb{C}$ de module $\neq 1$ est racine de P, alors $z_2 = \dfrac{1}{\overline{z_1}}$ est également racine et P s'écrit :

$$P = (X - z_1)\left(X - \frac{1}{\overline{z_1}}\right)(X - z_3).$$

D'après le c), z_1 et z_2 sont racines simples donc $z_3 \notin \{z_1, z_2\}$.

Puisque $|z_3| \neq 1$ donne $\dfrac{1}{\overline{z_3}} \neq z_3$ et que $z_3 \notin \{z_1, z_2\}$ donne $\dfrac{1}{\overline{z_3}} \notin \{z_1, z_2\}$, on a nécessairement $|z_3| = 1$ sinon le polynôme P de degré 3 aurait quatre racines distinctes : z_1, z_2, z_3 et $\dfrac{1}{\overline{z_3}}$.

f) C'est le moment de penser à utiliser la somme des racines de P

On suppose $a \neq 0$. Si P admet une racine $\rho\, e^{i\theta}$ de module $\rho \neq 1$, alors les racines sont $\rho\, e^{i\theta}$, $\dfrac{1}{\rho}\, e^{i\theta}$ et $e^{-2i\theta}$. (Voir le c).)

En écrivant que la somme des racines de P est égale à $-a$, il vient donc :

$$\rho\, e^{i\theta} + \frac{1}{\rho}\, e^{i\theta} = -e^{-2i\theta} - a \quad \text{puis} \quad \rho + \frac{1}{\rho} \leqslant 1 + |a| \quad \text{et enfin} \quad \rho < \rho + \frac{1}{\rho} \leqslant 1 + |a|.$$

2) Dans cette question, $a = \dfrac{1 + i\sqrt{7}}{2}$.

a)

$$a^2 = \frac{-3 + i\sqrt{7}}{2} \quad = a - 2$$

$$a^3 = \frac{-5 - i\sqrt{7}}{2} \quad = -a - 2$$

$$a^4 = a^2 - 4a + 4 \quad = -3a + 2$$

$$\overline{a} = \frac{1 - i\sqrt{7}}{2} \quad = 1 - a$$

$$\overline{a}^2 = \overline{a} - 2 \quad = -1 - a$$

$$\overline{a}^3 = -\overline{a} - 2 \quad = a - 3$$

$$\overline{a}^4 = -3\overline{a} + 2 \quad = 3a - 1$$

b) D'après a), on obtient :

$$P(X) = X^3 + aX^2 + (a-1)X - 1 \ , \ P\left(X^2\right) = X^6 + aX^4 + (a-1)X^2 - 1$$

et la division donne :

$$P\left(X^2\right) = P(X)\left(X^3 - aX^2 + (a-1)X + 1\right).$$

On en déduit que $P(\lambda) = 0$ implique $P\left(\lambda^2\right) = 0$ et $P\left(\lambda^4\right) = 0$.

Or, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\lambda = \lambda^2 \iff \lambda \in \{0, 1\},\ \lambda^2 = \lambda^4 \iff \lambda \in \{0, 1, -1\},\ \text{et}\ \lambda = \lambda^4 \iff \lambda \in \left\{0, 1, j, j^2\right\}.$$

Donc, en remarquant que pour la valeur proposée de a aucun des cinq nombres $0, 1, -1, j, j^2$ n'est racine de P, si λ est une racine quelconque de P alors $\lambda, \lambda^2, \lambda^4$ en sont les trois racines distinctes.

En écrivant que le produit des racines est égal à 1, il vient maintenant $\lambda^7 = 1$ donc :

$$\lambda \in \left\{e^{\frac{2ik\pi}{7}} \ / \ 1 \leqslant k \leqslant 6\right\}.$$

On remarque que, pour $k \in \{1, 2, 4\}$, le triplet $\left\{\lambda, \lambda^2, \lambda^4\right\}$ est toujours :

$$\left\{e^{\frac{2i\pi}{7}}, e^{\frac{4i\pi}{7}}, e^{\frac{8i\pi}{7}}\right\}$$

et que, pour $k = 3$, $k = 5$, $k = 6$, on obtient toujours le triplet :

$$\left\{e^{\frac{6i\pi}{7}}, e^{\frac{12i\pi}{7}}, e^{\frac{10i\pi}{7}}\right\}.$$

Il ne nous reste ainsi que deux possibilités.

Dans le premier cas, on a :

$$\operatorname{Im}\left(e^{\frac{2i\pi}{7}} + e^{\frac{4i\pi}{7}} + e^{\frac{8i\pi}{7}}\right) = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} > 0$$

(par croissance de sin sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$). Or la somme des racines est égale à $-a$ de partie imaginaire négative. Donc le triplet de solutions est le second c'est-à-dire :

$$\left\{e^{\frac{6i\pi}{7}}, e^{\frac{12i\pi}{7}}, e^{\frac{10i\pi}{7}}\right\} \text{ soit encore } \left\{e^{\frac{6i\pi}{7}}, -e^{\frac{5i\pi}{7}}, -e^{\frac{3i\pi}{7}}\right\}.$$

c) Deux polynômes de degré $\leqslant 2$ sont égaux si et seulement si ils prennent les mêmes valeurs pour trois complexes distincts.

Notons R_k le reste de la division de X^{2^k} par P, et fixons $\lambda = -e^{\frac{3i\pi}{7}}$.

On remarque alors que la suite $\left(\lambda^{2^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est périodique de période 3.

L'identité de la division euclidienne de X^{2^k} par P s'écrit :

$$X^{2^k} = P(X)Q_k(X) + R_k(X) \text{ avec } \deg R_k \leqslant 2.$$

Donc, sachant que λ, λ^2, λ^4 sont racines distinctes de P, on en déduit que R_k est l'unique polynôme de degré $\leqslant 2$ tel que :

$$R_k(\lambda) = \lambda^{2^k},\ R_k(\lambda^2) = \lambda^{2^{k+1}},\ R_k(\lambda^4) = \lambda^{2^{k+2}}.$$

Puisque $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lambda^{2^k} = \lambda^{2^{k+3}}$ il en résulte alors $R_{k+3} = R_k$ ce qui traduit que la suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est également périodique de période 3.

Pour achever la question, il suffit donc de calculer R_0, R_1 et R_2.

Il est immédiat que $R_0 = X$ et $R_1 = X^2$. Pour R_2, on effectue la division :

$$X^4 = (X-a)P(X) + \left(\overline{a} + a^2\right)X^2 + \left(1 - |a|^2\right)X - a \text{ d'où } R_2 = -X^2 - X - a.$$

3) Nous nous restreignons à la recherche de polynômes unitaires c'est-à-dire de coefficient dominant égal à 1.

Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$, notons $Z(Q)$ l'ensemble des zéros de Q et envisageons deux cas selon que $Z(Q)$ est ou n'est pas inclus dans $\{0, 1, -1, j, j^2\}$.

- Si $Z(Q) \not\subset \{0, 1, -1, j, j^2\}$, il existe λ racine de Q telle que $\lambda \notin \{0, 1, -1, j, j^2\}$ et, dans cette situation, $\lambda, \lambda^2, \lambda^4$ sont trois racines distinctes de Q donc, puisque $\deg Q = 3$, on a :

$$Z(Q) = \{\lambda, \lambda^2, \lambda^4\} \text{ et } Q(X) = (X-\lambda)\left(X-\lambda^2\right)\left(X-\lambda^4\right).$$

Réciproquement, étant donné $\lambda \notin \{0, 1, -1, j, j^2\}$, le polynôme $Q(X) = (X-\lambda)\left(X-\lambda^2\right)\left(X-\lambda^4\right)$ divise $Q\left(X^2\right)$ si et seulement si les racines de $Q(X)$ sont racines de $Q\left(X^2\right)$ donc si et seulement si $Q\left(\lambda^8\right) = 0$ c'est-à-dire $\lambda^8 - \lambda = 0$ ou $\lambda^8 - \lambda^2 = 0$ ou $\lambda^8 - \lambda^4 = 0$.

– Compte tenu de $\lambda \notin \{0, 1\}$, $\lambda^8 - \lambda = 0$ donne $\lambda \in \left\{e^{\frac{2ik\pi}{7}} \,/\, 1 \leqslant k \leqslant 6\right\}$ et le calcul du 2)b) montre que les solutions correspondantes sont :

$$X^3 + aX^2 - \overline{a}X - 1 \text{ et son conjugué } X^3 + \overline{a}X^2 - aX - 1 \text{ avec } a = \frac{1+i\sqrt{7}}{2}.$$

– Compte tenu de $\lambda \notin \{0, 1, -1, j, j^2\}$, $\lambda^8 - \lambda^2 = 0$ donne $\lambda = -j$ ou $\lambda = -j^2$ d'où les solutions :

$$X^3 - j^2X^2 - j^2X + j \text{ et son conjugué } X^3 - jX^2 - jX + j^2.$$

– Compte tenu de $\lambda \notin \{0, 1, -1\}$, $\lambda^8 - \lambda^4 = 0$ donne $\lambda = i$ ou $\lambda = -i$ d'où les solutions :

$$X^3 - iX^2 - X + i \text{ et son conjugué } X^3 + iX^2 - X - i.$$

- Si $Z(Q) \subset \{0, 1, -1, j, j^2\}$, remarquons d'abord que si -1 est racine de Q alors $1 = (-1)^2$ l'est également et Q est divisible par $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$. De même, si j (resp. j^2) est racine de Q alors j^2 (resp. $j = j^4$) l'est également et Q est divisible par $X^2 + X + 1 = (X-j)\left(X-j^2\right)$.

– Premier cas : j ou j^2 est racine de Q alors -1 ne l'est pas, sinon on aurait $\deg Q \geqslant 4$, et les possibilités sont :

$$X(X-j)\left(X-j^2\right),\ (X-1)(X-j)\left(X-j^2\right),\ (X-j)^2\left(X-j^2\right),\ (X-j)\left(X-j^2\right)^2.$$

Avec ces expressions, il est facile de vérifier que $Q(X)$ divise $Q\left(X^2\right)$ dans les deux premiers cas seulement. D'où les deux solutions :

$$X^3+X^2+X \text{ et } X^3-1.$$

– Deuxième cas : -1 est racine de Q, alors ni j ni j^2 ne le sont et les possibilités sont :

$$X\left(X^2-1\right),\ (X-1)\left(X^2-1\right).$$

Les deux conviennent, d'où les solutions :

$$X^3-X \text{ et } X^3-X^2-X+1.$$

– Troisième cas : aucun des trois nombres -1, j, j^2 n'est racine de Q. Les possibilités sont alors :

$$X^3,\ X^2(X-1),\ X(X-1)^2,\ (X-1)^3.$$

Les quatre conviennent, d'où les solutions :

$$X^3,\ X^3-X^2,\ X^3-2X^2+X \text{ et } X^3-3X^2+3X-1.$$

▪ En conclusion, nous avons trouvé 14 polynômes unitaires Q de degré 3 tels que $Q(X)$ divise $Q\left(X^2\right)$. En voici la liste :

$$Q_1(X)=X^3+\frac{1+i\sqrt{7}}{2}X^2-\frac{1-i\sqrt{7}}{2}X-1,$$
$$Q_1\left(X^2\right)=Q_1(X)\left(X^3-\frac{1+i\sqrt{7}}{2}X^2-\frac{1-i\sqrt{7}}{2}X+1\right);$$

$$Q_2(X)=X^3+\frac{1-i\sqrt{7}}{2}X^2-\frac{1+i\sqrt{7}}{2}X-1,$$
$$Q_2\left(X^2\right)=Q_2(X)\left(X^3-\frac{1-i\sqrt{7}}{2}X^2-\frac{1+i\sqrt{7}}{2}X+1\right);$$

$$Q_3(X)=X^3+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}X^2+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}X+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},$$
$$Q_3\left(X^2\right)=Q_3(X)\left(X^3-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}X^2+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}X+1\right);$$

$$Q_4(X)=X^3-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}X^2-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}X-\frac{1+i\sqrt{3}}{2},$$
$$Q_4\left(X^2\right)=Q_4(X)\left(X^3+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}X^2-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}X+1\right);$$

$Q_5(X)=X^3-iX^2-X+i,\qquad Q_5\left(X^2\right)=Q_5(X)\left(X^3+iX^2-iX+1\right);$

$Q_6(X)=X^3+iX^2-X-i,\qquad Q_6\left(X^2\right)=Q_6(X)\left(X^3-iX^2+iX+1\right);$

$Q_7(X)=X^3+X^2+X,\qquad Q_7\left(X^2\right)=Q_7(X)\left(X^3-X^2+X\right);$

$Q_8(X)=X^3-1,\qquad Q_8\left(X^2\right)=Q_8(X)\left(X^3+1\right);$

$Q_9(X)=X^3-X,\qquad Q_9\left(X^2\right)=Q_9(X)\left(X^3+X\right);$

$Q_{10}(X)=X^3-X^2-X+1,\qquad Q_{10}\left(X^2\right)=Q_{10}(X)\left(X^3+X^2+X+1\right);$

$Q_{11}(X)=X^3,\qquad Q_{11}\left(X^2\right)=Q_{11}(X)X^3;$

$Q_{12}(X)=X^3-X^2,\qquad Q_{12}\left(X^2\right)=Q_{12}(X)\left(X^3+X^2\right);$

$Q_{13}(X)=X^3-2X^2+X,\qquad Q_{13}\left(X^2\right)=Q_{13}(X)\left(X^3+2X^2+X\right);$

$Q_{14}(X)=X^3-3X^2+3X-1,\qquad Q_{14}\left(X^2\right)=Q_{14}(X)\left(X^3+3X^2+3X+1\right).$

3 Inégalités dans $\mathbb{C}$

Notations

- n entier supérieur ou égal à 2 : $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\mathbb{U}$ ensemble des nombres complexes de module 1 : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \setminus |z| = 1\}$
- $\mathbb{U}_0$ ensemble des éléments de $\mathbb{U}$ dont une détermination θ de l'argument vérifie :

$$|\theta| < \frac{\pi}{n} \qquad \mathbb{U}_0 = \{e^{i\theta} \setminus \theta \in \mathbb{R}, |\theta| < \frac{\pi}{n}\}$$

- $\mathbb{U}_1$ le complémentaire de $\mathbb{U}_0$ dans $\mathbb{U}$: $\mathbb{U}_1 = \mathbb{U} \setminus \mathbb{U}_0$
- $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes complexes non nuls de degré strictement inférieur à n.

Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose : $\| P \| = \sup\{|P(z)| \setminus z \in \mathbb{U}\}$

Partie I

1) Pour $a \in \mathbb{R}_+$ et $z \in \mathbb{U}$, établir l'inégalité : $\quad |z - a| \geqslant \dfrac{1 + a}{2} |z - 1|$. (1)

Déterminer les couples $(a, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{U}$ réalisant l'égalité.

2) Pour $z \in \mathbb{U}_0$ et $\alpha \in \mathbb{U}_1$, établir les inégalités :

$$|z - \alpha| \cdot |z - \overline{\alpha}| \leqslant |1 - \alpha|^2 \tag{2}$$

$$|z - \alpha| + |z - \overline{\alpha}| \leqslant 2\,|1 - \alpha| \tag{3}$$

Préciser dans chaque cas les valeurs de $z \in \mathbb{U}_0$ réalisant l'égalité.

3) Pour $z \in \mathbb{U}_1$, établir l'inégalité : $\quad |z - 1| \geqslant \dfrac{2}{n}$. (4)

4) Pour $z \in \mathbb{U}_0 \setminus \{1\}$, on pose $\quad R(z) = \left|\dfrac{z^n - 1}{z^2 - 1}\right| \quad$ et $\quad R(1) = \dfrac{n}{2}$.

a) Pour $n = 2p$, $(p \in \mathbb{N}^*)$, établir l'inégalité : $\quad R(z) \leqslant \dfrac{n}{2}$. (5)

b) Pour $n = 3$, établir l'inégalité (5).

c) Pour $n = 2p + 1$, $(p \in \mathbb{N}^*)$, établir par récurrence l'inégalité (5).

Partie II

On désigne par $(\alpha_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ les racines du polynôme $\quad X^n + 1 \in \mathbb{C}[X]$.

1) Pour $P \in \mathcal{P}$, montrer que : $\quad \dfrac{P(x)}{X^n + 1} = -\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \dfrac{\alpha_j \, P(\alpha_j)}{X - \alpha_j}$ (6)

2) a) Pour $n = 2p$, $(p \in \mathbb{N}^*)$, montrer que :

$$\frac{X^n - 1}{(X^2 - 1)(X^n + 1)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(X - \alpha_j)(X - \overline{\alpha}_j)} \tag{7}$$

b) Pour $n = 2p+1$, ($p \in \mathbb{N}^*$), décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle :

$$\frac{X^n - 1}{(X^2 - 1)(X^n + 1)}$$

(on adoptera $\alpha_n = -1$). En déduire l'égalité (7).

3) a) Donner un sens à l'expression $\quad S(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{|z^n + 1|}{|1 - \alpha_j| \cdot |z - \alpha_j|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Calculer $S(\alpha_j)$ pour $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

b) Calculer $S(1)$. Montrer que $\quad S(\alpha_j) \leqslant S(1)$ pour $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

c) En utilisant la relation (3), établir pour $z \in \mathbb{U}_0$:

$$S(z) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{|z^n + 1|}{|z - \alpha_j| \cdot |z - \overline{\alpha}_j|} \qquad (8)$$

d) En déduire pour $z \in \mathbb{U}_0$: $S(z) \leqslant nR(z)$.

e) Établir alors pour $z \in \mathbb{U}_0$: $S(z) \leqslant S(1)$ (9)

Partie III

1) Pour $P \in \mathbb{C}[X]$,on pose : $\|P\| = \sup\{|P(z)| \setminus z \in \mathbb{U}\}$.
Prouver que l'application $P \mapsto \|P\|$ est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.

2) Pour $\quad P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, établir l'égalité :

$$\forall k \in [0, n-1], \; a_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{n-k} P(\alpha_j).$$

En déduire les inégalités : $\quad \forall k \in [0, n-1], \quad |a_k| \leqslant \|P\|$ (10)

3) Pour $\beta \in \mathbb{C}$, on pose : $\quad B_\beta = \inf\left\{ \frac{\|(X - \beta)P\|}{\|P\|} \setminus P \in \mathcal{P} \right\}$.

4) Utiliser le polynôme $\quad \sum_{k=0}^{n-1} X^k \quad$ pour établir l'inégalité : $\quad B_1 \leqslant \frac{2}{n}$ (11)

a) Pour $P \in \mathcal{P}$, on pose $Q = (X-1)P$. Montrer que $\quad P(z) = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j \cdot Q(\alpha_j) \cdot (z^n + 1)}{(\alpha_j - 1)(z - \alpha_j)}$.

En déduire pour $z \in \mathbb{U}_0$: $\quad |P(z)| \leqslant \frac{1}{n} \cdot \|Q\| \cdot S(z)$ (12)

b) Pour $z \in \mathbb{U}_1$, établir l'inégalité : $\quad |P(z)| \leqslant \frac{n}{2}\|Q\|$ (13)

c) En déduire l'égalité : $\quad B_1 = \frac{2}{n}$ (14)

d) Pour $\beta \in \mathbb{C}$, établir l'inégalité : $\quad B_\beta \geqslant \frac{1 + |\beta|}{n}$ (15)

(écrire $\beta = ae^{i\varphi}$ avec $a = |\beta|$ et utiliser (1)).

Partie I

1) $\alpha \in \mathbb{R}_+$. $\quad z = e^{i\theta}$

De $|z-\alpha|^2 = 1+\alpha^2 - 2\alpha\cos\theta$ et $|z-1|^2 = 2(1-\cos\theta)$, on tire :

$$4\,|z-\alpha|^2 - (1+\alpha^2)^2\,|z-1|^2 = 2(1+\cos\theta)(1-\alpha)^2$$

l'égalité est réalisée pour $z = -1$ ou $\alpha = 1$, d'où la conclusion :

$$|z-\alpha| \geqslant \frac{1+\alpha}{2}\,|z-1| \tag{1}$$

2) $z = e^{i\theta} \quad |\theta| < \dfrac{\pi}{n} \quad \alpha = e^{i\omega} \quad \dfrac{\pi}{n} \leqslant |\omega| \leqslant \pi$

On a $z - \alpha = e^{i\theta} - e^{i\omega} = e^{i\,\frac{\theta+\omega}{2}}\left(e^{i\,\frac{\theta-\omega}{2}} - e^{-i\,\frac{\theta-\omega}{2}}\right) = 2i\sin\left(\dfrac{\theta-\omega}{2}\right)\,e^{i\,\frac{\theta+\omega}{2}}$, donc :

$$|z-\alpha| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right)\right|, \quad |z-\overline{\alpha}| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta+\omega}{2}\right)\right|, \quad |1-\alpha| = 2\sin\frac{\omega}{2}.$$

- L'inégalité (2) $|z-\alpha|\,|z-\overline{\alpha}| \leqslant |1-\alpha|^2$ résulte donc de :

$$\begin{aligned}\left|4\sin\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta+\omega}{2}\right)\right| &= 2\,|\cos\theta - \cos\omega| \\ &= 2(\cos\theta - \cos\omega) \leqslant 2(1-\cos\omega) \\ &= 4\sin^2\frac{\omega}{2}\end{aligned}$$

L'égalité est réalisée pour $\cos\theta = 1$ c'est-à-dire $z = 1$.

(On a $|\cos\theta - \cos\omega| = \cos\theta - \cos\omega$ car $\cos\theta > \cos\dfrac{\pi}{n} \geqslant \cos\omega$ puisque $z \in \mathbb{U}_0$ et $\alpha \in \mathbb{U}_1$.)

- Pour l'inégalité (3), supposons d'abord $\dfrac{\pi}{n} \leqslant \omega \leqslant \pi$. Alors :

$$|z-\alpha| = 2\sin\frac{\omega-\theta}{2} \quad \text{et} \quad |z-\overline{\alpha}| = 2\sin\frac{\omega+\theta}{2}$$

(car $\dfrac{\omega-\theta}{2} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2n}\right[\subset]0, \pi[$ et de même $\dfrac{\omega+\theta}{2} \in]0, \pi[$), donc :

$$\left(|z-\alpha| + |z-\overline{\alpha}|\right) = 2\left(\sin\frac{\omega-\theta}{2} + \sin\frac{\omega+\theta}{2}\right) = 4\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\omega}{2} \leqslant 4\sin\frac{\omega}{2}$$

c'est-à-dire :

$$\left(|z-\alpha| + |z-\overline{\alpha}|\right) \leqslant 2\,|1-\alpha|.$$

L'égalité est réalisée pour $\cos\dfrac{\theta}{2} = 1$ c'est-à-dire $z = 1$.

Dans le cas $-\pi \leqslant \omega \leqslant -\dfrac{\pi}{n}$, on peut appliquer le résultat précédent en remplaçant α par :

$$\overline{\alpha} = e^{-i\omega} \quad \left(-\omega \in \left[\frac{\pi}{n}, \pi\right]\right),$$

il vient $\left(|z-\overline{\alpha}|+|z-\alpha|\right) \leqslant 2\,|1-\overline{\alpha}|$ et la conclusion résulte de $|1-\overline{\alpha}| = |1-\alpha|$.

3) $z = e^{i\theta}$ $\quad \dfrac{\pi}{n} \leqslant |\theta| \leqslant \pi$. Alors :

$$|z-1| = 2\sin\frac{|\theta|}{2} \geqslant 2 \times \frac{2}{\pi} \times \frac{|\theta|}{2} \geqslant \frac{2}{n}.$$

(On rappelle que $\quad \forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \quad \sin x \geqslant \dfrac{2}{\pi}x.$)

4) L'inégalité (5) est vraie pour $z = 1$. On suppose désormais $z \neq 1$.

a) $n = 2p$, $\quad R(z) = \left|\dfrac{z^{2p}-1}{z^2-1}\right| = \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} z^{2k}\right| \leqslant p = \dfrac{n}{2}$.

b) $n = 3$, $\quad R(z) = \left|\dfrac{z^3-1}{z^2-1}\right| = \left|\dfrac{e^{3i\theta}-1}{e^{2i\theta}-1}\right| = \dfrac{\sin\dfrac{3\theta}{2}}{\sin\theta} = \cos\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\cos\theta}{2\cos\dfrac{\theta}{2}} = 2\cos\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{1}{2\cos\dfrac{\theta}{2}}$.

La fonction $\theta \mapsto 2\cos\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{1}{2\cos\dfrac{\theta}{2}}$ est décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{n}\right]$ et est paire, donc :

$$\max_{\theta \in \left[-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right]} \left(2\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2\cos(\theta/2)}\right) = \frac{3}{2}.$$

Ainsi $\left|\dfrac{z^3-1}{z^2-1}\right| \leqslant \dfrac{3}{2}$.

c) $n = 2p+1$.

On suppose $\left|\dfrac{z^{2p-1}-1}{z^2-1}\right| \leqslant \dfrac{2p-1}{2}$, alors en écrivant :

$$z^{2p+1} - 1 = z^{2p-1}(z^2-1) + z^{2p-1} - 1,$$

il vient :

$$\left|\frac{z^{2p+1}-1}{z^2-1}\right| = \left|z^{2p-1} + \frac{z^{2p-1}-1}{z^2-1}\right| \leqslant \left|z^{2p-1}\right| + \left|\frac{z^{2p-1}-1}{z^2-1}\right| \leqslant 1 + \frac{2p-1}{2},$$

donc :

$$\left|\frac{z^{2p+1}-1}{z^2-1}\right| \leqslant \frac{2p+1}{2}$$

la propriété est récurrente, puisqu'elle est vraie pour $p = 1$, elle est donc vraie pour tout $p \geqslant 1$.

Partie II

1) Posons $Q(x) = X^n + 1$. Puisque $\deg P < n$, la partie entière de la fraction $\dfrac{P}{Q}$ est nulle, et on a :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{X-\alpha_j} \quad \text{avec} \quad \lambda_j = \frac{P(\alpha_j)}{Q'(\alpha_j)} = \frac{P(\alpha_j)}{n\,\alpha_j^{n-1}} = -\frac{\alpha_j\, P(\alpha_j)}{n}$$

$\left(\alpha_j^n = -1\right)$ d'où la décomposition annoncée.

2) a) Dans le cas $n = 2p$, on a :

$$\frac{X^{2p}-1}{X^2-1} = 1 + X^2 + X^4 + \ldots + X^{2(p-1)} = P(X).$$

Alors $P(\alpha_j) = \dfrac{2}{1-\alpha_j^2}$, donc d'après le 1) :

$$\frac{P(X)}{X^{2p}+1} = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{\alpha_j^2-1}\,\frac{1}{X-\alpha_j} = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\alpha_j-\overline{\alpha}_j}\,\frac{1}{X-\alpha_j} \quad \text{car} \quad \overline{\alpha}_j = \frac{1}{\alpha_j}.$$

Mais on a aussi $\dfrac{P(X)}{X^{2p}+1} = \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\overline{\alpha}_j-\alpha_j}\,\frac{1}{X-\overline{\alpha}_j}$, d'où finalement :

$$\frac{P(X)}{X^{2p}+1} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\alpha_j-\overline{\alpha}_j}\left(\frac{1}{X-\alpha_j}-\frac{1}{X-\overline{\alpha}_j}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(X-\alpha_j\right)\left(X-\overline{\alpha}_j\right)}$$

b) Dans le cas $n = 2p+1$, on a :

$$\frac{X^{2p+1}-1}{X-1} = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{2p} = P(X)$$

alors $\dfrac{X^{2p+1}-1}{\left(X^2-1\right)\left(X^{2p+1}+1\right)} = \dfrac{P(X)}{(X+1)\left(X^{2p+1}+1\right)}$: (-1) est pôle double,

la décomposition s'écrit donc :

$$\frac{P(X)}{(X+1)\left(X^n+1\right)} = \frac{A}{(X+1)^2} + \frac{B}{(X+1)} + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\lambda_j}{X-\alpha_j}, \quad \text{avec} \quad \lambda_j = \frac{P(\alpha_j)}{Q'(\alpha_j)}$$

où on a posé $Q(X) = (X+1)\left(X^{2p+1}+1\right)$.

De $Q'(X) = X^{2p+1} + 1 + (2p+1)(X+1)X^{2p}$, on tire :

$$\lambda_j = \frac{P(\alpha_j)}{(2p+1)(\alpha_j+1)\alpha_j^{2p}}$$

et puisque $P(\alpha_j) = \dfrac{1-\alpha_j^{2p+1}}{1-\alpha_j} = \dfrac{2}{1-\alpha_j}$, il vient :

$$\lambda_j = \frac{2\alpha_j}{(2p+1)(\alpha_j^2-1)}$$

donc, comme précédemment :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{A}{(X+1)^2} + \frac{B}{X+1} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{(X-\alpha_j)(X-\overline{\alpha}_j)}.$$

Par ailleurs $Q(X) = (X+1)Q_1(X)$ avec $Q_1(X) = 1 - X + X^2 - X^3 - \ldots - X^{2p-1} + X^{2p}$, donc :

$$A = \frac{P(-1)}{Q_1(-1)} = \frac{1}{n}.$$

Il reste à remarquer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n-1}{(x-1)(x^n+1)} = B = 0$ pour pouvoir enfin écrire :

$$\frac{X^n-1}{(X^2-1)(X^n+1)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(X-\alpha_j)(X-\overline{\alpha}_j)}.$$

- *Autre solution* (valable pour $n = 2p$ ou $n = 2p + 1$)

$P(x) = \dfrac{X^n - 1}{X - 1} = X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + 1 \in \mathcal{P}$.

On applique le résultat du 1) à la fraction $\dfrac{P(X)}{X^n + 1}$ et comme $P(\alpha_j) = \dfrac{-2}{\alpha_j - 1}$, il vient :

$$\frac{X^n - 1}{(X-1)(X^n+1)} = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{(\alpha_j - 1)(X - \alpha_j)}.$$

$$\begin{aligned}
\text{D'où}\quad \frac{X^n - 1}{(X-1)(X^n+1)} &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{(\alpha_j - 1)(X - \alpha_j)} + \frac{\overline{\alpha}_j}{(\overline{\alpha}_j - 1)(X - \overline{j})} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{(2 - \alpha_j - \overline{\alpha}_j)(X+1)}{(2 - \alpha_j - \overline{\alpha}_j)(X - \alpha_j)(X - \overline{\alpha}_j)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{X+1}{(X - \alpha_j)(X - \overline{\alpha}_j)} \\
\text{et}\quad \frac{X^n - 1}{(X^2-1)(X^n+1)} &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(X - \alpha_j)(X - \overline{\alpha}_j)}.
\end{aligned}$$

3) a)

$$S(z) = \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\prod_{k \neq j} (z - \alpha_k)}{1 - \alpha_j} \right| \quad (k \text{ varie de } 1 \text{ à } n)$$

$$\begin{aligned}
S(\alpha_j) &= \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\prod_{k \neq i} (\alpha_j - \alpha_k)}{1 - \alpha_i} \right| = \left| \frac{\prod_{k \neq j} (\alpha_j - \alpha_k)}{1 - \alpha_j} \right| = \left| \frac{1}{(1 - \alpha_j)} \left(\frac{d(1 + X^n)}{dX} \right)_{X = \alpha_j} \right| \\
&= \left| \frac{n\,\alpha_j^{n-1}}{1 - \alpha_j} \right| = \frac{n}{|1 - \alpha_j|}.
\end{aligned}$$

b) $S(1) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{2}{|1 - \alpha_j|^2} = 2\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1 - \alpha_j)(1 - \overline{\alpha}_j)}$, donc, d'après le 2) :

$$S(1) = 2n\left(\frac{X^n - 1}{(X^2 - 1)(X^n + 1)}\right)_{X=1} = 2n\frac{P(1)}{4} = \frac{n^2}{2}$$

D'après l'inégalité (4), on a $|1 - \alpha_j| \geqslant \dfrac{2}{n}$ donc $S(\alpha_j) \leqslant \dfrac{n^2}{2} = S(1)$.

c) $2S(z) = |z^n + 1| \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{|1 - \alpha_j|\,|z - \alpha_j|} + \frac{1}{|1 - \overline{\alpha}_j|\,|z - \overline{\alpha}_j|} \right)$

$$= |z^n + 1| \sum_{j=1}^{n} \frac{|z - \alpha_j| + |z - \overline{\alpha}_j|}{|1 - \alpha_j|\,|z - \alpha_j|\,|z - \overline{\alpha}_j|}.$$

D'après (3), il vient alors $S(z) \leqslant |z^n + 1| \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|z - \alpha_j|\,|z - \overline{\alpha}_j|}$.

d) $z \in \Gamma_0$. Montrer $S(z) \leqslant nR(z)$

Posons $z = e^{i\theta}$, $-\frac{\pi}{n} < \theta < \frac{\pi}{n}$ et $\alpha_j = e^{i\omega_j}$, $\omega_j = (2j-1)\frac{\pi}{n}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, alors :

$$z - \alpha_j = e^{i\frac{\theta+\omega_j}{2}} \times 2i\sin\frac{\theta-\omega_j}{2} \quad \text{et} \quad z - \overline{\alpha}_j = e^{i\frac{\theta-\omega_j}{2}} \times 2i\sin\frac{\theta+\omega_j}{2}$$

donc $(z-\alpha_j)(z-\overline{\alpha}_j) = -4e^{i\theta}\sin\frac{\theta+\omega_j}{2}\sin\frac{\theta-\omega_j}{2} = 2e^{i\theta}(\cos\theta - \cos\omega_j)$.

Pour $j \in [\![1, n]\!]$, on a $\frac{\pi}{n} \leqslant \omega_j \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{n}$ donc $\cos\theta - \cos\omega_j > 0$, et :

$$|z-\alpha_j|\,|z-\overline{\alpha}_j| = 2(\cos\theta - \cos\omega_j) = e^{-i\theta}(z-\alpha_j)(z-\overline{\alpha}_j).$$

On en déduit :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|z-\alpha_j|\,|z-\overline{\alpha}_j|} = e^{i\theta}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(z-\alpha_j)(z-\overline{\alpha}_j)} = \left|\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(z-\alpha_j)(z-\overline{\alpha}_j)}\right|$$

puis :

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{|z^n+1|}{|z-\alpha_j|\,|z-\overline{\alpha}_j|} = \left|\sum_{j=1}^{n}\frac{z^n+1}{(z-\alpha_j)(z-\overline{\alpha}_j)}\right|.$$

En utilisant l'égalité (7), on en déduit ensuite :

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{z^n+1}{(z-\alpha_j)(z-\overline{\alpha}_j)}\right| = n\left|\frac{z^n-1}{z^2-1}\right| = nR(z).$$

Avec l'inégalité (8), il vient enfin :

$$S(z) \leqslant nR(z).$$

e) $z \in \Gamma_0$. Montrer $S(z) \leqslant S(1)$

$S(z) \leqslant nR(z)$ avec $R(z) \leqslant \frac{n}{2}$ donne $S(z) \leqslant \frac{n^2}{2}$.

Partie III

1) Si $\|P\| = 0$, P a une infinité de racines et c'est donc le polynôme nul. Les autres vérifications sont sans difficulté.

2) $$P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \qquad P(\alpha_j) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell\, \alpha_j^\ell \qquad \alpha_j^{n-k}P(\alpha_j) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell\, \alpha_j^{n-k+\ell}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^{n-k}P(\alpha_j) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell \sum_{j=1}^{n}\alpha_j^{n-k+\ell} = na_k$$

Conséquence : $|a_k| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|P(\alpha_j)| \leqslant \|P\|$.

3) $B_\beta = \inf\left\{ \dfrac{\|(X-\beta)P\|}{\|P\|} | P \in \mathcal{P} \right\}$.

a) $P_0(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k = \frac{X^n - 1}{X-1}$, $\dfrac{\|(X-1)P_0\|}{\|P_0\|} = \dfrac{\|X^n - 1\|}{\|P_0\|} \leqslant \dfrac{2}{\|P_0\|} = \dfrac{2}{n}$, $(\|P_0\| = P_0(1) = n)$

donc $B_1 \leqslant \dfrac{2}{n}$.

b) $Q = (X-1)P$

$$P(z) = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j P(\alpha_j)(z^n+1)}{(z-\alpha_j)} \qquad \text{cf. (6)}$$

$$= -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j Q(\alpha_j)(z^n+1)}{(\alpha_j - 1)(z-\alpha_j)}$$

donc si $z \in \mathrm{U}_0$ $\quad |P(z)| \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{|\alpha_j| \; \|Q\| \; |z^n+1|}{|\alpha_j - 1| \; |z-\alpha_j|} = \frac{1}{n}\|Q\|\, S(z)$.

c) Pour $z \in \mathrm{U}_1$, $\quad |P(z)| = \left|\dfrac{Q(z)}{z-1}\right| \leqslant \dfrac{n}{2}|Q(z)| \leqslant \dfrac{n}{2}\|Q\|$ $\qquad$ d'après (4)

d) Pour $z \in \mathrm{U}_0$, $\quad |P(z)| \leqslant \dfrac{n}{2}\|Q\|$ $\qquad$ d'après (9)

d'où $\quad \|P\| \leqslant \dfrac{n}{2}\|Q\|$ $\qquad$ d'après (13)

Conséquence : $\forall P \in \mathcal{P}$ $\ \dfrac{\|(X-1)P\|}{\|P\|} \geqslant \dfrac{2}{n}$ $\quad$ et $\quad B_1 \geqslant \dfrac{2}{n}$.

Finalement $\qquad B_1 = \dfrac{2}{n}$.

e) $\beta = a\, e^{i\varphi} \qquad a = |\beta| \in \mathbb{R}_+$

$\forall z \in P \quad |(z-\beta)\,P(z)| = \left|e^{i\varphi}\left(ze^{-i\varphi} - a\right)\; P(z)\right| = \left|(z'-a)\,Q(z')\right| \quad$ avec $\quad z' = ze^{-i\varphi}$

$$Q(X) = P(Xe^{i\varphi})$$

$$|(z-\beta)P(z)| \geqslant \frac{1+a}{2}\left|z'-1\right|\left|Q(z')\right| \qquad \text{d'après (1)}$$

donc $\quad \forall z, \quad \|(z-\beta)P\| \geqslant \dfrac{1+a}{2}\left|z'-1\right|\left|Q(z')\right|$

donc $\qquad \|(z-\beta)P\| \geqslant \dfrac{1+a}{2}\|(z'-1)Q\| \geqslant \dfrac{1+a}{2}\,\dfrac{2}{n}\|Q\| = \dfrac{1+a}{n}\|P\|$.

D'où :

$$\frac{1+a}{n} \leqslant \frac{\|(z-\beta)P\|}{\|P\|} \qquad \text{et} \qquad B_\beta \geqslant \frac{1+a}{n}.$$

CHAPITRE 2

Algèbre linéaire Réduction

Sujets d'oraux 36

Thèmes d'étude – Problèmes 100

Sujets d'oraux

(A) Déterminants

Ex. 1

Soit $(a, b, c, d) \in K^4$; calculer le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}.$$

> Il y a ici plusieurs démarches possibles.
>
> ▪ Par exemple, faire intervenir le déterminant de Vandermonde attaché aux quatre scalaires a, b, c, d (*cf. Précis d'Algèbre et Géométrie, PSI*, Bréal, chapitre 3, exercice 30).
>
> ▪ Ou bien en utilisant les propriétés des opérations élémentaires sur les déterminants : c'est cette démarche qui est développée ici.

On ne modifie pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres :

$$\forall(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in K^3, \quad C_4 \leftarrow \alpha_1 C1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 + \alpha_3 a^2 + \alpha_2 a + \alpha_1 \\ 1 & b & b^2 & b^4 + \alpha_3 b^2 + \alpha_2 b + \alpha_1 \\ 1 & c & c^2 & c^4 + \alpha_3 c^2 + \alpha_2 c + \alpha_1 \\ 1 & d & d^2 & d^4 + \alpha_3 d^2 + \alpha_2 d + \alpha_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \widetilde{P}(a) \\ 1 & b & b^2 & \widetilde{P}(b) \\ 1 & c & c^2 & \widetilde{P}(c) \\ 1 & d & d^2 & \widetilde{P}(d) \end{vmatrix}$$

où $\widetilde{P}$ est la fonction polynôme associée au polynôme P :

$$P(X) = X^4 + \alpha_3 X^2 + \alpha_2 X + \alpha_1.$$

Ainsi, pour tout polynôme P unitaire que degré 4, dont le coefficient de X^3 est nul, on obtient le résultat précédent.

> Il s'agit à présent de choisir P.
>
> Pour une recherche de polynôme «intéressant» , il peut être fructueux d'étudier les relations simples entre coefficients et racines d'un polynôme. En effet, le coefficient du terme de degré 3 est nul si et seulement si la somme des racines est nulle.

Le polynôme $P(X + a + b + c)(X - a)(X - b)(X - c)$ est unitaire de degré 4, le coefficient de X^3 est nul donc :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & 0 \\ 1 & b & b^2 & 0 \\ 1 & c & c^2 & 0 \\ 1 & d & d^2 & \widetilde{P}(d) \end{vmatrix} = \widetilde{P}(d) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a + b + c + d)(d - a)(d - b)(d - c)(c - a)(b - a).$$

Ex. 2

Calculer $D_n = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} a_1 + b_1 & a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 + b_2 & a_2 & a_2 \\ \vdots & a_3 & \vdots & \\ \vdots & \vdots & a_j + b_j & \\ \vdots & \vdots & a_{j+1} & \\ a_n & a_n & a_n & a_n + b_n \end{array} \right| \\ \begin{array}{cccc} & & \underbrace{}_{j^e \text{ colonne}} & \end{array} \end{array}$.

$(a_1, \dots, a_n) \in K^n$, $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in K^n$.

$D_n = \det\left(V + b_1 e_1, V + b_2 e_2, \dots, V + b_j e_j, \dots, V + b_n e_n\right)$

$V = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$.

En appliquant les propriétés de linéarité du déterminant et d'alternance, on obtient :

$$\begin{aligned} D_n &= \det\left(V + b_1 e_1, V + b_2 e_2, \dots, V + b_j e_j, \dots, V + b_n e_n\right) \\ &= \det\left(b_1 e_1, b_2 e_2, \dots, b_j e_j, \dots, b_n e_n\right) \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{n} \det\left(b_1 e_1, b_2 e_2, \dots, b_{-1} e_{-1}, V, b_1 e_1 - b_n e_n\right) \end{aligned}$$

or $V = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$; en utilisant à nouveau les propriétés de linéarité et d'alternance du déterminant, on obtient :

$$\det\left(b_1 e_1, b_2 e_2, \dots, \underbrace{V}_{j^e \text{ place}}, \dots, b_n e_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \det\left(b_1 e_1, \dots, b_{j-1} e_{j-1}, \underbrace{a_i e_i}_{j^e \text{ place}}, \dots, b_n e_n\right)$$

or $\det\left(e_1, e_2, \dots, \underbrace{e_i}_{j^e \text{ place}}, \dots, e_n\right) = \delta_{ij}$ (notation de Kronecker), donc :

$$\sum_{j=1}^{n} \det\left(b_1 e_1, b_2 e_2, \dots, b_{j-1} e_{j-1}, a_i e_i, \dots, b_n e_n\right) = \sum_{j=1}^{n} b_1 b_2 \dots b_{j-1} a_j b_{j+1} \dots b_n$$

et
$$D_n = \prod_{j=1}^{n} b_j + \sum_{j=1}^{n} b_1 b_2 \dots b_{j-1} a_j b_{j+1} \dots b_n .$$

Ex. 3

Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$, on considère le déterminant :

$$d_n = \begin{vmatrix} \widetilde{P}(1) & \dots & \widetilde{P}(k) & \dots & \widetilde{P}(n) \\ \widetilde{P}(2) & & & & \\ \vdots & & & & \\ \widetilde{P}(\ell) & \dots & \widetilde{P}(\ell+k-1) & \dots & \widetilde{P}(\ell+n-1) \\ \widetilde{P}(n) & \dots & \underbrace{\dots}_{k^e \text{ colonne}} & \dots & \widetilde{P}(2n-1) \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \ell^e \text{ ligne} \\ \\ \end{matrix}$$

Montrer que si $d^\circ P \leqslant n-2$ alors $d_n = 0$, $\widetilde{P}$ étant la fonction polynôme associée au polynôme P.

1) Il peut être intéressant, dans un premier temps, de mettre en évidence des familles libres de $\mathbb{C}[X]$ faisant intervenir les polynômes $P(X+k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

Si $P = 0$, alors $d_n = 0$.

Soit $P \neq 0$ et $d = d^\circ P$, $0 \leqslant d \leqslant n-2$.

Les polynômes $P, P', P^{(2)}, \dots, P^{(d)}$ forment, d'après le théorème des degrés échelonnés, une famille libre de $\mathbb{C}[X]$, et, d'après le théorème et la formule de Taylor, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X+k) = \sum_{r=0}^{r=d} \frac{k^r}{r!} P^{(k)}(X).$$

Dans la base $\beta = \left(P^{(r)}(X)\right)_{r \in [\![0,d]\!]}$ de $\mathbb{C}_d[X]$, les coordonnées de $P(X+k)$ sont :

$$\left(\frac{k^r}{r!}\right)_{r \in [\![0,d]\!]}$$

et :

$$\det_\beta \left(P(X+k)\right)_{k \in [\![1,d+1]\!]} = \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \frac{1}{1!} & \frac{2}{1!} & & \frac{(d+1)}{1!} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{\ell!} & & & \vdots \\ \frac{1}{d!} & \frac{2^d}{d!} & & \frac{(d+1)^d}{d!} \end{vmatrix}$$

Il s'agit d'un déterminant d'ordre $(d+1)$.

$$\forall k \in [\![1, d+1]\!], P(X+k) \in \mathbb{C}_d[X].$$

or $\det_\beta \left(P(X+k)_{k \in [\![1,d+1]\!]}\right) = \left(\prod_{k=1}^{k=d} \frac{1}{k!}\right) \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & d+1 \\ 1 & 2^2 & (d+1)^2 \\ \vdots & & \\ 1 & 2^d & (d+1)^d \end{vmatrix}$

$$= \left(\prod_{k=1}^{k=d} \frac{1}{k!}\right) \underbrace{V(1, 2, \dots, d+1)}_{\text{déterminant de Vandermonde } \neq 0}$$

$$\neq 0$$

La famille de polynômes de $\mathbb{C}_d[X]$, $\left(P(X+k)\right)_{k \in [\![1,d+1]\!]}$ est donc une base de $\mathbb{C}_d[X]$.

Une autre démarche est adoptée dans le *Précis d'Algèbre et Géométrie, PSI*, Bréal, chapitre 1, exercice 7.

2) Par hypothèse : $0 \leqslant d \leqslant n-2 \iff 1 \leqslant d+1 \leqslant n-1$.

Utilisons la base $\left(P(X+k)\right)_{k\in[\![1,d+1]\!]}$ de $\mathbb{C}_d[X]$, soit le polynôme $P(X+n) \in \mathbb{C}_d[X]$:

$$\exists!\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{d+1}\right) \in \mathbb{C}^{d+1} \,/\, P(X+n) = \sum_{k=1}^{d+1} \lambda_k P(X+k)$$

et donc, pour tout x complexe et, plus particulièrement, pour tout entier naturel x compris entre 0 et $n-1$:

$$\widetilde{P}(x+n) = \sum_{k=1}^{d+1} \lambda_k \widetilde{P}(x+k)$$

on obtient :

$$C_n = \sum_{k=1}^{d+1} \lambda_k C_k .$$

La dernière colonne de d_n est combinaison linéaire des $d+1$ premières colonnes de d_n $(1 \leqslant d+1 \leqslant n-1)$.

Et par suite, $d_n = 0$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ dont le degré est inférieur ou égal à $n-2$.

Remarque. Et c'est ici particulièrement qu'intervient :

$$1 \leqslant d+1 \leqslant n-1.$$

En effet, C_n est combinaison linéaire *d'autres* colonnes de d_n.

Ex. 4

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ D_n(x) = \begin{vmatrix} x & x-b & \ldots & x-b \\ x-a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x-b \\ x-a & \ldots & x-a & x \end{vmatrix}.$$

Calculer $D_n(x)$.

En retranchant à la $k^{\text{ième}}$ colonne ($k \in [\![2,n]\!]$) la 1^{re} colonne, on obtient :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & -b & -b & \ldots & \ldots & -b \\ x-a & a & a-b & & & a-b \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & a-b \\ \vdots & \vdots & 0 & & \ddots & \\ x-a & 0 & 0 & & & a \end{vmatrix}.$$

En développant $D_n(x)$ selon la 1^{re} colonne, on montre que $D_n(x)$ est un polynôme en x de degré inférieur ou égal à 1. Or :

$$D_n(b) = \begin{vmatrix} b & & 0 \\ & \ddots & \\ b-a & & \ddots \\ & & & b \end{vmatrix} = b^n \quad \text{et} \quad D_n(a) = \begin{vmatrix} a & & a-b \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a \end{vmatrix} = a^n$$

> Connaissant la valeur d'un polynôme de degré inférieur ou égal à $p \in \mathbb{N}$ en $p+1$ points deux à deux distincts, une base adaptée à cette situation est formée des polynômes d'interpolation de Lagrange associés à ces $p+1$ points.

- 1[er] cas : $a \neq b$

En utilisant les polynômes d'interpolation de Lagrange associés à (a, b), $a \neq b$, on a :

$$D_n(x) = D_n(b)\frac{x-a}{b-a} + D_n(a)\frac{x-b}{a-b}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D_n(x) = \frac{b^n - a^n}{b-a}x + \frac{ba^n - ab^n}{b-a}.$$

- 2[e] cas : $a = b$

L'application $f_x \ : \ b \mapsto \begin{vmatrix} x & & & x-b \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ x-a & & & x \end{vmatrix}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme en b, donc :

$$\lim_{b \to a} f_x(b) = f_x(a) = D_n(x).$$

Or $\forall b \neq a, f_x(b) = \left(\dfrac{b^n - a^n}{b-a}x + \dfrac{ba^n - ab^n}{b-a}\right)$, donc :

$$D_n(x) = \lim_{b \to a}\left(\frac{b^n - a^n}{b-a}x + \frac{ba^n - ab^n}{b-a}\right)$$

or :

$$b^n - a^n = (b-a)\sum_{p=1}^{n} a^{p-1}b^{n-p} \quad \text{et} \quad ba^n - ab^n = ab\left(a^{n-1} - b^{n-1}\right)$$

donc $\displaystyle\lim_{b \to a} \frac{b^n - a^n}{b-a} = na^{n-1}$ et $\displaystyle\lim_{b \to a} \frac{ba^n - ab^n}{a-b} = -a^2(n-1)a^{n-2} = -(n-1)a^n$, par suite :

$$D_n(x) = na^{n-1}x - (n-1)a^n.$$

Une autre méthode pour le calcul de $D_n(x)$, lorsque $a = b$, peut être étudiée en introduisant, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $c_k(x)$ le $k^{\text{ième}}$ vecteur colonne de $D_n(x)$.

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x \mapsto c_k(x)$ est dérivable, donc $D_n \ : \ x \mapsto \det\left(c_1(x), c_2(x), \ldots, c_k(x), \ldots, c_n(x)\right)$ est dérivable.

> Revoir, peut-être, la «formule de Leibniz», la dérivée d'une application de la forme $B(f, g)$ où B est une application bilinéaire et sa généralisation.

Et on a :

$$D_n'(x) = \det\left(c_1'(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)\right) + \det\left(c_1(x), c_2'(x), c_3(x), \ldots, c_n(x)\right) + \cdots$$
$$+ \det\left(c_1(x), c_2'(x), \ldots, c_{n-1}(x), c_n'(x)\right)$$

or $\det\left(c_1(x), \ldots, c_k'(x), c_{k+1}(x), \ldots, c_n(x)\right) = \begin{vmatrix} x & & 1 & & \\ & \ddots & 1 & & x-a \\ & & 1 & & \\ x-a & & \vdots & \ddots & \\ & & 1 & & x \end{vmatrix}$

$k^{\text{ième}}$ colonne

$\forall i \in [\![1, n]\!], i \neq k, C_i \leftarrow C_i - (x-a)C_k$

$$\det\left(c_1(x), \ldots, c_k'(x), c_{k+1}(x), \ldots, c_n(x)\right) = \begin{vmatrix} a & & & 1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & 0 & \\ & & a & & & & \\ & & & 1 & & & \\ 0 & & & & a & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & 1 & & & a \end{vmatrix} = a^{n-1}$$

$$\underbrace{}_{k^{\text{ième}} \text{ colonne}}$$

donc $D_n'(x) = na^{n-1}$, et il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $D_n(x) = na^{n-1} + C$, de plus $D_n(a) = a^n$ donc $C = -(n-1)a^n$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, D_n(x) = na^{n-1}x - (n-1)a^n.$$

Ex. 5

Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $p \neq q$. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{q,p}(K)$.

Calculer le produit $(\det(AB))(\det(BA))$.

> On peut d'abord remarquer que AB est une matrice carrée d'ordre p et BA une matrice carrée d'ordre q, mais ni A, ni B n'est une matrice carrée et la relation $\det(MN) = (\det M)(\det N)$ n'est vraie que si et seulement si M et N sont des matrices carrées (de même ordre bien sûr).

Supposons, par exemple, $p < q$.

$$AB \in \mathcal{M}_p(K), \quad \operatorname{rg}(AB) \leqslant \inf(p, q) \leqslant p$$

$$BA \in \mathcal{M}_q(K), \quad \operatorname{rg}(BA) \leqslant \inf(p, q) < q$$

donc l'une au moins de ces deux matrices, dans ce cas BA, a un rang strictement inférieur à son ordre et donc son déterminant est nul. Ainsi :

$$(\det(AB))(\det(BA)) = 0.$$

B Diagonalisation

Ex. 6

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & a \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{C}).$$

1) Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?

2) Quand A est diagonalisable, trouver $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $D = P^{-1}AP$ où D est une matrice diagonale.

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a-\lambda & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & a-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a-\lambda & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & a-\lambda \end{vmatrix}$$

en ajoutant à la ligne 1 la ligne 2 ; puis en ajoutant à la ligne 3 la ligne 4, on obtient :

$$\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & a-\lambda \end{vmatrix}$$

en ajoutant à la colonne 1 l'opposé de la colonne 2

$$\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1+\lambda & -\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & a-\lambda \end{vmatrix}$$

puis en développant selon la 1^{re} colonne :

$$\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(1-\lambda)^2(1+\lambda)(2a-1-\lambda)$$

Deux cas sont à distinguer selon les valeurs de a.

1) $2a-1 \in \{1,-1\} \iff a \in \{1,0\}$.

- (i) si $a = 0$ alors $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(1+\lambda)^2$; deux valeurs propres doubles : 1 et -1.

Étudions $A - I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Alors $\operatorname{rg}(A - I_4) = 2$; d'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ canoniquement associé à la matrice $(A - I_4)$, on a $\dim \operatorname{Ker}(A - I_4) = 2$.

Étudions à présent $A + I_4$.

$$A + I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{rg}(A + I_4) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

donc $\dim \operatorname{Ker}(A + I_4) = 1$ (en appliquant à nouveau le théorème du rang, cette fois-ci, à l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ canoniquement associé à la matrice $A + I_4$) et on a :

$$\operatorname{Ker}(A + I_4) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la matrice A n'est pas diagonalisable.

Il est indispensable de connaître les propriétés caractéristiques d'un endomorphisme diagonalisable.

On a obtenu ici pour la valeur propre -1 :

$$\dim \operatorname{Ker}\left(A + I_4\right) < 2$$

l'ordre de multiplicité de -1 dans le polynôme caractéristique est 2, donc A n'est pas diagonalisable.

- (ii) si $a = 1$ alors $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda + 1)$.

-1 est une valeur propre simple donc $\dim \operatorname{Ker}\left(A + I_4\right) = 1$.

Par suite, A est diagonalisable si et seulement si $\dim \operatorname{Ker}\left(A - I_4\right) = 3$, or :

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \operatorname{rg}\left(A - I_4\right) = 1$$

$$\operatorname{Ker}\left(A - I_4\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

et A est diagonalisable. Si on pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

on obtient :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP.$$

2) $2a \notin \{1, -1\} \iff a \notin \{0, 1\}$.

$2a - 1$ est alors valeur propre simple et le sous-espace propre $\operatorname{Ker}\left(A - (2a-1)I_4\right)$ est une droite vectorielle.

Remarque. A est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre attaché à la valeur propre 1 est de dimension deux. En effet, 1 est la seule valeur propre multiple de A.

$$A - (2a-1)I_4 = \begin{pmatrix} -2a+1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2a+1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -a+1 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & -a+1 \end{pmatrix}$$

$\left(A - (2a-1)I_4\right)X = 0$, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} (-2a+1)x + y + z - t = 0 \\ x + (-2a+1)y - z + t = 0 \\ (1-a)(z+t) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} ax - z = 0 \\ x + y = 0 \\ z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha \in \mathbb{C} \\ x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = a\alpha \\ t = -a\alpha \end{cases}$$

donc $\mathrm{Ker}\left(A-(2a-1)I_4\right)=\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\-1\\a\\-a\end{pmatrix}$.

-1 est valeur propre simple et $\mathrm{Ker}\left(A+I_4\right)=\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

1 est valeur propre double et $\mathrm{Ker}\left(A-I_4\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

A est diagonalisable et on a en posant $P=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&0&-1&-1\\0&1&0&a\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$:

$$P^{-1}AP=\text{ diagonale}(1,1,-1,2a-1).$$

Ex. 7

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que :

$$A=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&c\\0&&&&c\\\vdots&&0&&\vdots\\0&&&&c\\\underbrace{a\quad a\quad\dots\quad a}_{n-1}&&&&b\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\quad(n\in\mathbb{N}^*,\ n\geqslant 3)$$

soit diagonalisable.

$(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $abc\neq 0$.

Soit $A=\begin{pmatrix}0&&&&c\\\vdots&&0&&\vdots\\0&&&&c\\a&\dots&a&\dots\;a&b\end{pmatrix}$, $\mathrm{rg}\,A=2$ car $ac\neq 0$.

Appliquons le théorème du rang à l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A : $\dim\mathrm{Ker}\,u=n-2$, donc 0 est valeur propre, la dimension de l'espace propre correspondant est $n-2$ et l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0 appartient à $[\![n-2,n]\!]$.

- $\mathrm{Im}\,u=\mathrm{Vect}\left(e_n,\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}e_k\right)$.
- $\mathrm{Ker}\,u=\mathrm{Vect}\left(e_1-e_2,e_1-e_3,\dots,e_1-e_{n-1}\right)$ car $c\neq 0$.

> En effet, par lecture de la matrice, C_i étant le $i^{\text{ième}}$-vecteur colonne de A ($i\in[\![1,n]\!]$) :
>
> $$\forall i\in[\![2,n-1]\!],\ C_1-C_i=0$$

$u(e_1) - u(e_i) = 0$, c'est-à-dire $u(e_1 - e_i) = 0$, $(e_1, e_2, \ldots, e_i, \ldots, e_n)$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} u &= \operatorname{Vect}\left(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_i), \ldots, u(e_{n-1}), u(e_n)\right)\\
&= \operatorname{Vect}\left(u(e_1), u(e_n)\right)\\
&= \operatorname{Vect}\left(u(e_1), bu(e_1) - au(e_n)\right) \quad \text{car } a \neq 0\\
&= \operatorname{Vect}\left(e_n, \sum_{k=1}^{n-1} e_k\right) \quad \text{car } c \neq 0
\end{aligned}$$

Or :

$$\beta' = \Big(\underbrace{e_1 - e_2, e_1 - e_3, \ldots, e_1 - e_{n-1}}_{\beta_2 \text{ base de } \operatorname{Ker} u}, \underbrace{e_n, \sum_{k=1}^{n-1} e_k}_{\beta_1 \text{ base de } \operatorname{Im} u}\Big)$$

est une base de $\mathbb{R}^n$, donc :

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$$

et :

$$M_{\beta'}(u) = \left.\left(\begin{array}{c|cc} & 0 & 0\\ & 0 & 0\\ \underbrace{\quad 0 \quad}_{n-2} & \vdots & \vdots\\ & b & (n-1)a\\ & c & 0 \end{array}\right)\right\} n$$

(les deux dernières colonnes : 2)

Soit $B = \begin{pmatrix} b & (n-1)a \\ c & 0 \end{pmatrix} = M_{\beta_1}(u_{|\operatorname{Im} u})$.

Le polynôme caractéristique de $u_{|\operatorname{Im} u}$ est :

$$\chi_B(X) = X^2 - bX - (n-1)ac$$

dont le discriminant Δ est $\Delta = b^2 + 4ac(n-1)$.

- Si $\Delta < 0$, le polynôme caractéristique de $u_{|\operatorname{Im} u}$ $X^2 - bX - ac(n-1)$ n'est pas scindé, donc $u_{|\operatorname{Im} u}$ n'est pas diagonalisable. Par suite, u n'est pas diagonalisable.
- Si $\Delta > 0$, le polynôme $X^2 - bX - ac(n-1)$ est scindé, à racines simples, donc $u_{|\operatorname{Im} u}$ admet deux valeurs propres distinctes non nulles car $ac(n-1) \neq 0$.

On pouvait remarquer plus haut que si $u_{|\operatorname{Im} u}$, donc $\operatorname{Im} u$, admet une valeur propre, alors cette valeur propre est non nulle, sinon :

$$\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u \neq \{0\}.$$

- Si $\Delta = 0$, le polynôme caractéristique de B admet une racine double $\lambda_1 = \lambda_2 = b/2$:

$$B - \frac{b}{2} I_2 = \begin{pmatrix} \frac{b}{2} & (n-1)a \\ c & -\frac{b}{2} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rg}\left(B - \frac{b}{2} I_2\right) = 1$$

$$\dim \operatorname{Ker}\left(u - \frac{b}{2} I_2\right) = +1.$$

La dimension du sous-espace propre $\operatorname{Ker}\left(u - (b/2)I_2\right)$ n'étant pas égal à l'ordre de multiplicité de cette valeur propre, $u_{|\operatorname{Im} u}$ n'est pas diagonalisable, donc u n'est pas diagonalisable.

u est diagonalisable si et seulement si $b^2 + 4ac(n-1) > 0$.

> En considérant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A est diagonalisable si et seulement si $b^2 + 4ac(n-1) \neq 0$; sinon A est triangularisable ($(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $abc \neq 0$).

Ex. 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{R}_n[X]$, $A \neq 0$.

On considère $\Phi_A \ : \ \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto (AP)^{(n)}$.

$(AP)^{(n)}$ est le polynôme dérivée $n^{\text{ième}}$ du polynôme A.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur le polynôme A pour que Φ_A soit un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur le polynôme A pour que Φ_A soit diagonalisable.

On peut vérifier rapidement que Φ_A est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$:

- d'abord Φ_A est linéaire d'après la linéarité de la dérivation ;
- ensuite $d^\circ(AP) = d^\circ A + d^\circ P \leqslant 2n$; (avec la convention : le degré du polynôme nul est $-\infty$ et si $P = 0$, $d^\circ A + d^\circ P = -\infty$), donc $d^\circ(AP)^{(n)} \leqslant 2n - n = n$, ainsi $(AP)^{(n)} \in \mathbb{R}_n[X]$.

> On détermine (B étant la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$) $\Phi_A(X^q)$ pour tout $q \in [\![0, n]\!]$, et on a :
>
> $$d^\circ \left(AX^q\right)^{(n)} \leqslant d^\circ A + q - n \leqslant q.$$
>
> La matrice de Φ_A dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est donc triangulaire supérieure, ce qui donne immédiatement les valeurs propres de Φ_A.

En posant $A = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $d^\circ A = d \in [\![0, n]\!]$:

$$AX^q = \sum_{k=0}^{d} a_k X^{k+q} \text{ pour tout } q \in [\![0, n]\!]$$

et donc $\left(AX^q\right)^{(n)} = \sum_{k=n-a}^{d} (k+q)(k+q-1)\ldots(k+q-n)a_k X^{k+q-n}$.

- Si $d < n$ alors $M_B(\Phi_A) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \times \\ & 0 & & & \times \\ & & \ddots & & \times \\ & 0 & & \ddots & \times \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ avec $\Phi_A(X^n) \neq 0$.

0 est valeur propre de Φ_A d'ordre de multiplicité $(n+1)$, Φ_a est alors nilpotente et, bien sûr, n'est pas un automorphisme, n'est pas diagonalisable car $\Phi_A \neq 0$.

- Si $d = n$, $a_n \neq 0$, alors :

$$M_B(\Phi_A) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccc} n!a_n & \times & & & & \\ 0 & (n+1)!a_n & & \times & & \\ \vdots & & \ddots & & \times & \\ \vdots & & & \dfrac{(n+q)!}{q!}a_n & & \\ 0 & & & & & \\ & & & & & \dfrac{(2n)!}{n!}a_n \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \} \ q^{\text{ième}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \end{array} \Bigg\} n+1 \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{q^{\text{ième}} \text{ colonne}} \end{array}$$

$0 \notin \mathrm{Sp}(\Phi_a)$ donc Φ_A est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Φ_A admet $(n+1)$ valeurs propres deux à deux distinctes et Φ_A est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $(n+1)$, donc Φ_A est diagonalisable.

> Cette condition est une condition suffisante de diagonalisabilité, les valeurs propres sont deux à deux distinctes car $a_n \neq 0$ ($d^\circ A = n = d$ et a_n est le coefficient dominant de A).

En conclusion, Φ_n est diagonalisable si et seulement si $d^\circ A = n$.

Ex. 9

Étude de l'application :

$$L_n \ : \ \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], \ P \mapsto XP''(X) + (X-4)P'(X) - 3P(X).$$

1) Montrer que L_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-il diagonalisable ?

2) Déterminer, selon $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}\, L_n$ et une base de $\mathrm{Im}\, L_n$.

3) Pour $n \geq 4$, déterminer, selon les valeurs de l'entier $p \in [\![0, n]\!]$, l'existence de polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que :

$$XP''(X) + (X-4)P'(X) - 3P(X) = X^p.$$

1) La linéarité de L_n est due à la linéarité de la dérivation et à la structure de $\mathbb{R}$-algèbre de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$L_n(P) = (p-3)a_pX^p + Q(X) \quad \text{où } d^\circ Q < p$$

donc :

$$\begin{cases} d^\circ L_n(P) = d^\circ P & \text{si } d^\circ P \neq 3 \\ d^\circ L_n(P) < d^\circ P & \text{si } d^\circ P = 3 \end{cases}$$

Dans tous les cas, $L_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

La matrice de L_n, dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, est une matrice carrée d'ordre $(n+1)$ triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont $(k-3)$ avec $k \in [\![0, n]\!]$ car $L_n(1) = -3$, $L_n(X) = -4 - 2X$, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $L_n(X^k) = (k-3)X^k + (k^2 - 5k)X^{k-1}$, donc :

$$\mathrm{Sp}(L_n) = \{(k-3), k \in [\![0, n]\!]\}, \mathrm{Card}\,\mathrm{Sp}(L_n) = \dim \mathbb{R}_n[X] = n+1.$$

L_n admettant $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

2) En particulier, 0 est valeur propre de L_n si et seulement si $n \geq 3$ et alors c'est une valeur propre simple et $\dim \mathrm{Ker}\, L_n = 1$, d'après l'étude du degré de $L_n(P)$, si $P \in \mathrm{Ker}\, L_n$ et $P \neq 0$, alors $d^\circ P = 3$. Cherchons P unitaire et de degré 3 appartenant à $\mathrm{Ker}\, L_n$.

Soit :

$$P = X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$$
$$P' = 3X^2 + 2\,\alpha\, X + \beta$$
$$P'' = 6X + 2\,\alpha\,.$$

et $L_n(P) = \left(-3\,\alpha - 12 + 2\,\alpha\right)X^2 + \left(-3\,\beta - 8\,\alpha + 2\,\alpha + \beta\right)X + \left(-3\,\alpha - 4\,\beta\right)$.

$P \in \operatorname{Ker} L_n \iff L_n(P) = 0$ et comme $\left(1, X, X^2\right)$ est libre, il s'ensuit :

$$\begin{cases} -\alpha - 6 = 0 \\ 2\,\beta - 6\alpha = 0 \\ -3\,\gamma - 4\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -6 \\ \beta = 18 \\ \gamma = 24. \end{cases}$$

Si $n \geqslant 3$, $\operatorname{Ker} L_n = \mathbb{R}\left(X^3 - 6X^2 + 18X - 24\right)$.

Si $n \in [\![0, 2]\!]$, $\operatorname{Ker} L_n = \left\{0\right\}$.

En appliquant le théorème du rang à L_n pour $n \geqslant 3$:

$$\dim \mathbb{R}_n\left[X\right] = \dim \operatorname{Ker} L_n + \operatorname{rg} L_n$$

on obtient $\operatorname{rg} L_n = n$, car $\dim \mathbb{R}_n\left[X\right] = n + 1$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} L_n &= \operatorname{Vect}\left(L_n\left(X^k\right), k \in [\![0, n]\!]\right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(\underbrace{1, X, X^2, -4X^3 + X^4, X^k, k \in [\![5, n]\!]}_{\text{de cardinal } n}\right) \end{aligned}$$

donc une base de $\operatorname{Im} L_n$ est $\left(1, X, X^2, -4X^3 + X^4, X^k, k \in [\![5, n]\!]\right)$.

La matrice de Φ_A dans la base canonique est :

$$\left.\begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 & 0 & & 0 & & \\ 0 & -2 & -6 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & & & & 0 \\ 0 & & & & \ddots & & 0 & \\ \vdots & & & & & k^2 - 5k & 0 & \\ \vdots & 0 & & & & k - 3 & \ddots & \\ \vdots & & & & & & \ddots & n(n-5) \\ 0 & & & & & & & n - 3 \end{pmatrix}\right\} n + 1$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{(k+1)^{\text{ième}} \text{ colonne}}$$

L_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n\left[X\right]$ (conséquence du théorème du rang) si et seulement si $0 \leqslant n \leqslant 2$.

3) $XP''(X) + (X - 4)P'(X) - 3P(X) = X^p$.

$\forall p \in [\![0, n]\!] \setminus \left\{3, 4\right\}$, $X^p \in \operatorname{Im} L_n$.

- Si $p = 3$, $\forall P \in \mathbb{R}_n\left[X\right]$:

$$\begin{cases} d^\circ L_n(P) = d^\circ P \neq 3 & \text{si } d^\circ P \neq 3 \\ d^\circ L_n(P) < d^\circ P = 3 & \text{si } d^\circ P = 3 \end{cases}$$

Dans tous les cas, $d^\circ L_n(P) \neq 3$.

$\forall P \in \mathbb{R}_n\left[X\right]$, $L_n(P) \neq X^3$, donc $X^3 \notin \operatorname{Im} L_n$.

- Si $p = 4$, supposons que $X^4 \in \operatorname{Im} L_n$; comme $-4X^3 + X^4 \in \operatorname{Im} L_n$, alors :

$$X^3 = -\frac{1}{4}\left(-4X^3 + X^4\right) + \frac{1}{4}X^4 \in \operatorname{Im} L_n$$

ce qui est contraire au résultat précédent, donc $X^4 \notin \operatorname{Im} L_n$.

(i) $\forall p \in [\![0, n]\!] \setminus \{3, 4\}, \exists P_0 \in \mathbb{R}_n[X] \;/\; L_n(P_0) = X^p$. Alors :

$$\{P \;/\; L_n(P) = X^p\} = \left\{P_0 + \alpha\left(X^3 - 6X^2 + 18X - 24\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

> En effet, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifie $L_n(P) = X^p$ si et seulement si $L_n(P) = L_n(P_0)$, ce qui est équivalent à $L_n(P - P_0) = 0$, donc :
>
> $$P - P_0 \in \operatorname{Ker} L_n.$$

(ii) $\forall p \in \{3, 4\}, \{P \;/\; L_n(P) = X^p\} = \varnothing$.

Ex. 10

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E diagonalisables et tels que $f \circ g = g \circ f$.

Montrer que $f \circ g$ est diagonalisable.

Montrons d'abord que f et g sont simultanément diagonalisables.

f étant diagonalisable, $E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \operatorname{Ker}\left(f - \lambda \operatorname{Id}_E\right)$. $\quad (*)$

Comme f et g commutent, $\operatorname{Ker}\left(f - \lambda \operatorname{Id}_E\right)$ est stable par g.

> En effet :
>
> $$\begin{aligned}\forall x \in \operatorname{Ker}\left(f - \lambda \operatorname{Id}_E\right), \quad \left(f - \lambda \operatorname{Id}_E\right)\left(g(x)\right) &= f \circ g(x) - \lambda g(x)\\ &= g \circ f(x) - \lambda g(x)\\ &= g(\lambda x) - \lambda g(x) = 0\end{aligned}$$

Donc $g_{|\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)}$ induit un endomorphisme de $\operatorname{Ker}\left(f - \lambda \operatorname{Id}_E\right)$, notons-le g_λ.

Or, g étant diagonalisable, il existe un polynôme scindé, à racines simples, annulateur de g donc de g_λ. Par suite, g_λ est diagonalisable.

> Par application du théorème : $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme scindé, à racines simples, annulateur de u.

Il existe donc une base β_λ de $\operatorname{Ker}\left(f - \lambda \operatorname{Id}_E\right)$ formée de vecteurs propres de g_λ donc de g, et de f car $\beta_\lambda \subset \operatorname{Ker}\left(f - \lambda \operatorname{Id}_E\right)$ et :

$$\beta = \bigcup_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \beta_\lambda$$

est une base de E adaptée à la décomposition $(*)$.

Cette base β de E est donc constituée de vecteurs propres de f et de g : f et g sont donc simultanément diagonalisables et, de plus, β est une base de vecteurs propres de $f \circ g$.

> En effet :
>
> $$\begin{aligned}\forall x \in \beta, \ &\exists\, \mu \in \operatorname{Sp}(g) \;/\; g(x) = \mu x\\ &\exists\, \lambda \in \operatorname{Sp}(f) \;/\; f(x) = \lambda x\end{aligned}$$

donc $f \circ g(x) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu\,\lambda\, x$ et $x \neq 0$ car $x \in \beta$ donc x est un vecteur propre de $f \circ g$ pour tout $x \in \beta$. De plus, β est une base de E donc β est une base de vecteurs propres de $f \circ g$.

Par suite, $f \circ g$ est diagonalisable.

Remarque. Cet exercice a permis d'appliquer différentes propriétés caractéristiques d'un endomorphisme diagonalisable.

(i) $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} \mathrm{Ker}\left(u - \lambda\, \mathrm{Id}_E\right).$$

(ii) $u \in \mathscr{L}(E)$, u est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme scindé, annulateur de u, à racines simples.

(iii) $u \in \mathscr{L}(E)$, u est diagnalisable si et seulement si il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

Ex. 11

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$, de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1.

Montrer l'équivalence des trois assertions :

(a) u est diagonalisable ;

(b) $E = \mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, u$;

(c) $\mathrm{Tr}(u) \neq 0$.

Remarquons d'abord que, par application du théorème du rang à $u \in \mathscr{L}(E)$, E étant de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\dim \mathrm{Ker}\, u = n - 1$.

Or, si $n = 1$, u est une homothérie vectorielle de rapport $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et on a bien l'équivalence des trois assertions. On peut donc supposer dans la suite que $n \geqslant 2$.

0 est donc valeur propre de u, le sous-espace propre associé étant de dimension $n - 1$.

- Si u est diagonalisable, on a :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}\left(u - \lambda\, \mathrm{Id}_E\right)$$

c'est-à-dire ici :

$$E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Ker}\left(u - \lambda\, \mathrm{Id}_E\right) \quad \text{où } \lambda \neq 0.$$

Par considération des dimensions car :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \dim \mathrm{Ker}\left(u - \lambda\, \mathrm{Id}_E\right) \geqslant 1.$$

Soit $x \in \mathrm{Ker}\left(u - \lambda\, \mathrm{Id}_E\right)$ où $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\lambda \neq 0$, alors $u(x) = \lambda x$, et comme $\lambda \neq 0$:

$$x = u\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \in \mathrm{Im}\, u \quad \text{donc} \quad \mathrm{Ker}\left(u - \lambda\, \mathrm{Id}_E\right) \subset \mathrm{Im}\, u$$

et, par considération des dimensions :

$$\mathrm{Ker}\left(u - \lambda\, \mathrm{Id}_E\right) = \mathrm{Im}\, u.$$

Par suite :

$$E = \mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, u \quad \text{d'où} \quad (a) \Rightarrow (b).$$

- Supposons que $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$.

Soit β une base de E adaptée à cette décomposition de E en somme directe : $\beta = \{e\} \cup \beta_1$ où β_1 est une base de $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(e)$, ($\dim \operatorname{Im} u = 1$ car $\operatorname{rg} u = 1$).

Comme $u(e) \in \operatorname{Im} u$, $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}\ /\ u(e) = \lambda e$; or $\lambda \neq 0$ car, si $\lambda = 0$, alors $u(e) = 0$ et $e \in \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$. Comme $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont en somme directe, $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$, ce qui en contradiction avec $e \neq 0$.

Par suite :

$$M_\beta(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ et } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Donc $\operatorname{Tr} u = \operatorname{Tr}\left(M_\beta(u)\right) = \lambda \neq 0$, donc (b) $\Rightarrow$ (c).

- Supposons $\operatorname{Tr} u \neq 0$.

Soit $e \in \operatorname{Im} u$, $e \neq 0$, $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(e)$ car $\operatorname{rg} u = 1$. Il existe une base β de E dont le premier vecteur est e.

> Par application du théorème de la base incomplète.

$\forall x \in \beta$, $u(x) \in \operatorname{Im} u = \operatorname{Vect} e$ donc :

$$M_\beta(u) = \begin{pmatrix} \lambda & \times & \times & \dots & \times \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Tr} u = \operatorname{Tr} M_\beta(u) = \lambda \neq 0$.

Le polynôme caractéristique de u est donc :

$$(-1)^n X^{n-1}(X - \lambda).$$

0 est valeur propre d'ordre $n-1$, le sous-espace propre correspondant est $\operatorname{Ker} u$ de dimension $n-1$ car $\operatorname{rg} u = 1$.

λ est valeur propre simple, donc $E = \operatorname{Ker}(u - \lambda e) \oplus \operatorname{Ker} u$, et u est diagonalisable.

Ex. 12

Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables et telles que $A^3 + A = 2I_n$.

> Aucune difficulté, l'énoncé nous donne un polynôme annulateur, il ne reste plus qu'à appliquer les résultats du cours.

Conditions nécessaires : on suppose que A est une solution du problème.

Le polynôme $P = X^3 + X - 2$ étant annulateur de A, toute valeur propre λ de A est racine de P.

Dans $\mathbb{R}[X]$, la décomposition de P en facteurs irréductibles est :

$$P = (X-1)\left(X^2 + X + 2\right)$$

$X^2 + X + 2$ est non scindé car de discriminant strictement négatif : $\Delta = -7$ ou car on peut écrire : $X^2 + X + 2 = \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$.

Ainsi la seule valeur propre possible de A est 1 et puisque cette matrice est diagonalisable, on a $A = I_n$.

Conditions suffisantes : il est évident que I_n convient, c'est donc là l'unique solution du problème.

Ex. 13

Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + {}^tM = I_n$.

M est-elle diagonalisable ?

${}^tM = I_n - M^2$ donc $M = I_n - {}^t(M^2)$.

Rappel. L'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto {}^tM$ vérifie :

$$\forall (M, N) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2,\ {}^t\left({}^tM\right) = M \text{ et } {}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM$$

$$\begin{aligned} M &= I_n - \left({}^tM\right)^2 \\ &= I_n - \left(I_n - M^2\right)^2 \\ &= -M^4 + 2M^2 \end{aligned}$$

Or M est inversible, on obtient donc :

$$I_n = -M^3 + 2M.$$

Soit :

$$\begin{aligned} P &= X^3 - 2X + 1 \\ &= (X-1)\left(X^2 + X - 1\right) \\ &= (X-1)\left(X + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

alors $P(M) = 0$.

P est donc un polynôme à coefficients réels, scindé, à racines simples, annulateur de M, M est donc diagonalisable.

Ex. 14

Résoudre : $\begin{cases} M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M^5 = M^2 \\ \operatorname{Tr} M = n. \end{cases}$

Soit le polynôme $X^5 - X^2 = X^2\left(X^3 - 1\right)$. C'est un polynôme annulateur de M. Or, si λ est valeur propre de M, alors λ est racine de $X^5 - X^2$ donc $\lambda \in \left\{0, 1, j, j^2\right\}$. Ainsi :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \left\{0, 1, j, j^2\right\}.$$

Soit $m(\lambda)$ l'ordre de multiplicité de $\lambda \in \left\{0, 1, j, j^2\right\}$ dans le polynôme caractéristique, $m(\lambda) \in \mathbb{N}$ (en travaillant dans $\mathbb{C}[X]$).

$m(\lambda) = 0 \iff \lambda \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$.

Le polynôme caractéristique est de degré n, à coefficients réels, donc $m(j) = m(j^2)$ et on a :

$$m(0) + m(1) + 2m(j) = n.$$

Or $\operatorname{Tr} M = 0 \times m(0) + 1 \times m(1) + jm(j) + j^2 m(j^2)$, d'où le système :

$$\mathcal{S} \begin{cases} m(0) + m(1) + 2mj = n \\ m(1) + jm(j) + j^2 m(j) = n \\ \left(m(0), m(1), m(j)\right) \in [\![0, n]\!]^3. \end{cases}$$

| $1 + j + j^2 = 0.$

$$\mathcal{S} \iff \begin{cases} m(0) + m(1) + 2m(j) = n \\ m(1) - m(j) = n \\ \left(m(0), m(1), m(j)\right) \in [\![0, n]\!]^3 \end{cases} \iff \begin{cases} m(1) = n \\ m(j) = 0 \\ m(0) = 0 \end{cases}$$

donc $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{1\} = \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$.

| *Remarque.* Le polynôme caractéristique de M est $(-1)^n(X-1)^n$.

Comme 0 n'est pas valeur propre, $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, donc :

$$\begin{cases} M^5 - M^2 = 0 \\ M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \end{cases} \iff M^3 - I_n = 0.$$

| $M^3 - I_n = 0 \Rightarrow M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, d'où l'équivalence précédente.

Le polynôme $X^3 - 1$ est donc un polynôme scindé dans $\mathbb{C}[X]$, annulateur de M, à racines simples, donc M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant 1 pour unique valeur propre, M est donc semblable à I_n puis $M = I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Il existe donc une unique solution au système proposé, c'est I_n.

Ex. 15

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $M_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1) Pour quelles valeurs de z la matrice M_z est-elle diagonalisable ?

2) Montrer que pour $|z|$ assez petit, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} M_z^n = 0$.

1) | En tant que matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, le polynôme caractéristique de M_z est scindé et, en général, il admet trois racines simples, ce qui est une condition suffisante pour que M_z soit diagonalisable.

Formons le polynôme caractéristique :

$$P(X) = \det\left(M_z - XI_3\right) = -X^3 + Xz + z.$$

Un complexe λ est racine double (au moins) de P si et seulement si il est racine commune de P et P'.

Pour $z = 0$, il est clair que 0 est racine triple de P.

Supposons maintenant $z \neq 0$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est racine double (au moins) de P, on a :

$$-\lambda^3 + \lambda z + z = 0 \quad \text{et} \quad 3\lambda^2 = z$$

donc :

$$\lambda^2 = \frac{z}{3} \quad \text{et} \quad \lambda\left(\lambda^2 - z\right) = z$$

soit : $$\lambda^2 = \frac{z}{3} \quad \text{et} \quad -\frac{2}{3}z\lambda = z.$$

Puisque $z \neq 0$, on en déduit $\lambda = -\frac{3}{2}$ et $z = \frac{27}{4}$.

Réciproquement, pour $z = \frac{27}{4}$ on a :

$$-X^3 + \frac{27}{4}X + \frac{27}{4} = \left(X + \frac{3}{2}\right)(3 - X),$$

donc $-\frac{3}{2}$ est racine double de P.

Ainsi M_z admet trois valeurs propres distinctes, sauf si $z \in \left\{0, \frac{27}{4}\right\}$, et dans ce cas, elle est diagonalisable.

Pour $z = 0$, on a :

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui n'est évidemment pas diagonalisable puisqu'elle est non nulle et admet la valeur propre triple 0 (M_0 est nilpotente d'indice 2).

Pour $z = \frac{27}{4}$, on a :

$$M_{\frac{27}{4}} + \frac{3}{2}I_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{27}{4} \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

et il est clair que cette matrice est de rang 2. Donc le sous-espace propre associé à la valeur propre double $-\frac{3}{2}$ est une droite vectorielle et $M_{\frac{27}{4}}$ est non diagonalisable.

En conclusion, M_z est diagonalisable si et seulement si $z \notin \left\{0, \frac{27}{4}\right\}$.

2) Lorsque M_z est diagonalisable, en appelant λ_1, λ_2, λ_3 ses valeurs propres, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_z^n est semblable à :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix}$$

donc M_z^n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $|\lambda_i| < 1$. En conséquence, si on détermine une condition nécessaire pour qu'il existe une valeur propre λ de module $|\lambda| \geqslant 1$, sa négation donne une condition suffisante pour que $\lim_{n \to +\infty} M_z^n = 0$.

Avec $P(\lambda) = -\lambda^3 + z(\lambda + 1)$ on obtient, quel que soit z, $P(-1) = 1$. Donc -1 n'est en aucun cas valeur propre de M_z et, pour toute valeur propre λ, on a :

$$\frac{\lambda^3}{1 + \lambda} = z.$$

Supposons que λ soit une valeur propre de module $|\lambda| \geqslant 1$. On a alors :

$$|1 + \lambda| \leqslant 1 + |\lambda| \leqslant 1 + |\lambda|^3 \quad \text{donc} \quad |z| = \frac{|\lambda|^3}{|1 + \lambda|} \geqslant \frac{|\lambda|^3}{1 + |\lambda|^3}$$

et, par croissance de la fonction homographique $\varphi : x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ sur $[1, +\infty[$, il vient :

$$|z| \geqslant \varphi(1) = \frac{1}{2}.$$

En tenant compte du 1), il en résulte que, pour $0 < |z| < \dfrac{1}{2}$, M_z admet trois valeurs propres distinctes de modules strictement inférieurs à 1, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} M_z^n = 0$.

Pour $z = 0$, on a $M_0^n = 0$ dès que $n \geqslant 3$ d'où finalement :

$$\lim_{n \to +\infty} M_z^n = 0 \text{ pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < \frac{1}{2}.$$

Ex. 16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2$. Montrer que si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors elle le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$B = P^{-1}AP \iff AP = PB.$$

> Il s'agit ici de décomposer la matrice P à coefficients complexes sous la forme de combinaison linéaire à coefficients complexes de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Il existe un couple unique $(Q, R) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2$, $P = R + i\,Q$.

> En effet, $P = \left(p_{\ell,k}\right)_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant n}}$ $p_{\ell,k} \in \mathbb{C}$ $\exists!\left(r_{\ell,k}, q_{\ell,k}\right) \in \mathbb{R}^2 \;/\; p_{\ell,k} = r_{\ell,k} + iq_{\ell,k}$.
> L'unicité de l'écriture algébrique d'un nombre complexe donne le résultat en posant :
> $$R = \left(r_{\ell,k}\right)_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant n}}, \quad Q = \left(q_{\ell,k}\right)_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant n}}$$

Ainsi :

$$A(R + i\,Q) = (R + i\,Q)B,$$

$$AR + iAQ = RB + i\,QB.$$

De l'unicité d'écriture algébrique d'un nombre complexe, on déduit :

$$\begin{cases} AR = RB \\ AQ = QB \end{cases}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ A(R + \lambda Q) = (R + \lambda Q)B.$$

> Il s'agit maintenant de montrer qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que :
> $$(R + \lambda Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Or l'application :

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \lambda \mapsto \det(R + \lambda Q)$$

est une fonction polynôme non nulle car $\det\big(\underbrace{R + i\,Q}_{=P}\big) \neq 0$ (en effet, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$).

> Rappel. $M \in \mathrm{GL}_n(K) \iff \det M \neq 0$.

La restriction à $\mathbb{R}$ de $\lambda \mapsto \det(R + \lambda Q)$ est donc aussi non nulle.

> Conséquence du théorème de d'Alembert.

Donc il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\det\left(R+\lambda_0 Q\right) \neq 0$; par suite $R+\lambda_0 Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On a donc :

$$\begin{cases} A\left(R+\lambda_0 Q\right) = \left(R+\lambda_0 Q\right)B \\ \left(R+\lambda_0 Q\right) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \end{cases}$$

c'est-à-dire que A et B sont semblables dans $\mathbb{R}$.

Ex. 17

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 + I_n = 0$.

Montrer que n est pair et que A est semblable à B avec :

$$B = \begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & C_p \end{pmatrix} \qquad n = 2p$$

où $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $C_k = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour montrer la parité de n, utilisons deux méthodes.

- 1^re^ méthode

Le polynôme X^2+1 est un polynôme annulateur de A. Soit χ le polynôme caractéristique de A, alors $d^\circ \chi = n$ et $\chi \in \mathbb{R}[X]$. Si n est impair, alors χ admet au moins une racine réelle.

C'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction polynôme $\widetilde{\chi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ associée au polynôme χ et $\left(\left(\lim\limits_{+\infty} \widetilde{\chi}\right)\left(\lim\limits_{-\infty} \widetilde{\chi}\right) = -\infty\right)$. Soit λ cette racine réelle, alors λ est valeur propre de A.

Ce qui est en contradiction avec $\mathrm{Sp}\, A \subset \left\{\text{racines réelles de } X^2+1\right\} = \varnothing$, donc n est pair.

- 2^e^ méthode

$\det\left(A^2\right) = \det\left(-I_n\right)$, or $\det\left(A^2\right) = \left(\det A\right)^2$ et $\det\left(-I_n\right) = (-1)^n$, donc $\left(\det A\right)^2 = (-1)^n$; or $\det A \in \mathbb{R}$, donc $\left(\det A\right)^2 \in \mathbb{R}^+$, et par suite n est pair.

La matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ car A n'admet pas de valeur propre réelle, mais considérée comme élément de $\mathcal{M}(\mathbb{C})$, elle est diagonalisable car X^2+1 est un polynôme annulateur de A, scindé et à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.

Les valeurs propres de A sont i et $-i$ de même ordre de multiplicité p avec $n = 2p$ car le polynôme caractéristique de A est un polynôme à coefficients réels.

Et donc il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que :

$$\begin{pmatrix} i & & & & & & & \\ & i & & & & & & 0 \\ & & i & & & & & \\ 0 & & & i & & & & \\ & & & & -i & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & -i & \\ & & & & & & & -i \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

La matrice B vérifie $B^2 + I_n = 0$ donc est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à la matrice diagonale D en posant :

$$D = \begin{pmatrix} i & & & & & & & \\ & i & & & & & & 0 \\ & & \ddots & & & & & \\ 0 & & & i & & & & \\ & & & & -i & & & \\ & & & & & -i & & \\ & & & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & & & -i \end{pmatrix}$$

Il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $D = Q^{-1}BQ$.

A et B sont semblables à D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

A et B sont donc semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et, d'après l'exercice précédent, elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex. 18

On considère n complexes non nuls $a_1, a_2, \dots, a_n$ deux à deux distincts et la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & & a_j & & a_n \\ a_1 & 0 & & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ddots & \vdots & & a_n \\ \vdots & \vdots & & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & & a_j & & 0 \end{pmatrix}$$

$\left(a_{ij} = 0 \text{ si } i = j,\ a_{ij} = a_j \text{ si } i \neq j\right)$, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

1) Montrer que les valeurs propres de A vérifient l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\lambda + a_k} = +1.$$

2) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$; $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \lambda_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

3) On suppose, dans cette question, $0 < a_n < a_{n-1} < \dots < a_2 < a_1$. A est-elle diagonalisable ?

1) Soit χ le polynôme caractéristique de A :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \chi(x) = \det\left(A - xI_n\right).$$

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ X(-a_j) = \begin{vmatrix} a_j & a_2 & & a_j & & a_n \\ a_1 & a_j & & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ddots & \vdots & & a_n \\ \vdots & \vdots & & a_j & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & & a_j & & a_j \end{vmatrix}$$

$$= a_j \begin{vmatrix} a_j & a_2 & & 1 & & a_n \\ a_1 & a_j & & 1 & & a_n \\ a_1 & a_2 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & & \underbrace{}_{j^e \text{ colonne}} & & a_j \end{vmatrix}$$

On ne modifie pas ce déterminant en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres.

$\forall k \in [\![1,n]\!] \setminus \{j\},\ C_k \leftarrow C_k - a_k C_j.$

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ X(-a_j) = a_j \underbrace{\begin{vmatrix} +a_j - a_1 & 0 & & 0 & \overbrace{1}^{j^e \text{ colonne}} & 0 \\ 0 & +a_j - a_2 & & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & & +a_j - a_k & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & +a_j - a_n \end{vmatrix}}_{n}$$

en développant selon la j^e ligne, on obtient :

$$X(-a_j) = (-1)^{n-1} a_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{k=n} (-a_j + a_k).$$

Or, en posant $Q(x) = \prod_{k=1}^{n} (x + a_k)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$Q'(-a_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}} (-a_j + a_k).$$

En effet, $Q(x) = \prod_{k=1}^{n} (x + a_k)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors :

$$Q'(x) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}} (x + a_k) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$(x+a_j)$ intervient dans $(n-1)$ termes de cette somme donc :

$$Q'(-a_j) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} (-a_j + a_k).$$

Avec cette nouvelle notation, on obtient :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ \chi(-a_j) = (-1)^{n-1} a_j Q'(-a_j).$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\lambda + a_k}$ est la valeur en $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ de la fonction rationnelle $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x + a_k}$ qui «fait» penser à une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle dont le dénominateur est $Q(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_k,\ k \in [\![1,n]\!]\}$, étudions $\dfrac{\chi(x)}{Q(x)}$.

Le degré de χ et de Q est égal à n. χ a pour coefficient dominant $(-1)^n$. Q est unitaire.

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $-a_k$ n'est pas racine de χ d'après la relation :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \chi(-a_k) = (-1)^{n-1} a_k Q'(-a_k).$$

En effet, $a_k \neq 0$ et $-a_k$ est racine simple de Q, donc $\chi(-a_k) \neq 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

Il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\dfrac{\chi(x)}{Q(x)} = (-1)^n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{x + a_k}$, et $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \alpha_k = \dfrac{\chi(-a_k)}{Q'(-a_k)}$.

Car, à nouveau, les complexes a_k, $k \in [\![1,n]\!]$, sont deux à deux distincts par hypothèse, donc les racines du polynôme Q sont simples et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $Q'(-a_k) \neq 0$.

Donc, d'après le résultat obtenu plus haut :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \alpha_k = (-1)^{n-1} a_k$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{a_k,\ k \in [\![1,n]\!]\},\ \frac{\chi(x)}{Q(x)} = (-1)^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1} a_k}{x + a_k}.$$

Or λ est valeur propre de A si et seulement si $\chi(\lambda) = 0$, donc λ est valeur propre de A si et seulement si :

$$(-1)^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1} a_k}{\lambda + a_k} = 0.$$

Par suite, λ est valeur propre de A si et seulement si :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\lambda + a_k} = 1.$$

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \mathrm{Tr}(A) = 0.$

$\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \lambda_k = \det A = \chi(0) = Q(0)\left[(-1)^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1} a_k}{a_k}\right]$, or $Q(0) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k$, donc :

$$\chi(0) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left((-1)^n + n(-1)^{n-1}\right) = (-1)^{n-1}(n-1)\prod_{k=1}^{n} a_k$$

on obtient alors :

$$\prod_{k=1}^{n} \lambda_k = (-1)^{n-1}(n-1)\prod_{k=1}^{n} a_k.$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = \operatorname{Tr}\left(A^2\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k(S-a_k) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \quad \text{en posant } S = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$= \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} a_i a_j$$

3) En supposant $0 < a_n < a_{n-1} < \dots < a_k < a_{k-1} < \dots < a_1$, la fonction :

$$f \,:\, x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x+a_k}$$

est C^1 sur les intervalles $I_k = \left]-a_{k-1}, -a_k\right[$ pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $I_1 = \left]-\infty, -a_1\right[$, $I_{n+1} = \left]-a_n, +\infty\right[$.

De plus, pour tout $x \in I_k$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{-a_k}{(x+a_k)^2} < 0$, donc f est strictement décroissante sur I_k pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ avec $f(I_1) = \left]-\infty, 0\right[$, $f(I_k) = \mathbb{R}$ pour $k \in [\![2, n]\!]$ et $f(I_{n+1}) = \left]0, +\infty\right[$.
En appliquant le théorème des fonctions réciproques à chaque restriction $f_{|I_k}$, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, il existe λ_k unique dans I_k tel que $f(\lambda_k) = 1$.
On obtient ainsi n valeurs propres deux à deux distinctes et A est diagonalisable.

> Il s'agit bien sûr d'une condition suffisante de diagonalisabilité.

Ex. 19

$n \in \mathbb{N}^*$.
v est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
v_0 est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
v_1 est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $T_n \,:\, v_0 \to v,\ F \mapsto F_n$ où $F_n \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{n}{x^n}\displaystyle\int_0^x t^{n-1}F(t)\mathrm{d}t \\ F_n(0) = F(0) \end{cases}$

1) Montrer que T_n est linéaire, puis que $T_n \in \mathcal{L}(v_0)$.
Soit $U_n = T_{n|v_1}$; montrer que $U_n \in \mathcal{L}(v_1)$.

2) T_n (resp. U_n) est-elle injective ? surjective ?

3) Déterminer les éléments propres de U_n et T_n.

1) La linéarité de T_n est une conséquence immédiate de la linéarité de l'intégration.

> Pour montrer que $T_n \in \mathcal{L}(v_0)$, il faut montrer que F_n est continue sur $\mathbb{R}$. La seule difficulté provient de la continuité de F_n en 0.

- Étude de la continuité de F_n en 0.

$$F_n(x) - F_n(0) = \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}F(t)\mathrm{d}t - F(0) = \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}\left(F(t) - F(0)\right)\mathrm{d}t$$

$$\text{car}\quad \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}\mathrm{d}t = +1$$

$$|F_n(x) - F_n(0)| \leqslant \frac{n}{x^n}\left|\int_0^x t^{n-1}\,|F(t) - F(0)|\,\mathrm{d}t\right|$$

or F est continue en 0 :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left(|x| < \eta \ \Rightarrow\ |F(x) - F(0)| < \varepsilon\right)$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |t| \leqslant |x| < \eta \ \Rightarrow\ |F(t) - F(0)| < \varepsilon$$

puis :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| < \eta \ \Rightarrow\ |F_n(x) - F_n(0)| < \varepsilon.$$

On vient donc de montrer la continuité de F_n en 0, on en déduit que $F_n \in v_0$, donc $T_n \in \mathcal{L}(v_0)$.

> On peut remarquer que F_n est dérivable sur chacun des intervalles $I = \left]0, +\infty\right[$ ou $\left]-\infty, 0\right[$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
>
> $$\begin{aligned} F_n'(x) &= -\frac{n^2}{x^{n+1}}\int_0^x t^{n-1}F(t)\mathrm{d}t + \frac{n}{x^n}\left(x^{n-1}F(x)\right) \\ &= \frac{n}{x}\left(-\frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}F(t)\mathrm{d}t + F(x)\right) \\ &= \frac{n}{x}\left(F(x) - F_n(x)\right). \end{aligned}$$
>
> Ainsi, si $F \in v_0$ alors $F_n \in v_0$ et, de plus, F_n est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$.

- Soit $F \in v_1$ alors F_n' est continue sur $\mathbb{R}^*$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$F_n'(x) = \frac{n}{x}\left(F(x) - F_n(x)\right).$$

Montrons que F_n est dérivable en 0.

Soit $G\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto F(x) - F(0) - x\,F'(0)$, alors $G(x) = o(x)$ car F est dérivable en 0 :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \eta \in \mathbb{R}_+^*\ /\ \left(|x| < \eta \ \Rightarrow\ |G(x)| < \varepsilon\,|x|\right).$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(|x| < \eta \ \Rightarrow\ |T_n(G)(x)| \leqslant \varepsilon\frac{n}{n+1}\,|x| \leqslant \varepsilon\,|x|\right)$$

or :

$$T_n(G)(x) = \begin{cases} F_n(x) - F(0) - \dfrac{n}{n+1}x\,F'(0) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et $F_n(0) = F(0)$; ainsi :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left(|x| < \eta \ \Rightarrow\ \left|F_n(x) - F_n(0) - \frac{n}{n+1}xF'(0)\right| \leqslant \varepsilon\,|x|\right.$$

donc F_n admet un développement limité à l'ordre un en 0, ce qui est équivalent à :

$$F_n \text{ est dérivable en 0 et } F_n'(0) = \frac{n}{n+1}F'(0).$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}
F_n'(x) &= \frac{n}{x}\big(F(x) - F_n(x)\big) \\
&= \frac{n}{x}\Big(\big(F(x) - F(0)\big) + \big(F(0) - F_n(x)\big)\Big) \\
&= n\left(\frac{F(x) - F(0)}{x} - \frac{F_n(x) - F_n(0)}{x}\right) \quad \text{car } F_n(0) = F(0).
\end{aligned}$$

Or F est dérivable en 0 par hypothèse ; on vient de montrer que F_n est dérivable en 0 donc :

$$\lim_0 \frac{F(x) - F(0)}{x} = F'(0) \quad , \quad \lim_0 \frac{F_n(x) - F_n(0)}{x} = F_n'(0)$$

donc F_n' admet une limite en 0 et on a :

$$\begin{aligned}
\lim_0 F_n' &= n\big(F'(0) - F_n'(0)\big) \\
&= n\left(F'(0) - \frac{n}{n+1}F'(0)\right) = \frac{n}{n+1}F'(0) \\
&= F_n'(0)
\end{aligned}$$

donc F_n' est continue en 0 ; puis F_n' est continue sur $\mathbb{R}$, donc F_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Par suite, $U_n \in \mathcal{L}(\nu_1)$.

> Il peut être utile de revoir le théorème de dérivabilité et fonctions de classe C^1, conséquence du théorème de l'inégalité des accroissements finis, bien qu'il ne soit pas utilisé ici.

2) • T_n est-elle injective ?

Étudions $\operatorname{Ker} T_n$. Si $F \in \operatorname{Ker} T_n$ alors $F \in \nu_0$ et $T_n(F) = 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \big(T_n(F)\big)'(x) = \frac{n}{x}\big(F(x) - F_n(x)\big)$$

donc $F(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, or F est continue sur $\mathbb{R}$ et donc $F = 0$ et $\operatorname{Ker} T_n = \{0\}$. On en déduit l'injectivité de T_n.

• T_n est-elle surjective ?

Si $F \in \nu_0$ alors $T_n(F) = F_n \in \nu_0$ et F_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, or la fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x-1|$ est un élément de ν_0 et n'est pas dérivable en 1, donc :

$$\forall F \in \nu_0, T_n(F) \neq G.$$

T_n n'est pas surjective.

• U_n est-elle injective ?

$\operatorname{Ker} U_n = \big(\operatorname{Ker} T_n\big) \cap \nu_1 = \{0\}$, donc U_n est injective.

• U_n est-elle surjective ?

Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x-1)|x-1|$. G est élément de ν_1.

S'il existe $F \in \nu_1$ telle que $U_n(F) = G$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, G'(x) = \frac{n}{x}\big(F(x) - G(x)\big)$$

et donc G' est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Or $G' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2|x-1|$ n'est pas dérivable en 1, ainsi : $\forall F \in \nu_1, U_n(F) \neq G$, et U_n n'est pas surjective.

3) Éléments propres de T_n, de U_n

> T_n et U_n étant injectives, 0 n'est pas valeur propre de T_n (resp. de U_n), donc, dans ce qui suit, nous allons rechercher les valeurs propres α non nulles.

a) F est un vecteur propre de T_n attaché à la valeur propre α si et seulement si :

$$\begin{cases} F \in \mathcal{V}_0 \setminus \{0\} \\ T_n(F) = \alpha F \end{cases}$$

donc F est solution sur I (qui est l'un des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, +\infty[$) de l'équation différentielle $(\mathscr{E})$:

$$\alpha y' = \frac{n}{x}(y - \alpha y) \iff \alpha x y' + n(\alpha - 1)y = 0. \qquad (\mathscr{E})$$

> Car pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
>
> $$\big(T_n(F)\big)'(x) = \frac{n}{x}\big(F(x) - T_n(F)(x)\big);$$
>
> $$\alpha F'(x) = \frac{n}{x}\big(F(x) - \alpha F(x)\big).$$

Comme l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$ sur I est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension un, g est solution sur I si et seulement si :

$$\exists C_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \left]-\infty, 0\right[, \quad g(x) = C_1 |x|^{n\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)};$$

$$\exists C_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \left]0, +\infty\right[, \quad g(x) = C_2 |x|^{n\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)}.$$

Or F est continue sur $\mathbb{R}$, il est donc nécessaire que :

$$n\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \geqslant 0.$$

Si $\alpha = 1$, alors $C_1 = C_2 = C$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto C$.
Si $\alpha \in \left]0, 1\right[$, alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F = 0 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F(0) = F(0)$ et :

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} C_1 |x|^\beta & \text{si } x \in \left[0, +\infty\right[\\ C_2 |x|^\beta & \text{si } x \in \left[-\infty, 0\right[\end{cases}$$

où on a posé $\beta = n\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right) \iff \alpha = \dfrac{n}{n+\beta}$.

F est un vecteur propre de T_n si et seulement si :

- ou bien il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$, $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, tels que $F(x) = \begin{cases} C_1 x^\beta & \text{si } x \in \left[0, +\infty\right[\\ C_2 |x|^\beta & \text{si } x \in \left]-\infty, 0\right[\end{cases}$ et la valeur propre correspondante est $\alpha = \dfrac{n}{n+\beta}$;
- ou bien $C_1 = C_2$, $\beta = 0$, $F(x) = C$ et la valeur propre correspondante est $\alpha = 1$.

b) F est un vecteur propre de U_n si et seulement si F est de plus dérivable sur $\mathbb{R}$, donc F est un vecteur propre de U_n si et seulement si :

- ou bien il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\beta \in \left]1, +\infty\right[$ tels que $F(x) = \begin{cases} C_1 x^\beta & \text{si } x \in \left[0, +\infty\right[\\ C_2 |x|^\beta & \text{si } x \in \left]-\infty, 0\right[\end{cases}$ (valeur propre correspondante $\alpha = \dfrac{n}{n+\beta}$) ;
- ou bien il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = Cx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ex. 20

A est une matrice réelle non scalaire, de taille $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, vérifiant $A^3 + A^2 - I_n = 0$.

1) Montrer que $\det A > 0$.

2) A est-elle diagonalisable dans :

a) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

b) $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Le polynôme $X^3 + X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A.

La fonction $f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 + x^2 - 1$ admet pour dérivée $f' \ : \ x \mapsto 3x^2 + 2x$, et pour tableau de variation :

x	$-\infty$		$-2/3$		0		$+\infty$
Signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{23}{27}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Il convient ici d'étudier les racines de $X^3 + X^2 - 1$ pour «obtenir» des renseignements sur les valeurs propres de A, puis son polynôme caractéristique : en effet, si λ est valeur propre de A, alors λ est racine du polynôme annulateur $X^3 + X^2 - 1$.

$\forall x \in \left]-\infty, 0\right], f(x) < 0$, donc f n'admet pas de racines réelles sur $\left]-\infty, 0\right]$.

Par application du théorème des valeurs intermédiaires à f continue, f admet une racine réelle α sur $\left]0, +\infty\right[$. Cette racine est unique d'après la stricte monotonie de f sur $\mathbb{R}^+$.

La fonction f étant une fonction polynôme à coefficients réels, de degré 3, les deux autres racines de f sont complexes conjuguées.

Les racines de $X^3 + X^2 - 1$ sont donc simples : une unique racine réelle $\alpha > 0$, et deux racines complexes : β et $\overline{\beta}$ simples.

Toute valeur propre de A est une racine de $X^3 + X^2 - 1$.

$\operatorname{Sp} A \subset \{\alpha, \beta, \overline{\beta}\}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Soit χ le polynôme caractéristique de A ; alors χ admet pour racines :

β d'ordre de multiplicité $m \in \mathbb{N}$

$\overline{\beta}$ d'ordre de multiplicité m

β et $\overline{\beta}$ ont le même ordre de multiplicité car χ est à coefficients réels, A étant une matrice à coefficients réels.

α d'ordre de multiplicité $q \in \mathbb{N}$

donc :

$$\chi(X) = (-1)^n (X - \alpha)^q (X - \beta)^m \left(X - \overline{\beta}\right)^m.$$

m peut être nul, de même q mais m et q sont liés par la relation $2m + q = n$.

Or $\chi(0) = \det A = \beta^m \overline{\beta}^m \alpha^q = \underbrace{(\beta\overline{\beta})^m}_{\in \mathbb{R}_+^*} \underbrace{\alpha^q}_{\in \mathbb{R}_+^*}$ car $\alpha > 0$, et $\beta\overline{\beta} = |\beta|^2 \in \mathbb{R}_+^*$ car $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, donc :

$$\det A > 0.$$

2) a) Le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si $m = 0$ et alors :

$$\chi_n(X) = (-1)^n (X - \alpha)^n.$$

Si A est diagonalisable, alors A est semblable à $A = \begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ & & \alpha \end{pmatrix}$ donc $A = \alpha I_n$.

> Une condition nécessaire de diagonalisibilité de A est que le polynôme caractéristique de A soit scindé. Ce n'est bien sûr pas une condition suffisante.

Or, par hypothèse, A n'est pas scalaire donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Le polynôme $X^3 + X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A scindé dans $\mathbb{C}[X]$, à racines simples, donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Ex. 21

Les équations suivantes admettent-elles des solutions ? Si oui, lesquelles.

1) $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $Y^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors A est nilpotente d'indice 3 ; en effet :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

S'il existe $X \in \mathcal{M}_3(K)$ tel que $X^2 = A$, alors $X^6 = A^3$ donc $X^6 = 0$, ainsi X est nilpotente.

> On peut rappeler le résultat suivant.
> $M \in \mathcal{M}_n(K)$, $(n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$, est nilpotente (c'est-à-dire il existe $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ tel que $M^p = 0$) si et seulement si $M^n = 0$.

Donc $X^3 = 0$ ce qui entraine $X^4 = 0$. Or $X^4 = A^2 \neq 0$; nous aboutissons à une contradiction ; et par suite $X^2 = A$ n'a pas de solution.

2) Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Sp}(B) = \{1, 2, 3\}$; $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et admet trois valeurs propres deux à deux distinctes donc est diagonalisable.

Il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P^{-1} B P.$$

> P est la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

S'il existe $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $Y^2 = B$, alors Y et B commutent.

> En effet, $YB = Y \cdot Y^2 = Y^3 = Y^2 \cdot Y = BY$.

Et Y est diagonalisable dans la base de vecteurs propres de B.

> En effet, soit $W \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de B, alors il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$:
> $$\begin{cases} BW = \lambda W \\ W \neq 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \underbrace{Y(BW)}_{=(BY)W \text{ car } B \text{ et } Y \text{ commutent}} = \lambda YW$$
> Donc $B(YW) = \lambda(YW)$, par suite :
> $$YW \in \mathrm{Ker}\left(B - \lambda I_3\right) = \mathbb{R}W$$
> et il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $YW = \mu W$ (avec toujours $W \neq 0$) donc pour tout vecteur propre W de B, W est également vecteur propre de Y.

Ainsi, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P^{-1}YP = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}}_{=\Delta}$

et
$$Y^2 = B \iff \Delta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \iff \Delta \in \mathscr{E}$$

où :

$\mathscr{E} = \big\{\mathrm{diag}\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right), \mathrm{diag}\left(1, -\sqrt{2}, \sqrt{3}\right), \mathrm{diag}\left(1, \sqrt{2}, -\sqrt{3}\right), \mathrm{diag}\left(-1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right),$
$\mathrm{diag}\left(-1, -\sqrt{2}, \sqrt{3}\right), \mathrm{diag}\left(-1, \sqrt{2}, -\sqrt{3}\right), \mathrm{diag}\left(1, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}\right),$
$\mathrm{diag}\left(-1, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}\right)\big\}$

Finalement :
$$Y^2 = B \iff Y = P\,\Delta\,P^{-1} \text{ où } \Delta \in \mathscr{E}.$$

Ex. 22

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1) Déterminer les éléments propres de B en fonction de ceux de A.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit diagonalisable.

$\forall Z \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}), \exists!(X, Y) \in \left(\mathcal{M}_{n,1}(K)\right)^2 / Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.

Si Z est un vecteur propre de B, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\begin{cases} BZ = \lambda Z \\ Z \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} Y = \lambda X \\ AX = \lambda Y \\ Z \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} Y = \lambda X \\ AX = \lambda^2 X \\ Z \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} AX = \lambda^2 X \\ X \neq 0 \\ Y = \lambda X \end{cases}$$

Ainsi X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda^2 \in \mathbb{R}^+$.

Réciproquement, soit X un vecteur propre de A associé à une valeur propre positive μ de A et $\lambda \in \left\{-\sqrt{\mu}, +\sqrt{\mu}\right\}$, alors :
$$Z = \begin{pmatrix} X \\ \lambda X \end{pmatrix}$$
est un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ.

Remarque. $X \neq 0$ car c'est un vecteur propre de A, donc Z est non nul.

On obtient donc les sous-espaces propres de la matrice B en fonction de ceux de A.

1) Si 0 est valeur propre de A, alors 0 est aussi valeur propre de B et :

$$\operatorname{Ker} B = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}, X \in \operatorname{Ker} A \right\}.$$

Remarque. $\operatorname{Ker} B$ et $\operatorname{Ker} A$ sont isomorphes.

2) Si μ est une valeur propre strictement positive de A, alors $\lambda \in \left\{ \sqrt{\mu}, -\sqrt{\mu} \right\}$ est valeur propre de B :

$$\operatorname{Ker}\left(B - \sqrt{\mu} I_{2n}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ \sqrt{\mu} X \end{pmatrix}, X \in \operatorname{Ker}\left(A - \mu I_n\right) \right\}$$

$$\operatorname{Ker}\left(B + \sqrt{\mu} I_{2n}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ -\sqrt{\mu} X \end{pmatrix}, X \in \operatorname{Ker}\left(A - \mu I_n\right) \right\}$$

et l'application $\operatorname{Ker}\left(A - \varepsilon\sqrt{\mu} I_n\right) \to \operatorname{Ker}\left(B - \mu I_{2n}\right), X \mapsto \begin{pmatrix} X \\ \varepsilon\sqrt{\mu} X \end{pmatrix}$, où $\varepsilon \in \left\{ -1, 1 \right\}$, est un isomorphisme.

$$\begin{aligned} \dim \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} B} \operatorname{Ker}\left(B - \lambda I_{2n}\right) &= \dim \left(\operatorname{Ker} B \bigoplus_{\substack{\mu \in \operatorname{Sp} A \\ \mu > 0}} \left(\operatorname{Ker}\left(B - \sqrt{\mu} I_{2n}\right) \bigoplus \operatorname{Ker}\left(B + \sqrt{\mu} I_{2n}\right) \right) \right) \\ &= \dim \operatorname{Ker} A + 2 \sum_{\substack{\mu \in \operatorname{Sp} A \\ \mu > 0}} \dim \operatorname{Ker}\left(A - \mu I_n\right) \\ &= \dim \bigoplus_{\substack{\mu \in \operatorname{Sp} A \\ \mu \geqslant 0}} \operatorname{Ker}\left(A - \mu I_n\right) + \dim \bigoplus_{\substack{\mu \in \operatorname{Sp} A \\ \mu > 0}} \operatorname{Ker}\left(A - \mu I_n\right) \end{aligned}$$

Si A est diagonalisable et a toutes ses valeurs propres strictement positives, alors :

$$\dim \bigoplus_{\substack{\mu \in \operatorname{Sp} A \\ \mu \geqslant 0}} \operatorname{Ker}\left(A - \mu I_n\right) + \dim \bigoplus_{\substack{\mu \in \operatorname{Sp} A \\ \mu > 0}} \operatorname{Ker}\left(A - \mu I_n\right) = 2 \dim \bigoplus_{\mu \in \operatorname{Sp} A} \operatorname{Ker}\left(A - \mu I_n\right) = 2n.$$

Donc B est diagonalisable.

Si A n'est pas diagonalisable ou admet une valeur propre $\mu \in \mathbb{R}^-$, alors :

$$\dim \bigoplus_{\substack{\mu \in \operatorname{Sp} A \\ \mu > 0}} \operatorname{Ker}\left(A - \mu I_n\right) < n \ ; \ \dim \bigoplus_{\substack{\mu \in \operatorname{Sp} A \\ \mu \geqslant 0}} \operatorname{Ker}\left(A - \mu I_n\right) \leqslant n$$

donc :

$$\dim \bigoplus_{\substack{\mu \in \operatorname{Sp} A \\ \mu > 0}} \operatorname{Ker}\left(A - \mu I_n\right) + \dim \bigoplus_{\substack{\mu \in \operatorname{Sp} A \\ \mu \geqslant 0}} \operatorname{Ker}\left(A - \mu I_n\right) < 2n.$$

Et, par suite, B n'est pas diagonalisable.

Finalement, B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et a toutes valeurs propres strictement positives.

Remarque. Avec l'hypothèse :

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$$

on obtient B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible.

Ⓒ Réduction triangulaire ou diagonale

Ex. 23

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la matrice par blocs $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit :

1) trigonalisable ;

2) diagonalisable.

Soit la matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et son polynôme caractéristique :

$$\chi_B(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2.$$

B est trigonalisable et non diagonalisable.

Soit $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, alors :

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

> À partir de ces résultats sur la matrice B, par analogie nous allons mener des calculs sur M. (B est un cas très particulier de matrice M avec $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $A = (1)$.)

En remarquant que :

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$

et en posant $P_1 = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$, on a :

$$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Formons alors :

$$M_1 = P_1^{-1}MP_1 .$$

> Comme plus haut, nous avons «formé» $P^{-1}BP$.

Alors :

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1) M est trigonalisable si et seulement si M_1 est trigonalisable.

> Car M et M_1 sont semblables.

Or M_1 est trigonalisable si et seulement si A est trigonalisable, donc M est trigonalisable si et seulement si A est trigonalisable.

2) D'abord M est diagonalisable si et seulement si M_1 est diagonalisable.

> Car M et M_1 sont semblables.

D'où une recherche de condition nécessaire et suffisante de diagonalisation de la matrice M_1, donc de M.

(i) Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ canoniquement associé à la matrice M_1 ; $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n})$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$ et $E = \text{Vect}\,(e_1, \dots, e_n)$, E est stable par u et la restriction de u à E induit un endomorphisme u_1 de E dont la matrice dans la base $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ est A.

Si u est diagnalisable alors u_1 est diagonalisable.

> C'est du cours. En effet, si u est diagonalisable, il existe un polynôme annulateur de u (donc de M_1), scindé à racines simples. Ce même polynôme est annulateur de u_1 (donc de A) et est (toujours) à racines simples et scindé donc u_1 est diagonalisable, c'est-à-dire A est diagonalisable.

On obtient alors la condition nécessaire : pour que M soit diagonalisable, il faut que A soit diagonalisable.

(ii) Réciproquement, soit A diagonalisable.

$$\exists Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ et } D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \,/\, Q^{-1}AQ = D.$$

> 1) Notation : $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n, à coefficients réels et diagonales.
>
> 2) Par analogie, formons $Q_1^{-1}M_1Q_1$ où :
>
> $$Q_1 = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in \text{GL}_{2n}(\mathbb{R}).$$

D'une part, $\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} = I_{2n}$ donc $Q_1^{-1} = \begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$.

D'autre part, $Q_1^{-1}M_1Q_1 = \begin{pmatrix} D & -2D \\ 0 & D \end{pmatrix} = \Delta$.

Donc M_1 et Δ sont semblables.

> On peut remarquer que $\text{Sp}\,(M_1) = \text{Sp}\,\Delta = \text{Sp}(A)$ et que, si λ est valeur propre de multiplicité $m(\lambda)$ de A, alors c'est aussi une valeur propre de M_1 (donc de M) d'ordre de multiplicité $2m(\lambda)$.

$$\Delta = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
\lambda_1 & & & & & & -2\lambda_1 & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & \lambda_1 & 0 & & & & & -2\lambda_1 & & 0 & \\
 & & & \lambda_2 & 0 & & & & & -2\lambda_2 & & \\
 & & 0 & & \ddots & & & 0 & & & \ddots & \\
 & & & & & \lambda_p & & & & & & -2\lambda_p \\
\hline
 & & & & & & \lambda_1 & & & & & \\
 & & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & 0 & & & & & & \lambda_1 & & 0 & \\
 & & & & & & & 0 & & \lambda_2 & & \\
 & & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & & \lambda_p
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}n \\
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}n
\end{array}$$

Ainsi M_1 est diagonalisable si et seulement si :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(A),\ 2m(\lambda) = \dim \text{Ker}\,(M_1 - \lambda I_{2n}).$$

Étudions, plus précisément, λ_1.

$\Delta - \lambda_1 I_{2n} =$

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccccc}
0 & & & & & -2\lambda_1 & & & & & \\
 & 0 & & & & & \ddots & & & & \\
 & & \ddots & & & & & -2\lambda_1 & & & \\
 & & & \lambda_2 - \lambda_1 & & & & & -2\lambda_2 & & \\
 & & & & \ddots & & & & & \ddots & \\
 & & & & \lambda_p - \lambda_1 & & & & & & -2\lambda_p \\
\hline
 & & & & & 0 & & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & 0 & & & \\
 & & 0 & & & & & & \lambda_2 - \lambda_1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & \lambda_p - \lambda_1
\end{array}\right)$$

Si $\lambda_1 \neq 0$, $\operatorname{rg}\left(\Delta - \lambda_1 I_{2n}\right) = 2n - m(\lambda_1)$;

si $\lambda_1 = 0$, $\operatorname{rg}\left(\Delta - \lambda_1 I_{2n}\right) = 2n - 2m(\lambda_1) = 2\big(n - m(\lambda_1)\big)$.

C'est-à-dire :

si $\lambda_1 \neq 0$, $\dim \operatorname{Ker}\left(M - \lambda_1 I_{2n}\right) = m(\lambda_1)$;

si $\lambda_1 = 0$, $\dim \operatorname{Ker}\left(M - \lambda_1 I_{2n}\right) = 2m(\lambda_1)$.

> Ceci par application du théorème du rang aux endomorphismes :
> $$\left(u_1 - \lambda_1 \operatorname{Id}_E\right) \in \mathcal{L}(E) \quad \text{et} \quad \left(u - \lambda_1 \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^{2n}}\right) \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{2n}\right).$$

En généralisant ce raisonnement à tout $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$, on obtient donc :

$$\forall \lambda \in \operatorname{Sp}(A),\ \dim \operatorname{Ker}\left(M - \lambda I_{2n}\right) = 2m(\lambda) \text{ si et seulement si } \lambda = 0.$$

On obtient ainsi, A étant diagonalisable, M est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

En conclusion, M est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

Ex. 24

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A^2 est triangulaire supérieure, de diagonale $(1, 2, \ldots, n)$. Montrer que A est triangulaire supérieure.

> Il est immédiat que A est diagonalisable : il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que
> $$A = PDP^{-1} \quad \text{avec } D \text{ diagonale}$$
> donc :
> $$A^2 = PD^2P^{-1}.$$
> Pour conclure au fait que A est triangulaire supérieure, il suffit donc de montrer que P l'est.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note f_M l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé, c'est-à-dire tel que $\operatorname{mat}_{(e_i)} f_M = M$ où (e_i) est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$f_A^2 = f_{A^2}$ admet n valeurs propres simples, donc est diagonalisable et chaque sous-espace propre est une droite.

Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f_A^2 :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f_A^2(v_i) = i\, v_i.$$

Puisque $f_A^2 \circ f_A = f_A \circ f_A^2 = f_A^3$, chaque sous-espace propre de f_A^2 est stable par f_A donc chaque droite $\mathbb{R}v_i$ est stable par f_A et v_i est vecteur propre de f_A. Ainsi, avec $P = \underset{(e_i)}{\text{mat}}\, v_i$ on a simultanément :

$$P^{-1}AP = \text{diag}(1, 2, \ldots, n) \quad \text{et} \quad P^{-1}AP = D$$

où D est une diagonale telle que $D^2 = \text{diag}(1, 2, \ldots, n)$, c'est-à-dire :

$$D = \text{diag}\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2\sqrt{2}, \ldots, \varepsilon_n\sqrt{n}\right) \quad \text{où chaque } \varepsilon_i \in \{-1, 1\}.$$

On remarque maintenant que P est triangulaire supérieure, ce qui revient à dire que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ v_k \in \text{Vect}\left(e_1, \ldots, e_k\right) \quad \text{soit aussi} \quad \text{Ker}\left(f_{A^2} - k\,\text{Id}_{\mathbb{R}^n}\right) \subset \text{Vect}\left(e_1, \ldots, e_k\right).$$

Une première solution s'obtient en écrivant le système qui définit, dans la base (e_i), le sous-espace propre $\text{Ker}\left(f_{A^2} - k\,\text{Id}_{\mathbb{R}^n}\right)$.

En posant :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & b_{ij} \\ & & \ddots & \\ (0) & & & n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

les $n - k$ dernières équations du système $\left(A^2 - kI_n\right)X = 0$ sont en effet :

$$\begin{cases} x_{k+1} + b_{k+1,k+2}x_{k+2} + \cdots + b_{k+1,n}x_n = 0 \\ \qquad 2x_{k+2} + b_{k+2,k+3}x_{k+3} + \cdots + b_{k+2,n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad (n-k)x_n = 0 \end{cases}$$

ce qui donne, en cascade, $x_n = x_{n-1} = \cdots = x_{k+1} = 0$ et donc :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \text{Vect}\left(e_1, \ldots, e_k\right).$$

Pour une autre solution, on observe que, puisque A^2 est triangulaire supérieure, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $F_k = \text{Vect}\left(e_1, \ldots, e_k\right)$ est stable par f_{A^2} qui induit donc un endomorphisme $\widetilde{f_{A^2}}$ de F_k. Alors, la matrice, dans la base $\left(e_1, \ldots, e_k\right)$ de $\widetilde{f_{A^2}}$ est, avec les notations précédentes :

$$\underset{(e_1, \ldots, e_k)}{\text{mat}} \widetilde{f_{A^2}} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & b_{ij} \\ & & \ddots & \\ (0) & & & k \end{pmatrix}$$

donc k est valeur propre de $\widetilde{f_{A^2}}$, ce qui donne $\text{Ker}\left(\widetilde{f_{A^2}} - k\,\text{Id}_{F_k}\right) \neq \{0\}$. Sachant que :

$$\text{Ker}\left(\widetilde{f_{A^2}} - k\,\text{Id}_{F_k}\right) = F_k \cap \text{Ker}\left(f_{A^2} - k\,\text{Id}_{\mathbb{R}^n}\right)$$

et que $\text{Ker}\left(f_{A^2} - k\,\text{Id}_{\mathbb{R}^n}\right)$ est une droite vectorielle, la condition $\text{Ker}\left(\widetilde{f_{A^2}} - k\,\text{Id}_{F_k}\right) \neq \{0\}$ donne :

$$\text{Ker}\left(f_{A^2} - k\,\text{Id}_{\mathbb{R}^n}\right) \subset F_k.$$

> Nous venons là d'utiliser que si D est une droite vectorielle et F un sous-espace quelconque, deux situations sont possibles : $D \subset F$ ou $D \cap F = \{0\}$ et donc $D \cap F \neq \{0\} \Rightarrow D \subset F$.

Notons enfin que P triangulaire supérieure donne P^{-1} triangulaire supérieure. En effet, on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ F_k = \text{Vect}\left(e_1, \ldots, e_k\right) = \text{Vect}\left(v_1, \ldots, v_k\right)$$

et la condition $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $e_k \in \text{Vect}\left(v_1, \ldots, v_k\right)$ donne que P^{-1} est triangulaire supérieure.

En conclusion, A est triangulaire supérieure puisqu'elle se présente sous la forme d'un produit de trois matrices de ce type : $A = PDP^{-1}$.

Ex. 25

Soit :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & & & \\ a_2 & 0 & \ddots & (0) & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ a_n & 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

où les a_i sont des réels positifs, a_1 et a_n l'étant strictement.

1) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice M et prouver qu'elle admet une valeur propre strictement positive et une seule.

2) Montrer que si r est la valeur propre strictement positive de M, alors :

$$r < 1 + \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i .$$

3) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $p \geqslant p_0$, M^p est à termes strictement positifs. (On pourra écrire M sous la forme $A + N$.)

1) Il s'agit d'une question très classique puisqu'à une permutation près des colonnes, M est la matrice compagnon de $(a_1, \ldots, a_n)$.

On a ici $\chi_M(X) = \det(M - XI_n) = \begin{vmatrix} a_1 - X & 1 & & & \\ a_2 & -X & 1 & (0) & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 \\ a_n & & & & -X \end{vmatrix}$, soit aussi :

$\chi_M(X) = \det(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ où $L_1, \ldots, L_n$ désignent les lignes de $M - XI_n$.

En opérant les transformations élémentaires successives symbolisées par $L_i \leftarrow L_i + XL_{i-1}$, $i = 2, 3, \ldots, n$, on obtient :

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} a_1 - X & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ a_2 + a_1X - X^2 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ a_3 + a_2X + a_1X^2 - X^3 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 1 \\ a_n + a_{n-1}X + \cdots + a_1X^{n-1} - X^n & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

puis en développant par rapport à la dernière ligne :

$$\chi_M(X) = (-1)^n \left(X^n - \sum_{k=1}^{n} a_k X^{n-k} \right).$$

Il est également possible de procéder par récurrence : en posant $D_n = \det(M - XI_n)$, le développement par rapport à la dernière ligne donne $D_n = -XD_{n-1} - (-1)^n a_n$, puis à partir de $D_1 = a_1 - X$, $D_2 = X^2 - a_1X - a_2$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$D_n = (-1)^n (X^n - a_1X^{n-1} - a_{n-1}X - a_n).$$

Par hypothèse, on a $a_n \neq 0$ donc $\chi_M(0) \neq 0$ et 0 n'est pas valeur propre de M. On en déduit :

$$\text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_M(\lambda) = 0 \iff 1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda^i}.$$

Les a_i étant positifs, et deux d'entre eux étant non nuls, la fonction $\varphi\ :\ x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x^i}$ est continue, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$; elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\varphi\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \mathbb{R}_+^*$. Ceci prouve l'existence d'un unique $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\varphi(\lambda) = 1$, soit aussi tel que $\chi_M(\lambda) = 0$.

2) Posons $s = \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i$; $s \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question précédente, la fonction φ étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ on a $r < 1 + s \iff f(r) > f(1+s)$, donc :

$$r < 1 + s \iff f(1+s) < 1.$$

Formons $f(1+s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(1+s)^k}$. Par définition de s, on obtient :

$$f(1+s) \leqslant s \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+s)^k} < s \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+s)^k} \quad \text{donc} \quad f(1+s) < \frac{s}{1+s} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{1+s}}$$

c'est-à-dire $f(1+s) < 1$ et la conclusion s'ensuit.

3) Il faut se laisser guider par l'énoncé qui nous suggère d'introduire la matrice nilpotente

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \text{ et donc } A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \\ a_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Il va cependant falloir prendre garde au fait que A et N n'étant pas permutables, une puissance $(A+N)^k$ ne s'obtient pas avec la formule du binôme. En posant $P_1 = A$ et $P_2 = N$, une telle puissance s'écrit :

$$(A+N)^k = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k) \in [\![1,2]\!]^k} P_{i_1} P_{i_2} \cdots P_{i_k}.$$

Enfin, il est utile de remarquer que puisque A et N ne comportent que des termes positifs ou nuls, il en est de même pour tout produit $P_{i_1} P_{i_2} \cdots P_{i_k}$. En conséquence, pour s'assurer que la matrice $(A+N)^k$ a un élément strictement positif en position (i, j), il suffit de vérifier qu'il en est ainsi pour l'un des produits $P_{i_1} P_{i_2} \cdots P_{i_k}$.

Avec les matrices A et N précisées dans la remarque précédente, on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall j \in [\![0, n-1]\!],\quad A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & \dots\dots & 0 \\ a_1^{k-1} a_2 & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \\ a_1^{k-1} a_n & 0 & \dots\dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^j = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix}}_{j \text{ colonnes}} & \begin{matrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \\ & (0) & \\ & & \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^kN^j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & a_1^{k-1}a_2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \underbrace{a_1^{k-1}a_n}_{(j+1)^e \text{ colonne}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^{n-i}A^kN^j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1^{k-1}a_{n-i+1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_1^{k-1}a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \underbrace{0}_{(j+1)^e \text{ colonne}} & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\} n-i \text{ colonnes}$$

En conséquence, pour $p \geqslant 2n$ et pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, le développement de $(A+N)^p$ contient le produit $N^{n-i}A^{p-n+i-j+1}N^{j-1}$ dont l'élément de position (i, j) est $a_1^{p-n+i-j}a_n > 0$. Le coefficient de même position de tous les autres produits étant $\geqslant 0$, on en déduit que le terme de position (i, j) de $(A+N)^p$ est strictement positif.

Ainsi, pour $p \geqslant 2n$, tous les termes de M^p sont strictement positifs.

Ex. 26

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$.

1) Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.

2) Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables.

1) Il est bon d'éliminer les cas triviaux où l'une ou l'autre des deux matrices est nulle. On pensera ensuite à la localisation des vecteurs propres d'un endomorphisme f : ceux-ci sont dans le noyau ou dans l'image de f.

Plus précisément, si $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, 0 est valeur propre et tout $x \in \operatorname{Ker} f \setminus \{0\}$ est vecteur propre ; tout autre vecteur propre, associé à une valeur propre non nulle, est dans $\operatorname{Im} f$.

Tout polynôme appartenant à $\mathbb{C}[X]$ étant scindé, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre et donc au moins une droite pointée (c'est-à-dire privée de 0) de vecteurs propres.

Si l'une des deux matrices est nulle, tout vecteur propre de l'autre est commun aux deux. Pour la suite, on se limite donc à $A \neq 0$ et $B \neq 0$, et on peut remarquer que cela impose A et B non inversibles (en effet $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $AB = 0$ donne $B = 0$ qui est exclu et de même $B \in GL_n(\mathbb{C})$ conduit à $A = 0$ qui est exclu).

En notant u et v les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associées à A et B, l'hypothèse $AB = 0$ se lit $u \circ v = 0$ et équivaut donc à $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$.

Si $\operatorname{Im} v$ contient des vecteurs propres de v, le problème est résolu. On est donc amené à envisager deux cas selon que $\operatorname{Sp}(v) = \{0\}$ ou $\operatorname{Sp}(v) \neq \{0\}$ ($\operatorname{Sp}(v)$ désigne le spectre de v).

- Premier cas : $\mathrm{Sp}(v) \neq \{0\}$

Il existe λ valeur propre non nulle de v. Alors, si x est un vecteur propre associé, on a :

$$v(x) = \lambda x \quad \text{donc} \quad x = v\left(\frac{x}{\lambda}\right) \in \mathrm{Im}\, v$$

et, puisque $\mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}\, u$, x est également vecteur propre de u (associé à la valeur propre 0).

- Deuxième cas : $\mathrm{Sp}(v) = \{0\}$

Alors $\chi_v(x) = \det(B - XI_n)$ est un polynôme scindé amettant 0 comme seule racine, donc $\chi_v(X) = (-1)^n X^n$ et, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on obtient $v^n = 0$: v est nilpotent. Appelons p l'indice de nilpotence de v : $v^p = 0$, $v^{p-1} \neq 0$; puisque v est non nul, on a $p \geqslant 2$ (donc $2 \leqslant p \leqslant n$).

Sachant que $v^{p-1} \neq 0$, il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $y = v^{p-1}(x) \neq 0$. Alors $v^p = 0$ donne $v(y) = 0$ donc y est vecteur propre de v. D'autre part, avec $p \geqslant 2$, on peut écrire $u(y) = u \circ v\left(v^{p-2}(x)\right)$ et, puisque $u \circ v = 0$, il vient $u(y) = 0$: y est également vecteur propre de u.

2) La question 1) prépare une démonstration par récurrence.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit la propriété

(H_n) : pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(BC)$ telle que $P^{-1}AP = T_A$ et $P^{-1}BP = T_B$ avec T_A et T_B triangulaires supérieures.

(H_1) est évidente.

Supposons (H_{n-1}) vraie et soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$.

D'après le 1), il existe $Q_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$Q_1^{-1}AQ_1 = \begin{pmatrix} \lambda & L_A \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \quad , \quad Q_1^{-1}BQ_1 = \begin{pmatrix} \mu & L_B \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $(A_1, B_1) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})^2$, $(L_A, L_B) \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{C})^2$, $0 \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$.

Q_1 est la matrice de passage de la base canonique à une base dont le premier élément est vecteur propre commun à u et v.

Avec :

$$\begin{pmatrix} \lambda & L_A \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu & L_B \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\mu & \lambda L_B + L_A B_1 \\ 0 & A_1 B_1 \end{pmatrix}$$

la condition $AB = 0$ donne $A_1 B_1 = 0$ donc, d'après (H_{n-1}), il existe $Q_2' \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$ telle que :

$$Q_2'^{-1} A_1 Q_2' = T_A' \quad \text{et} \quad Q_2'^{-1} B_1 Q_2' = T_B'$$

où T_A' et T_B' sont triangulaires supérieures.

Posons $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2' \end{pmatrix}$, on a $Q_2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ avec $Q_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2'^{-1} \end{pmatrix}$, et il vient :

$$Q_2^{-1}\begin{pmatrix} \lambda & L_A \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} Q_2 = \begin{pmatrix} \lambda & L_A' \\ 0 & T_A' \end{pmatrix} \quad , \quad Q_2^{-1}\begin{pmatrix} \mu & L_B \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} Q_2 = \begin{pmatrix} \mu & L_B' \\ 0 & T_B' \end{pmatrix}$$

Il est inutile de préciser les blocs lignes L_A' et L_B'.

Enfin, il reste à poser $P = Q_1 Q_2$ pour obtenir :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & L_A' \\ 0 & T_A' \end{pmatrix} \quad , \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \mu & L_B' \\ 0 & T_B' \end{pmatrix}$$

Ces matrices étant triangulaires supérieures, A et B sont simultanément trigonalisables.

Ainsi, on a montré $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$, donc, puisque (H_1) est vraie, le principe de récurrence donne que (H_n) est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(D) Applications de la réduction

Ex. 27

1) La matrice $A = \begin{pmatrix} 13 & -9 & 45 \\ -3 & 3 & -11 \\ -3 & 2 & -10 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

2) Trouver P inversible telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels à déterminer.

3) Résoudre l'équation $B^2 = A$, $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1) On calcule le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}
\chi_A = \det\left(A - XI_3\right) &= \begin{vmatrix} 13-X & -9 & 45 \\ -3 & 3-X & -11 \\ -3 & 2 & -10-X \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 13-X & -9 & 45 \\ 0 & 1-X & -1+X \\ -3 & 2 & -10-X \end{vmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\
&= (1-X)\begin{vmatrix} 13-X & 36 \\ -3 & -8-X \end{vmatrix} \qquad C_3 \leftarrow C_3 + C_2 \text{ puis développement par rapport à la } 2^{\text{e}} \text{ ligne} \\
&= (1-X)\begin{vmatrix} 1-X & 4-4X \\ -3 & -8-X \end{vmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + 4L_2 \\
&= (1-X)^2(4-X)
\end{aligned}$$

χ_A est donc scindé dans $\mathbb{R}[X]$, les valeurs propres de A sont 4 (simple) et 1 (double).

Pour savoir si A est, ou n'est pas, diagonalisable, on détermine la dimension de $\operatorname{Ker}\left(f_A - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)$ où f_A désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

Sachant que $\dim \operatorname{Ker}\left(f_A - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = 3 - \operatorname{rg}\left(A - I_3\right)$, formons :

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 12 & -9 & 45 \\ -3 & 2 & -11 \\ -3 & 2 & -11 \end{bmatrix}$$

Puisque 1 est valeur propre de A, on sait que $\operatorname{rg}\left(A - I_3\right) \leqslant 2$.

> On peut aussi observer que $A - I_3$ a deux lignes identiques.

D'autre part, les deux premières lignes forment un système libre, donc $\operatorname{rg}\left(A - I_3\right) \geqslant 2$ et finalement $\operatorname{rg}\left(A - I_3\right) = 2$. En conséquence, $\dim \operatorname{Ker}\left(f_A - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = 1$ et puisque 1 est valeur propre double, A n'est pas diagonalisable.

2) La question revient à déterminer une base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$f_A(u_1) = au_1 \quad , \quad f_A(u_2) = bu_2 \quad , \quad f_A(u_3) = bu_3 + cu_2$$

donc u_1 et u_2 sont nécessairement vecteurs propres de f_A associés aux valeurs propres a et b. En observant, de plus, que l'on doit avoir $\chi_A = (a - X)(b - X)^2$, la seule possibilité est $a = 4$ (valeur propre simple), $b = 1$ (valeur propre double).

On pourrait aussi remarquer qu'il est nécessaire que $c \neq 0$ puisque A est non diagonalisable.

Dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$, $\operatorname{Ker}(f_A - 4\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est défini par le système de rang 2 :

$$\begin{cases} -3x - y - 11z = 0 \\ -3x + 2y - 14z = 0 \end{cases} \quad \text{équivalent à} \quad \begin{cases} 3y - 3z = 0 \\ 3x + y + 11z = 0 \end{cases} \quad \text{soit aussi à} \quad \begin{cases} y = z \\ x = -4z \end{cases}$$

On a donc $\operatorname{Ker}(f_A - 4\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \operatorname{Vect} u_1$ avec $u_1 = -4e_1 + e_2 + e_3$.

De même, $\operatorname{Ker}(f_A - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est défini par le système :

$$\begin{cases} 12x - 9y + 45z = 0 \\ -3x + 2y - 11z = 0 \end{cases} \quad \text{équivalent à} \quad \begin{cases} -y + z = 0 \\ -3x + 2y - 11z = 0 \end{cases} \quad \text{soit aussi} \quad \begin{cases} y = z \\ x = -3z \end{cases}$$

et on a $\operatorname{Ker}(f_A - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \operatorname{Vect} u_2$ avec $u_2 = -3e_1 + e_2 + e_3$.

En posant $u_3 = xe_1 + ye_2 + ze_3$, l'équation $f_A(u_3) = u_3 + cu_2$ s'écrit maintenant :

$$\begin{cases} 12x - 9y + 45z = -3c \\ -3x + 2y - 11z = c \end{cases} \quad \text{soit aussi} \quad \begin{cases} x = -3z - c \\ y = z - c \end{cases}$$

En choisissant, par exemple, $z = 0$, $c = 1$, on obtient $u_3 = -e_1 - e_2$, $f_A(u_3) = u_3 + u_2$, et il est facile de vérifier que (u_1, u_2, u_3) est libre car :

$$\det_{(e_i)}(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} -4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Ainsi (u_1, u_2, u_3) est bien une base de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$\operatorname*{mat}_{(u_i)} f_A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On vérifie facilement que pour $c \neq 0$, quel que soit z réel, le vecteur $(-3z - c)e_1 + (z - c)e_2 + ze_3$ forme, avec u_1, u_2, un système libre.

Avec le choix qui a été fait, il vient :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad P = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) En notant g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'équation se lit :

$$g^2 = f_A$$

Quatre remarques fondamentales vont nous permettre de simplifier cette étude.

1) Si $g^2 = f_A$ alors $g \circ f_A = f_A \circ g \; (= g^3)$.

2) Si g permute avec f_A alors g permute avec tout polynôme en f_A.

3) Si deux endomorphismes permutent, le noyau de l'un est stable par l'autre (c'est également vrai pour l'image) et de même pour les sous-espaces propres de l'un.

4) $\operatorname{Ker}(f_A - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})^2 = \operatorname{Vect}(u_2, u_3)$ ce qui est dû au fait que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.

Commençons par rechercher des conditions nécessaires en utilisant bien sûr la base (u_i). On suppose donc que g vérifie $g^2 = f_A$.

Dans ces conditions, puisque g et f_A permutent, les deux droites vectorielles

$$\mathbb{R}u_1 = \operatorname{Ker}(f_A - 4\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) \text{ et } \mathbb{R}u_2 = \operatorname{Ker}(f_A - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$$

sont stables par g, ce qui donne l'existence de λ et μ réels tels que $g(u_1) = \lambda u_1$, $g(u_2) = \mu u_2$.

D'autre part, avec $\underset{(u_i)}{\mathrm{mat}}(f_A - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient $\underset{(u_i)}{\mathrm{mat}}(f_A - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Vect}\,(u_2, u_3) = \mathrm{Ker}\,(f_A - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2$ et, puisque g permute avec $(f_A - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2$ qui est un polynôme en f_A, on obtient que $\mathrm{Vect}\,(u_2, u_3)$ est stable par g.

En conséquence, $g(u_3) \in \mathrm{Vect}\,(u_2, u_3)$ c'est-à-dire qu'il existe η, ν réels tels que :

$$g(u_3) = \eta u_2 + \nu u_3.$$

Finalement, on a nécessairement $\underset{(u_i)}{\mathrm{mat}}\, g = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \eta \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$.

Alors la condition $g^2 = f_A$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^2 & \eta(\mu+\nu) \\ 0 & 0 & \nu^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soit aussi $\lambda^2 = 4$ $\mu^2 = 1$, $\nu^2 = 1$, $\eta(\mu+\nu) = 1$.

En remarquant que l'équation $\eta(\mu+\nu) = 1$ impose $\mu + \nu \neq 0$, on obtient que le système précédent équivaut à :

$$\lambda = 2\varepsilon_1 \quad , \quad \mu = \nu = \varepsilon_2 \quad , \quad \eta = \frac{\varepsilon_2}{2} \quad \text{avec } \varepsilon_1 = \pm 1, \varepsilon_2 = \pm 2.$$

On en conclut que l'équation $B^2 = A$ a quatre solutions, à savoir :

$$\pm P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{et} \quad \pm P \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

ce qui, tout calcul effectué, donne :

$$\pm \begin{pmatrix} 5 & -5/2 & 29/2 \\ -1 & 3/2 & -7/2 \\ -1 & 1/2 & -5/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \pm \begin{pmatrix} -11 & 27/2 & -99/2 \\ 3 & -5/2 & 25/2 \\ 3 & -7/2 & 27/2 \end{pmatrix}.$$

Ex. 28

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ ($\dim E \in \mathbb{N}^*$).

Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de E de dimension 1 ou 2 stable par u.

> On sait que si λ est une valeur propre de u, alors le sous-espace propre $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda e)$ est stable par u (la restriction de u à $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda e)$ est l'homothétie vectorielle de rapport λ), et donc toutes les droites et les plans de $E_\lambda(u)$ sont stables par u. Il existe donc au moins une droite vectorielle stable par u. Le problème se pose donc lorsque u n'admet pas de valeur propre, ce qui peut avoir lieu car E est un espace vectoriel réel.

E étant un espace vectoriel de dimension finie, il existe au moins un polynôme non nul, annulateur de u. Soit $Q \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ tel que $Q(u) = 0$.

Étudions la décomposition de Q en produit de polynômes irréductibles, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $P_k \in \mathbb{R}[X]$, $d^\circ P_k \in \{1, 2\}$, tel que :

$$P_k = a_k X + b_k \text{ et } a_k \neq 0$$
$$\text{ou} \quad P_k = a_k X^2 + b_k X + c_k \text{ et } b_k - 4a_k c_k < 0.$$

et il existe $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [\![1, q]\!]$ tels que :

$$Q = \prod_{k=1}^{q} P_k^{\alpha_k}.$$

On a alors :

$$\prod_{k=1}^{q} \left(P_k(u)\right)^{\alpha_k} = 0$$

et il existe $k_0 \in [\![1, q]\!]$ tel que $P_{k_0}(u)$ est non injectif.

> Sinon $\forall k \in [\![1, q]\!]$, $P_k(u)$ est injectif, puis :
>
> $$Q(u) = \left(\prod_{k=1}^{q} P_k(u)\right)^{\alpha_k} \in \mathrm{GL}(E)$$
>
> or $Q(u) = 0$...

$P_{k_0}(u)$ étant non injectif, $\operatorname{Ker} P_{k_0}(u) \neq \{0\}$.

Soit $x \in \operatorname{Ker} P_{k_0}(u) \setminus \{0\}$;

Montrons que $F = \operatorname{Vect}(x, u(x))$ est stable par u.

Si $d^\circ P_{k_0} = 1$, $\dim F = 1$.

> En effet F est alors le sous-espace propre de u attaché à la valeur propre $-\dfrac{b_{k_0}}{a_{k_0}}$.
>
> D'après les remarques préliminaires, F est stable par u.

Si $d^\circ P_{k_0} = 2$, $\dim F = 2$.

> En effet, $(x, u(x))$ est libre. Montrons-le.
>
> Si $(x, u(x))$ liée, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \lambda(x)$ car $x \neq 0$.
>
> Donc $u^2(x) = \lambda^2 x$, or $x \in \operatorname{Ker} P_{k_0}(u)$, donc :
>
> $$a_k u^2(x) + b_k u(x) + c_k x = 0$$
>
> c'est-à-dire : $(a_k \lambda^2 + b_k \lambda + c_k)x = 0$ avec $x \neq 0$, ce qui donne :
>
> $$a_k \lambda^2 + b_k \lambda + c_k = 0 \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
>
> en contradiction avec $b_k^2 - 4a_k c_k < 0$.

Soit $y \in F$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y = \lambda x + \mu u(x)$ alors :

$$u(y) = \lambda u(x) + \mu u^2(x).$$

Or $u^2(x) = -\dfrac{b_k}{a_k} u(x) - \dfrac{c_k}{a_k} x \in F$, ainsi $u(y) \in F$, ceci pour tout $y \in F$ et F est stable par u.

> On peut remarquer que $a_k \neq 0$ car $b_k^2 - 4a_k c_k < 0$.

F est donc un sous-espace vectoriel de E de dimension 1 ou 2 stable par u.

Ex. 29

E est un espace vectoriel réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Soit (P) la propriété :
«tout sous-espace vectoriel F de E stable par u admet un supplémentaire stable par u».

1) Montrer que si u est diagonalisable, alors u vérifie la propriété (P).

2) Si u vérifie (P), u est-il diagonalisable ?

3) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant (P). Soit E' un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que $u_{|E'}$ vérifie aussi la propriété (P).

4) Montrer que si u vérifie (P), alors E est somme directe de sous-espaces vectoriels de dimension 1 ou 2, stables par u.

5) Donner un exemple d'endomorphisme ne vérifiant pas (P).

> Si $\dim E = 1$, alors on peut remarquer que la propriété est vraie pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$. On peut supposer $n \geq 2$ dans tout le problème.

1)

> Bien sûr, si $F = \{0\}$ alors E est un supplémentaire de F (c'est le seul) dans E, et E est stable par u...
> Étudions donc le cas où $F \neq \{0\}$.

Soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors $u_F \in \mathcal{L}(F)$, endomorphisme de F induit par $u_{|F}$, est diagonalisable car u est diagonalisable.

> C'est un résultat du cours ; en effet, u étant diagonalisable, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$, annulateur de u, scindé et à racines simples. Ce même polynôme P est annulateur de u_F donc u_F est diagonalisable, d'après les propriétés caractéristiques des endomorphismes diagonalisables.

Soit B_F une base de F formée de vecteurs propres de u_F (donc de vecteurs propres de u) et soit B_E une base de E de vecteurs propres de u.
On peut compléter la famille libre B_F de E par des vecteurs de B_E (appelons la famille correspondante B') pour obtenir une base B'_E de E ; $B'_E = B_F \cup B'$.

> Par application du théorème de «la base incomplète».

Soit $F' = \text{Vect}\, B'$, alors F' est stable par u et $E = F \oplus F'$.

> B' est une famille de vecteurs propres de u, donc tout vecteur x de B' vérifie :
> $$u(x) = \lambda x \quad \text{où } \lambda \in \text{Sp}(u),$$
> puis tout vecteur de F' a son image dans F'.

2) Soit $n = 2$, $\beta = (e_1, e_2)$ une base de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$, telle que :
$$M_\beta(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$
$(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, $a^2 + b^2 = +1$.

> u est une rotation vectorielle en considérant que E est euclidien et que (e_1, e_2) est une base orthonormale.

Les seuls sous-espaces vectoriels de E, stables par u, sont $\{0\}$ et E, donc tout sous-espace vectoriel de E, stable par u, admet un supplémentaire stable par u ; ainsi u vérifie la propriété (P) ; cependant, u n'est pas diagonalisable.

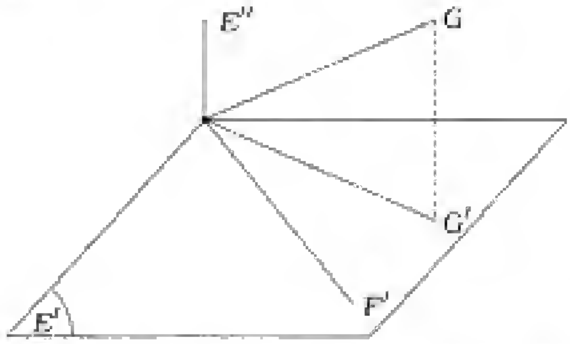
3) Soit E' un sous-espace vectoriel de E, stable par u.

$$E' \neq \{0\}.$$

Soit F' un sous-espace vectoriel de E', stable par $u' = u_{E'}$ endomorphisme de E' induit par u.

> On peut remarquer que $u' \in \mathcal{L}(E')$. Il s'agit donc de montrer que F' admet un supplémentaire dans E', stable par u'.

E' admet, par hypothèse, un supplémentaire dans E, stable par u ; soit E'' ce supplémentaire : $E = E' \oplus E''$.

> Résumons la «situation» :
>
> 
>

$F' \oplus E''$ est un sous-espace vectoriel de E, stable par u, donc admet un supplémentaire G, dans E, stable par u :

$$E = G \oplus (F' \oplus E'') = G \oplus F' \oplus E''.$$

> Nous allons montrer qu'un projeté «bien choisi» de G sur E' est un supplémentaire de F' dans E', stable par u' et répond à la question.

Soit π la projection sur E' dans la direction E'', $E'' = \operatorname{Ker} \pi$ et $E' = \operatorname{Im} \pi$.
Comme $E = (G \oplus F') \oplus E''$, π réalise un isomorphisme de $G \oplus F'$ sur E'.

> Il s'agit, bien sûr, du théorème fondamental dont on déduit le théorème du rang.

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ une base de G, $(e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_q)$ une base de F'.
$(e_1, e_2, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_q)$ est une base de $G \oplus F'$ donc :

$$\big(\pi(e_1), \dots, \pi(e_r), \pi(e_{r+1}), \dots, \pi(e_q)\big)$$

est une base de E'. Or, pour tout $i \in [\![r+1, q]\!]$, $\pi(e_i) = e_i$ car $F' \subset E' = \operatorname{Im} \pi = \operatorname{Ker}(\pi - \mathrm{Id}_E)$, ainsi $(\pi(e_1), \dots, \pi(e_r), e_{r+1}, \dots, e_q)$ est une base de E'.

Soit $G' = \pi(G)$, alors $G' = \operatorname{Vect}\big(\pi(e_1), \dots, \pi(e_r)\big)$, et G' est un supplémentaire de F' dans E'.

Montrons que G' est stable par u'.

$$\forall y \in G', \exists x \in G \ / \ y = \pi(x) \text{ et } (y - x) \in E'' = \operatorname{Ker} \pi.$$

Or E'' est stable par u, donc $u(y-x) \in E''$, on obtient alors :

$$u(y-x) = u(y) - u(x) \text{ et } \pi\big(u(y) - u(x)\big) = 0,$$

et enfin :

$$\pi\big(u(y)\big) = \pi\big(u(x)\big)$$

avec $u(y) \in E'$, car $y \in G' \subset E'$ et E' stable par u, et $u(x) \in G$ car $x \in G$ est stable par u.
Ainsi $\pi\big(u(y)\big) = u(y)$ et donc $u(y) = \pi\big(u(x)\big) \in \pi(G) = G'$.

On vient de montrer que, pour tout $y \in G'$, $u(y) \in G'$; ainsi G' est stable par u donc par u', puis $u_{G'}$ vérifie (P).

4) Étant donné le résultat qui vient d'être montré, on va procéder, ici, par récurrence.

(i) Si $\dim E \in \{1, 2\}$, alors E est stable par u et la propriété est vérifiée.

(ii) Hypothèse de récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, la propriété est vraie pour tout espace vectoriel de dimension inférieure ou égal à n.
Considérons un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n+1$. Soit E un tel espace et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant (P).
D'après l'exercice précédent, il existe un sous-espace vectoriel de E de dimension un ou deux, stable par u ; soit E' ce sous-espace vectoriel et E'' un supplémentaire de E' dans E stable par u.

Il en existe car u vérifie la propriété (P).

Alors $\dim E'' \in \{n-1, n\}$, et, d'après l'hypothèse de récurrence, E'' est somme directe de sous-espace vectoriel de dimension 1 ou 2 stables par u :

$$E'' = \bigoplus_{i=1}^{q} E_i \qquad \dim E_i \in \{1, 2\}$$

$$\text{et} \quad E = E' \bigoplus \left(\bigoplus_{i=1}^{q} E_i\right) \qquad \text{avec } \dim E' \in \{1, 2\}$$

La propriété est donc vraie pour $n+1$.

(iii) On en déduit, d'après le principe de récurrence, que tout espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 1, vérifiant (P), est somme directe de sous-espaces vectoriels de dimension 1 ou 2, stables par u.

5) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$M_\beta(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

0 est valeur propre triple de u et $\operatorname{Ker} u = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$.

Il n'existe pas de sous-espace vectoriel de E, supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E et stable par u ; en effet, si $E = \operatorname{Ker} u \oplus E'$, avec E' stable par u, alors $\dim E' = 1$ et $u_{E'}$ est une homothétie vectorielle de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ et donc λ est valeur propre de u. Par suite $\lambda = 0$, puis $E' \subset \operatorname{Ker} u$, en contradiction avec ce qui précède.

Ex. 30

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ diagonalisable. Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes.

(i) il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\big(v, f(v), \ldots, f^{(n-1)}(v)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^n$;

(ii) f admet n valeurs propres deux à deux distinctes.

On peut remarquer que si f admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors f est diagonalisable ; la réciproque est, bien sûr, fausse.
L'hypothèse f diagonalisable est donc certainement indispensable pour montrer que (i) entraîne (ii).

> En effet, soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme nilpotent d'indice n (c'est-à-dire $g^{n-1} \neq 0$ et $g^n = 0$), alors, pour tout $v \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Ker} g^{n-1}$, $\left(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, alors que g admet 0 pour unique valeur propre.

Pour montrer que (i) entraîne (ii), faisons tout de suite intervenir l'hypothèse f diagonalisable. Soit donc $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une base de vecteurs propres de f et $v \in \mathbb{R}^n$ telle que $\left(v, f(v), f^2(v), \ldots, f^{n-1}(v)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ (qui existe d'après l'hypothèse).

Il existe $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$v = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k$$

et pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, $f^j(v) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \lambda_k^j v_k$ où, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, λ_k est la valeur propre attachée au vecteur propre v_k.

$$\det_{\mathcal{B}}\left(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\right) = \begin{vmatrix} x_1 & \lambda_1 x_1 & \ldots & \lambda_1^j x_1 & \ldots & \lambda_1^{n-1} x_1 \\ x_2 & \lambda_2 x_2 & & \lambda_2^j x_2 & \ldots & \lambda_2^{n-1} x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_k & \lambda_k x_k & & \lambda_k^j x_k & \ldots & \lambda_k^{n-1} x_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n & \lambda_n x_n & & \lambda_n^j x_n & & \lambda_n^{n-1} x_n \end{vmatrix}$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots\ldots & \vdots\ldots & \lambda_k^j & \ldots\vdots \\ 1 & \lambda_k & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

> On reconnait un déterminant de Vandermonde attaché aux n réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Donc $\det_{\mathcal{B}}\left(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\right) = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k\right) \displaystyle\prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j)$.

Or $\left(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, donc :

$$\det_{\mathcal{B}}\left(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\right) \neq 0$$

ce qui entraîne :

$$\prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0.$$

Ainsi :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \left(i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j\right).$$

Les n valeurs propres de f sont donc deux à deux distinctes.

Réciproquement, si les n valeurs propres de f sont deux à deux distinctes, alors f est diagonalisable et soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ de vecteurs propres de f et :

$$v = \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

Alors :

$$\det_B\left(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\right) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^j & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_2^j & \ldots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \ldots & \lambda_n^j & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

or $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$ donc $\det_B\left(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\right) \neq 0$ et, par suite, $\left(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Ex. 31

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B} = \left(e_1, e_2, e_3\right)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ admettant pour matrice dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si $x \in E$, on note $E(x) = \operatorname{Vect}\left(f^k(x), k \in \mathbb{N}\right)$.

Trouver les vecteurs x de E tels que $E(x) \neq E$.

On peut remarquer que si une droite vectorielle $\mathbb{R}x$ est stable par f, alors :

$$\operatorname{Vect}\left(x, f(x), f^2(x)\right) = \mathbb{R}x \neq E.$$

Donc si x est vecteur propre de f, alors $E(x) \neq E$.

De façon analogue, si P est un plan de E stable par f, alors pour tout x de P :

$$\operatorname{Vect}\left(x, f(x), f^2(x)\right) \subset P.$$

Donc $E(x) \neq E$.

Nous n'allons pas, a priori, chercher les plans de E stables par f, mais étudier les droites de E stables par f.

Cherchons les éléments propres de f.

Le polynôme caractéristique de f est :

$$-X^3 + 3X^2 + 4X - 12 = -(X-2)(X+2)(X-3).$$

On a donc $\operatorname{Sp}(f) = \{2, -2, 3\}$.

Admettant trois valeurs propres simples, f est diagonalisable, les sous-espaces propres de f sont des droites vectorielles :

$$\operatorname{Ker}\left(f - 2\operatorname{Id}_E\right) = \operatorname{Vect}\left(-6e_1 - e_2 + e_3\right)$$
$$\operatorname{Ker}\left(f + 2\operatorname{Id}_E\right) = \operatorname{Vect}\left(6e_1 - 5e_2 + e_3\right)$$
$$\operatorname{Ker}\left(f - 3\operatorname{Id}_E\right) = \operatorname{Vect}\left(-4e_1 + e_3\right)$$

Posons :

$$e_1' = -6e_1 - e_2 + e_3$$
$$e_2' = 6e_1 - 5e_2 + e_3$$
$$e_3' = -4e_1 + e_3$$

$\mathcal{B}' = \left(e_1', e_2', e_3'\right)$ est une base de vecteurs propres de E.

Peu importe les valeurs numériques choisies pour e_1', e_2', e_3' ; l'important est de travailler dans une base de vecteurs propres de E.

Pour tout $x \in E$, il existe un unique triplet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$x = \alpha_1 e_1' + \alpha_2 e_2' + \alpha_3 e_3'$$

alors :

$$f(x) = 2\,\alpha_1\, e_1' - 2\,\alpha_2\, e_2' + 3\,\alpha_3\, e_3'$$

$$f^2(x) = 4\,\alpha_1\, e_1' + 4\,\alpha_2\, e_2' + 9\,\alpha_3\, e_3'$$

$$\det_{\mathcal{B}'}\left(x, f(x), f^2(x)\right) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_1 & 4\alpha_1 \\ \alpha_2 & -2\alpha_2 & 4\alpha_2 \\ \alpha_3 & 3\alpha_3 & 9\alpha_3 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -20\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 .$$

> On peut aussi remarquer que :
>
> $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix}$$
>
> $$= \text{Vandermonde}\left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right)$$
>
> les λ_1, λ_2, λ_3 étant deux à deux distincts, le déterminant est non nul.

Ainsi $\left(x, f(x), f^2(x)\right)$ est une base de E si et seulement si $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 \neq 0$, donc si $E(x) \neq E$, on a nécessairement $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 = 0$. D'autre part, il est évident que cette condition est suffisante.
Par suite, les vecteurs x de E tels que $E(x) \neq E$ sont les vecteurs de :

$$\left(\mathrm{Ker}\left(f - 2\,\mathrm{Id}_E\right) \oplus \mathrm{Ker}\left(f + 2\,\mathrm{Id}_E\right)\right) \cup \left(\mathrm{Ker}\left(f + 2\,\mathrm{Id}_E\right) \oplus \mathrm{Ker}\left(f - 3\,\mathrm{Id}_E\right)\right)$$
$$\cup \left(\mathrm{Ker}\left(f - 3\,\mathrm{Id}_E\right) \oplus \mathrm{Ker}\left(f - 2\,\mathrm{Id}_E\right)\right).$$

> On peut maintenant remarquer que l'on a ainsi «retrouvé» les trois droites sous-espaces propres et les plans stables de E par f.

Ex. 32

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $3A^3 = A^2 + A + I_n$. Montrer que la suite $\left(A^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice de projection.

> Le polynôme $3X^3 - X^2 - X - 1$, annulateur de A, est simplement scindé dans $\mathbb{C}[X]$. On considère donc $\left(A^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ en tant que suite d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Dans $\mathbb{C}[X]$, on a :

$$3X^3 - X^2 - X - 1 = (X-1)(3X^2 + 2X + 1)$$

$$= 3(X-1)(X-a)(X-\overline{a}) \quad \text{où on a posé } a = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{3}.$$

En conséquence, $P = 3X^3 - X^2 - X - 1$ est simplement scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et A qui admet P comme polynôme annulateur est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $\mathrm{Sp}(A) \subset \left\{1, a, \overline{a}\right\}$.
Sachant que A est réelle, les possibilités pour le spectre de A sont :

1) $\mathrm{Sp}(A) = \left\{1\right\}$;
2) $\mathrm{Sp}(A) = \left\{a, \overline{a}\right\}$;
3) $\mathrm{Sp}(A) = \left\{1, a, \overline{a}\right\}$:

et lorsque a est valeur propre, $\overline{a}$ l'est aussi avec la même multiplicité.

Selon le cas, la diagonalisation de A s'écrit, avec $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$:

1) $Q^{-1}AQ = I_n$;

2) $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \alpha I_q & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} I_q \end{pmatrix}$ $\quad 2q = n$;

3) $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & \alpha I_q & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\alpha} I_q \end{pmatrix}$ $\quad p + 2q = n$.

- Premier cas : $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$

Alors $A = I_n$, donc $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est constante égale à I_n et converge donc vers I_n.

- Deuxième cas : $\mathrm{Sp}(A) = \{\alpha, \overline{\alpha}\}$

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = Q\begin{pmatrix} \alpha^k I_q & 0 \\ 0 & \overline{\alpha}^k I_q \end{pmatrix} Q^{-1}$.

En remarquant que $|\alpha| = |\overline{\alpha}| = \dfrac{1}{\sqrt{3}} < 1$, on obtient $\lim\limits_{k \to +\infty} \alpha^k = \lim\limits_{k \to +\infty} \overline{\alpha}^k = 0$ donc $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = 0$.

- Troisième cas : $\mathrm{Sp}(A) = \{1, \alpha, \overline{\alpha}\}$

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = Q\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^k I_q & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\alpha}^k I_q \end{pmatrix} Q^{-1}$ et on obtient :

$$\lim_{k \to +\infty} A^k = Q\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Dans chacun des trois cas on a bien montré que $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice de projection.

Les projecteurs concernés sont :

- l'identité lorsque $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$;
- l'endomorphisme nul lorsque $\mathrm{Sp}(A) = \{\alpha, \overline{\alpha}\}$;
- la projection sur $\mathrm{Ker}\,(A - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(A - \alpha\,\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(A - \overline{\alpha}\,\mathrm{Id})$ lorsque $\mathrm{Sp}(A) = \{1, \alpha, \overline{\alpha}\}$.

Ex. 33

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \neq 0$, montrer l'équivalence entre les propositions (1) et (2).

(1) $A^2 = 0$;

(2) A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $2r \leqslant n$.

En termes d'endomorphisme, cela revient à montrer que $f^2 = 0$ équivaut à l'existence d'une base $\mathcal{B}$ telle que :

$$\operatorname*{mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

E étant un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n rapporté à une base (e_i), soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname*{mat}_{(e_i)} f = A$.

1) Montrons (2) $\Rightarrow$ (1)

A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ signifie qu'il existe une base (u_i) de E telle que :

$$\operatorname*{mat}_{(u_i)} f = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$f(u_i) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n - r$$

$$\text{et} \qquad f(u_i) = u_{i-n+r} \quad \text{pour} \quad n - r + 1 \leqslant i \leqslant n$$

$$\text{donc} \qquad f^2(u_i) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n - r$$

et, en remarquant que $2r \leqslant n$ donne $r \leqslant n - r$ et donc $i - n + r \leqslant r \leqslant n - r$, on obtient aussi $f^2(u_i) = 0$ pour $n - r + 1 \leqslant i \leqslant n$.

Il en résulte $f^2 = 0$ donc $A^2 = 0$.

2) Montrons (1) $\Rightarrow$ (2)

- *Analyse*

S'il existe une base (u_i) telle que $\operatorname*{mat}_{(u_i)} f = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors :

- $(u_1, \ldots, u_{n-r})$ est une base de $\operatorname{Ker} f$;
- $(u_{n-r+1}, \ldots, u_n)$ est une base de F sous-espace supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$;
- $u_1 = f(e_{n-r+1}), \ldots, u_r = f(e_n)$ et $(u_1, \ldots, u_r)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

- *Synthèse*

$f^2 = 0$ donne $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ donc, en posant $r = \operatorname{rg} f$, on obtient $r \leqslant \dim \operatorname{Ker} f$ et, d'après le théorème du rang, $r \leqslant n - r$ c'est-à-dire $2r \leqslant n$.

Étant donné F supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ on sait, d'après le cours, que la restriction de f à F induit un isomorphisme f_F de F sur $\operatorname{Im} f$. Sachant que $f \neq 0$, on a $\operatorname{Ker} f \neq E$ donc $F \neq \{0\}$ et il existe $u_{n-r+1}, \ldots, u_n$ formant une base de F ; alors, puisque $f_F \in \operatorname{Isom}(F, \operatorname{Im} f)$, en posant :

$$u_1 = f(u_{n-r+1}), \ldots, u_r = f(u_n)$$

$(u_1, \ldots, u_r)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

Si $r = n - r$, on a $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ et puisque $E = \operatorname{Ker} f \oplus F$, $(u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n)$ est une base de E telle que :

$$\operatorname*{mat}_{(u_i)} f = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $r < n - r$, on a $\operatorname{Im} f \subsetneq \operatorname{Ker} f$, le théorème de la base incomplète donne l'existence de $u_{r+1}, \ldots, u_{n-r}$ tels que $(u_1, \ldots, u_{n-r})$ soit une base de $\operatorname{Ker} f$ et comme ci-dessus, $(u_1, \ldots, u_{n-r}, u_{n-r+1}, \ldots, u_n)$ est une base de E telle que :

$$\operatorname*{mat}_{(u_i)} f = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans chacun de ces cas, on a donc prouvé que A est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ex. 34

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on considère l'équation :
$$M^2 - (\operatorname{Tr} M)M + (\det M)I_n = 0. \quad (E_n)$$
Résoudre (E_2) puis (E_n) avec $n \geqslant 3$.

Notons $S(E_n)$ l'ensemble des solutions de (E_n).

a) $n = 2$

Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, le polynôme caractéristique de M est :
$$\chi_M(X) = X^2 - (\operatorname{Tr} M)X + \det M$$
donc, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a :
$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ M^2 - (\operatorname{Tr} M)M + (\det M)I_n = 0$$
c'est-à-dire que $S(E_2) = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

b) $n = 3$

> On peut commencer par remarquer que, puisque la similitude dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ conserve la trace et le déterminant, si M est solution de E_n alors toute matrice semblable à M l'est également.
>
> On peut aussi noter que le cas des matrices scalaires, c'est-à-dire de la forme λI_n, est assez particulier en ce sens qu'il se ramène immédiatement à l'étude d'une équation dans $\mathbb{C}$.

- Cas particulier : $M \in \mathbb{C}I_n$

$M = \lambda I_n$ appartient à $S(E_n)$ si et seulement si $\lambda^2 - n\,\lambda^2 + \lambda^n = 0$ ce qui donne comme solutions :
$$\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^{n-2} = n-1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lambda = (n-1)^{\frac{1}{n-2}} e^{\frac{2ik\pi}{n-2}} \quad \text{avec } 0 \leqslant k \leqslant n-3.$$
Ainsi $S(E_n)$ contient exactement $n-1$ matrices scalaires, à savoir la matrice nulle et les $n-2$ matrices λI_n où λ est une racine $(n-2)$-ème, complexe, de $n-1$.

Pour la suite, nous écarterons ce cas en nous limitant à la détermination de $S(E_n) \setminus \mathbb{C}I_n$ que nous noterons $S(E_n)^*$.

- Cas général : $M \notin \mathbb{C}I_n$

> On commence bien sûr par la recherche de conditions nécessaires en exploitant le fait que le polynôme $X^2 - (\operatorname{Tr} M)X + \det M$ est annulateur de $M \in S(E_n)$, et les résultats du cours nous amènent naturellement à distinguer deux cas selon que les racines de ce polynôme sont distinctes ou non.

Supposons que $M \in S(E_n)^*$.

Le polynôme $P = X^2 - (\operatorname{Tr} M)X + \det M$ est annulateur de M et il admet des racines distinctes lorsque son discriminant $\Delta = (\operatorname{Tr} M)^2 - 4 \det M$ est non nul. On distingue deux cas.

- Premier cas : $\Delta \neq 0$

Alors, puisqu'elle admet un polynôme annulateur simplement scindé dans $\mathbb{C}[X]$, la matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on a $\operatorname{Sp}(M) \subset \{\lambda, \mu\}$ où λ et μ sont les deux racines de P. Ainsi, il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que :
$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} \lambda I_p & 0 \\ 0 & \mu I_q \end{pmatrix}$$
et, puisque $M \notin \mathbb{C}I_n$, les entiers p et q vérifient $1 \leqslant p \leqslant n-1$, $1 \leqslant q \leqslant n-1$, $p + q = n$.

p et q sont les ordres de multiplicité respectifs des valeurs propres λ et μ. Dans le cas d'une matrice scalaire, on a $\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda\}$, $p = n$, $q = 0$ ou symétriquement $\mathrm{Sp}(M) = \{\mu\}$, $p = 0$, $q = n$, et dans les autres cas $\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda, \mu\}$, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, $1 \leqslant q \leqslant n-1$.

Dans ces conditions, on obtient $\operatorname{Tr} M = p\lambda + q\mu$ et $\det M = \lambda^p \mu^q$ donc, en écrivant que $Q^{-1}MQ$ vérifie (E_n), il vient :

$$\lambda^2 - (p\lambda + q\mu)\lambda + \lambda^p\mu^q = 0 \tag{1}$$

$$\mu^2 - (p\lambda + q\mu)\mu + \lambda^p\mu^q = 0 \tag{2}$$

En retranchant (1) et (2) membre à membre, compte tenu de $\lambda - \mu \neq 0$, on obtient

$$\lambda + \mu - (p\lambda + q\mu) = 0 \tag{3}$$

c'est-à-dire $\lambda(1-p) = \mu(q-1)$.

De même, en effectuant la combinaison linéaire $\mu \cdot (1) - \lambda \cdot (2)$, il vient :

$$\lambda^2\mu - \mu^2\lambda + \lambda^p\mu^q(\mu - \lambda) = 0$$

et donc, puisque $\lambda - \mu \neq 0$,

$$\lambda\mu - \lambda^p\mu^q = 0 \tag{4}$$

Cette équation (4) nous donne $\lambda\mu = 0$ ou $\lambda^{p-1}\mu^{q-1} = 1$.

a) $\lambda\mu = 0$

Comme on peut, sans que cela soit restrictif, supposer avoir nommé les racines λ et μ de P de telle sorte que $|\lambda| \leqslant |\mu|$, on a alors $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$ et l'équation (3) donne $\mu(q-1) = 0$ donc $q = 1$ puis $p = n-1$.

Ainsi, on obtient $M = Q\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}Q^{-1}$ comme solutions possibles dans ce cas de figure.

Notation : 0_{n-1} est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$.

Réciproquement, pour :

$$M = Q\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}Q^{-1}$$

avec $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mu \in \mathbb{C}^*$, on a $\operatorname{Tr} M = \mu$, $\det M = 0$ et :

$$M^2 = Q\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix}Q^{-1}$$

donc $M \in Cl_n$ et M est solution de (E_n) : toutes les matrices de cette forme conviennent.

b) $\lambda\mu \neq 0$

On a alors $p > 1$ et $q > 1$ donc $n = p + q \geqslant 4$ et $2 \leqslant p \leqslant n-2$, $2 \leqslant q \leqslant n-2$.

En effet, en supposant $p = 1$, (3) donne $\mu(q-1) = 0$, donc $q = 1$ puisque $\mu \neq 0$, et ainsi $n = p + q = 2$ ce qui est exclu.

De même $q = 1$ donne $p = 1$ et $n = 2$.

Pour $n = 3$, il n'y a donc pas de solution correspondant à ce cas de figure.

Dans ce cas, l'équation (4) donne $\lambda^{p-1}\mu^{q-1} = 1$. Or, avec $q \neq 1$ et (3), il vient :

$$\mu = \lambda\frac{1-p}{q-1} \quad \text{d'où enfin} \quad \lambda^{p+q-2}\left(\frac{1-p}{q-1}\right)^{q-1} = 1 \quad \text{soit aussi} \quad \lambda^{n-2} = \left(\frac{q-1}{1-p}\right)^{q-1}$$

c'est-à-dire que λ est une racine $(n-2)$-ème, complexe, du réel $\left(\dfrac{q-1}{1-p}\right)^{q-1}$.

$\dfrac{q-1}{1-p}$ étant négatif, il est utile, pour écrire ces racines, de distinguer deux cas suivant la parité de $q-1$.

Pour $q-1$ pair, on a :

$$\left(\frac{q-1}{1-p}\right)^{q-1} = \left(\frac{q-1}{p-1}\right)^{q-1} \in \mathbb{R}_+^*$$

et les racines $(n-2)$-èmes sont les nombres :

$$\left(\frac{q-1}{p-1}\right)^{\frac{q-1}{n-2}} e^{\frac{2ik\pi}{n-2}} \quad , \quad 0 \leqslant k \leqslant n-3$$

Pour $q-1$ impair, on a :

$$\left(\frac{q-1}{1-p}\right)^{q-1} = -\left(\frac{q-1}{p-1}\right)^{q-1} \in \mathbb{R}_-^*$$

et les racines $(n-2)$-èmes sont les nombres :

$$\left(\frac{q-1}{p-1}\right)^{\frac{q-1}{n-2}} e^{\frac{(2k+1)i\pi}{n-2}} \quad , \quad 0 \leqslant k \leqslant n-3.$$

Réciproquement, en supposant $n \geqslant 4$, on considère :

- un entier $p \in [\![2, n-2]\!]$;
- $q = n - p \in [\![2, n-2]\!]$;
- λ une racine $(n-2)$-ème de $\left(\dfrac{q-1}{1-p}\right)^{q-1}$;
- $\mu = \lambda \dfrac{1-p}{q-1}$;
- et $M = Q\begin{pmatrix} \lambda I_p & 0 \\ 0 & \mu I_q \end{pmatrix} Q^{-1}$ avec $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Par définition de μ, on a $\mu(q-1) = \lambda(1-p)$ donc $\lambda + \mu = \lambda p + \mu q \quad (3)$

puis, avec $n-2 = p-1+q-1$, il vient $\lambda^{p-1}\lambda^{q-1} = \left(\dfrac{q-1}{1-p}\right)^{q-1}$ et, puisque :

$$\lambda^{q-1} = \mu^{q-1}\left(\frac{q-1}{1-p}\right)^{q-1}$$

on en déduit $\lambda^{p-1}\mu^{q-1} = 1$ donc $\lambda\mu = \lambda^p\mu^q. \quad (4)$

Les égalités (3) et (4) montrent alors que λ et μ sont racines du polynôme :

$$X^2 - (\lambda p + \mu q)X + \lambda^p\mu^q = X^2 - (\operatorname{Tr} M)X + \det M$$

et donc que $\begin{pmatrix} \lambda I_p & 0 \\ 0 & \mu I_q \end{pmatrix}$ et $M = Q\begin{pmatrix} \lambda I_p & 0 \\ 0 & \mu I_q \end{pmatrix} Q^{-1}$ sont solutions de (E_n).

- Deuxième cas : $\Delta = 0$

La condition $M \in \mathcal{S}(E_n)$ s'écrit alors $\left(M - \dfrac{1}{2}(\operatorname{Tr} M) I_n\right)^2 = 0$.

D'après l'exercice précédent, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $2r \leqslant n$ et $M - \dfrac{1}{2}(\operatorname{Tr} M)I_n$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc M est semblable à :

$$\frac{1}{2}(\operatorname{Tr} M)I_n + \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La similitude conservant la trace, il en résulte $\operatorname{Tr} M = \frac{n}{2} \operatorname{Tr} M$ et, puisque $\frac{n}{2} \neq 1$, on obtient $\operatorname{Tr} M = 0$, donc M est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement : si M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $2r \leqslant n$, on a $\operatorname{Tr} M = 0$, $\det M = 0$ et $M^2 = 0$ donc M est solution de (E_n).

En résumé, les solutions de (E_n) sont :

- la matrice nulle et les matrices scalaires λI_n où λ est racine $(n-2)$-ème de $n-1$;
- les matrices semblables à $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ $\mu \in \mathbb{C}^*$;

> Le cas $\mu = 0$ redonne la matrice nulle déjà considérée.

- pour $n \geqslant 4$, les matrices semblables à $\begin{pmatrix} \lambda I_p & 0 \\ 0 & \mu I_q \end{pmatrix}$ où λ est racine $n-2$-ème de $\left(\frac{q-1}{1-p}\right)^{q-1}$

et $\mu = \lambda \frac{1-p}{q-1}$ avec $2 \leqslant p \leqslant n-2$, $2 \leqslant q \leqslant n-2$, $p+q=n$;

- les matrices semblables à $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $0 < 2r \leqslant n$.

> Le cas $r = 0$ redonne encore la matrice nulle.

Ex. 35

1) Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

a) Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de M.

b) Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})^2$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M^n = \alpha^n A + \beta^n B.$$

c) Préciser la dimension du commutant de M.

2) On pose maintenant :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & (0) & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ n \geqslant 4.$$

Traiter, pour cette matrice M, les mêmes questions a), b), c) que précédemment.

1) a)

> Avant toute chose, on se doit de voir que M est symétrique réelle, donc diagonalisable, et que le rang de M est égal à 2.

Notons f_M l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à M, c'est-à-dire tel que $M = \operatorname{mat}_{(e_i)} f_M$ où (e_i) est la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

En observant que $f_M(e_1) = f_M(e_4) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ et que $f_M(e_2) = f_M(e_3) = e_1 + e_4$, on obtient $\operatorname{Im} f_M = \operatorname{Vect}(e_1 + e_4, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$. D'autre part, ces deux vecteurs $e_1 + e_4$ et $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ forment évidemment un système libre, donc une base de $\operatorname{Im} f_M$, et on a $\operatorname{rg} f_M = 2$ soit aussi $\dim \operatorname{Ker} f_M = 2$ (théorème du rang).

M étant symétrique réelle, elle est diagonalisable et avec $\dim \operatorname{Ker} f_M = 2$, on obtient que 0 est valeur propre d'ordre 2, et il existe une base (u_i) de $\mathbb{R}^4$ telle que :

$$\underset{(u_i)}{\operatorname{mat}} f_M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec ces notations, on a $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Im} f_M \oplus \operatorname{Ker} f_M$, $\operatorname{Im} f_M = \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$, $\operatorname{Ker} f_M = \operatorname{Vect}(u_3, u_4)$ et, en notant $\widetilde{f_M}$ l'endomorphisme de $\operatorname{Im} f_M$ induit par f_M, λ et μ sont les valeurs propres de $\widetilde{f_M}$, u_1 et u_2 étant des vecteurs propres associés.

> Cette observation ramène la détermination des éléments propres manquants à celle des éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de dimension 2.

Une autre base de $\operatorname{Im} f_M$ est (v_1, v_2) avec $v_1 = e_1 + e_4$, $v_2 = e_2 + e_3$ et on forme la matrice de $\widetilde{f_M}$ dans cette base.

Avec :

$$\widetilde{f_M}(v_1) = f_M(v_1) = f_M(e_1) + f_M(e_4) = 2(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = 2(v_1 + v_2),$$

$$\text{et} \quad \widetilde{f_M}(v_2) = f_M(v_2) = f_M(e_2) + f_M(e_3) = 2(e_1 + e_4) = 2v_1,$$

on obtient :

$$\underset{(v_1,v_2)}{\operatorname{mat}} \widetilde{f_M} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit le polynôme caractéristique :

$$\chi_{\widetilde{f_M}} = X^2 - 2x - 4 = (X-1)^2 - 5 = \left(X - 1 - \sqrt{5}\right)\left(X - 1 + \sqrt{5}\right).$$

En conséquence, on a $\chi_{f_M} = X^2\left(X - 1 - \sqrt{5}\right)\left(X - 1 + \sqrt{5}\right)$ et les valeurs propres de M sont 0 (double), $1 + \sqrt{5}$ et $1 - \sqrt{5}$ (simples).

Les sous-espaces propres de $\widetilde{f_M}$ sont définis dans la base (v_1, v_2) par les équations $2x - \lambda y = 0$ avec $\lambda = 1 \pm \sqrt{5}$. Ainsi :

$$\operatorname{Ker}\left(f_M - \left(1 + \sqrt{5}\right)\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^4}\right) = \operatorname{Ker}\left(\widetilde{f_M} - \left(1 + \sqrt{5}\right)\operatorname{Id}_{\operatorname{Im} f_M}\right)$$

$$\left(\text{resp. } \operatorname{Ker}\left(f_M - \left(1 - \sqrt{5}\right)\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^4}\right) = \operatorname{Ker}\left(\widetilde{f_M} - \left(1 - \sqrt{5}\right)\operatorname{Id}_{\operatorname{Im} f_M}\right)\right)$$

est la droite vectorielle engendrée par :

$$u_1 = \left(1 + \sqrt{5}\right)(e_1 + e_4) + 2(e_2 + e_3)$$

$$\left(\text{resp. } u_2 = \left(1 - \sqrt{5}\right)(e_1 + e_4) + 2(e_2 + e_3)\right)$$

D'autre part, avec $f_M(e_1) = f_M(e_4)$ et $f_M(e_2) = f_M(e_3)$, on voit qu'une base du plan vectoriel $\operatorname{Ker} f_M$ est (u_3, u_4) avec $u_3 = e_1 - e_4$, $u_4 = e_2 - e_3$.

En conclusion, en posant :

$$P = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

on obtient l'identité de diagonalisation :

$$P^{-1}MP = \mathrm{diag}\left(1+\sqrt{5}, 1-\sqrt{5}, 0, 0\right) = D.$$

b) Il faut évidemment exploiter la réduction précédente.

Posons $\alpha = 1+\sqrt{5}$, $\beta = 1-\sqrt{5}$, et notons, comme il est d'usage, E_{ij} les matrices élémentaires. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D^n = \mathrm{diag}\left(\alpha^n, \beta^n, 0, 0\right) = \alpha^n E_{11} + \beta^n E_{22}$$

$$\text{donc} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M^n = \alpha^n PE_{11}P^{-1} + \beta^n PE_{22}P^{-1}$$

On peut remarquer que $A = PE_{11}P^{-1}$ est la matrice dans la base (e_i) de la projection sur $\mathrm{Ker}\left(f_M - \alpha\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}\right)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\left(f_M - \beta\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}\right) \oplus \mathrm{Ker}\,f_M$ et de même pour $B = PE_{22}P^{-1}$ en échangeant α et β.

c) La propriété fondamentale à utiliser dans ce genre de question est : si deux endomorphismes permutent, tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.

L'application $\underset{(e_i)}{\mathrm{mat}}$ induit un isomorphisme de $\mathscr{C}\left(f_M\right)$, commutant de f_M, sur $\mathscr{C}(M)$, commutant de M.

En utilisant la base (u_i), puisque les sous-espaces propres de f_M sont $\mathrm{Vect}\left(u_1\right)$, $\mathrm{Vect}\left(u_2\right)$ et $\mathrm{Vect}\left(u_3, u_4\right)$, on obtient, d'après la propriété rappelée ci-dessus :

$$g \in \mathscr{C}\left(f_M\right) \Rightarrow \underset{(u_i)}{\mathrm{mat}}\, g = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & z & t \end{pmatrix}$$

La réciproque est évidente, et on obtient ainsi :

$$\mathscr{C}(D) = \mathrm{Vect}\left(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{44}, E_{43}, E_{34}\right).$$

Il en résulte $\dim \mathscr{C}(D) = 6$ donc, puisque $\mathscr{C}(D)$ est également isomorphe à $\mathscr{C}\left(f_M\right)$:

$$\dim \mathscr{C}(M) = \dim \mathscr{C}\left(f_M\right) = 6.$$

2) a) (e_i) est maintenant la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $M = \underset{(e_i)}{\mathrm{mat}}\, f_M$ est encore symétrique réelle, donc diagonalisable.

Avec :

$$f_M\left(e_1\right) = f_M\left(e_n\right) = \sum_{i=1}^{n} e_i \quad , \quad f_M\left(e_2\right) = f_M\left(e_3\right) = \cdots = f_M\left(e_{n-1}\right) = e_1 + e_n$$

on obtient, comme en 1), que $\mathrm{rg}\, f_M = 2$. Ainsi 0 est valeur propre d'ordre $n-2$, le sous-espace propre associé, $\mathrm{Ker}\, f_M$, étant de dimension $n-2$. Les autres valeurs propres et sous-espaces propres sont ceux de $\widetilde{f_M}$ endormophisme de $\mathrm{Im}\, f_M$ induit par f_M.

Une base de $\mathrm{Im}\, f_M$ est $\left(v_1, v_2\right)$, $v_1 = e_1 + e_n$, $v_2 = \sum_{i=2}^{n-1} e_i$ et on obtient :

$$\underset{(v_1, v_2)}{\mathrm{mat}}\, \widetilde{f_M} = \begin{pmatrix} 2 & n-2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

car $f_M\left(v_1\right) = 2v_1 + 2v_2$ et $f_M\left(v_2\right) = (n-2)v_1$.

Il en résulte :

$$\chi_{\widetilde{f_M}} = X^2 - 2X - 2(n-2) = (X-1)^2 - (2n-3)$$

puis :

$$\chi_{f_M} = \det\left(M - XI_n\right) = (-1)^n X^{n-2}\left(X - 1 - \sqrt{2n-3}\right)\left(X - 1 + \sqrt{2n-3}\right).$$

Ainsi les valeurs propres de f_M (ou M) sont 0, d'ordre $n-2$, $\alpha = 1+\sqrt{2n-3}$ et $\beta = 1-\sqrt{2n-3}$, simples, et les sous-espaces propres associés sont :

$$\operatorname{Ker} f_M \text{ de base } \left(e_1 - e_n\,, e_2 - e_3\,, e_3 - e_4\,, \ldots, e_{n-2} - e_{n-1}\right)$$

et les deux droites vectorielles :

$$\operatorname{Ker}\left(f_M - \alpha \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n}\right) = \operatorname{Vect}\left(\alpha v_1 + 2v_2\right) \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker}\left(f_M - \beta \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n}\right) = \operatorname{Vect}\left(\beta v_1 + 2v_2\right).$$

Donc avec $P = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & -1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 2 & 2 & 0 & \vdots & & & \ddots & -1 \\ \alpha & \beta & -1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix}$, on a enfin :

$$P^{-1}MP = D = \operatorname{diag}(\alpha, \beta, 0, \ldots, 0)$$

b) Comme en 1)b) : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$, avec $A = PE_{11}P^{-1}$, $B = PE_{22}P^{-1}$.

c) Avec les mêmes notations qu'en 1)c) :

$$g \in \mathscr{C}\left(f_M\right) \iff \underset{(u_i)}{\operatorname{mat}}\, g = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & X & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2, X \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{R})$$

et il en résulte $\dim \mathscr{C}(M) = (n-2)^2 + 2$.

Ex. 36

Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & (0) & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On reconnaît une matrice de permutation telle que $A^n = I_n$. Le polynôme $X^n - 1$ est donc annulateur de A et puisqu'il est simplement scindé dans $\mathbb{C}\left[X\right]$, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On sait alors que les valeurs propres de A sont des racines n^e de l'unité mais pour connaître leur multiplicité, nous allons former le polynôme caractéristique de A.

On obtient :

$$\chi_A(\lambda) = \det\left(A - \lambda I_n\right) = \begin{vmatrix} -\lambda & & & & 1 \\ 1 & \ddots & & (0) & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & (0) & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1)^n\left(\lambda^n - 1\right)$$

en développant (par exemple) par rapport à la première ligne.

On voit ainsi que A admet n valeurs propres simples qui sont les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité : ω^k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On retrouve donc que A est diagonalisable et on sait maintenant que les sous-espaces propres sont n droites vectorielles.

Notons $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit f_M l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé, c'est-à-dire tel que $M = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_n} f_M$.

Avec ces notations on obtient :

$$MA = AM \iff f_M \circ f_A = f_A \circ f_M$$

et on en déduit que l'application $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_n}$ induit un isomorphisme de $\mathcal{C}(f_A)$, commutant de f_A, sur $\mathcal{C}(A)$ commutant de A.

> Le laïus précédent n'a d'autre but que d'éviter de confondre une matrice et son endomorphisme canoniquement associé, ce qui est une pratique dangereuse bien que courante.

Notons $\mathcal{U} = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de f_A. Sachant que, lorsque deux endomorphismes permutent, tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre et qu'une droite vectorielle est stable par un endomorphisme si et seulement si elle est dirigée par un vecteur propre de cet endomorphisme, puisque les sous-espaces propres de f_A sont tous des droites vectorielles, on obtient :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ f_M \circ f_A = f_A \circ f_M \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ u_i \text{ est vecteur propre de } f_M$$

soit encore :

$$\mathcal{C}(A) = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ / \ \operatorname{mat}_{\mathcal{U}} f_M = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n),\ (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n \right\}$$

Il en résulte $\dim \mathcal{C}(A) = n$.

> Une façon simple d'achever cette étude consiste à comparer $\mathcal{C}(A)$ et l'espace $\mathbb{C}[A]$ des polynômes en A.

Puisque $A^n = I_n$, on obtient $\mathbb{C}[A] = \operatorname{Vect}(A^k, k \in \mathbb{N}) = \operatorname{Vect}(A^k, 0 \leqslant k \leqslant n-1)$.

> Remarque : cettte propriété est en fait vraie dans le cas général, c'est-à-dire pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est une conséquence du théorème de Cayley-Hamilton.

On se propose maintenant de prouver que le système $(A^k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est libre.

Soit α_k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, n scalaires tels que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0 \quad \text{soit aussi} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f_A^k = 0$$

chaque u_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, étant vecteur propre de f_A associé à la valeur propre $\lambda_j = \omega^j$, on obtient pour tout k, $f_A^k(u_j) = \lambda_j^k u_j$ et donc :

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_j^k = 0.$$

Cette dernière relation met en évidence n racines distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, du polynôme $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ qui est de degré $\leqslant n-1$, il s'agit donc du polynôme nul et on a :

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0.$$

On a ainsi montré que $(A^k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est libre, c'est donc une base de $\mathbb{C}[A]$ et $\dim \mathbb{C}[A] = n$.

Avec $\mathbb{C}[A] \subset \mathscr{C}(A)$, $\dim \mathbb{C}[A] = \dim \mathscr{C}(A) = n$, on conclut enfin à :

$$\mathscr{C}(A) = \mathbb{C}[A] = \operatorname{Vect}\left(I_n, A, \ldots, A^{n-1}\right).$$

Ex. 37

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathscr{M}_n(K) \times \mathscr{M}_n(K)$. On pose $C = AB - BA$; montrer que si C est colinéaire à A alors C est nilpotente.

1) D'abord, si A et B commutent, alors $C = 0$ et C est bien sûr nilpotente.

2) Dans les autres cas, par hypothèse, il existe $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$, tel que $AB - BA = \lambda A$.

> Montrer alors que C est nilpotente est équivalent à montrer que A est nilpotente.
> On est donc amené à étudier A^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Étude de $A^kB - BA^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

> On remarque que :
> $$\begin{aligned} A^2B - BA^2 &= A(BA + \lambda A) - BA^2 \\ &= (AB - BA)A + \lambda A^2 \\ &= 2\lambda A^2 \end{aligned}$$

Montrons alors par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, A^kB - BA^2 = k\lambda A^k.$$

La propriété est amorcée pour $k = +1$.
Supposons la propriété vraie à l'ordre k, $(k \in \mathbb{N}^*)$, on obtient :

$$\begin{aligned} A^{k+1}B - BA^{k+1} &= A^k(BA + \lambda A) - BA^{k+1} \\ &= \left(A^kB - BA^k\right)A + \lambda A^{k+1} \\ &= \lambda k A^k \times A + \lambda A^{k+1} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \lambda(k+1)A^{k+1} \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.
D'après le principe de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, A^kB - BA^k = k\lambda A^k.$$

3)

> Pour démontrer que C est nilpotente, nous allons appliquer deux raisonnements différents.

- 1re méthode

Soit $\varphi : \mathscr{M}_n(K) \to \mathscr{M}_n(K)$, $M \mapsto MB - BM$.
D'après le résultat précédent :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \varphi\left(A^k\right) = k\lambda A^k.$$

Si on suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k \neq 0$, alors cette écriture signifie que A^k est un vecteur propre de φ attaché à la valeur propre $k\lambda$ et ceci pour tout $k \in \mathbb{N}^*$; or $\lambda \neq 0$, on obtient alors une infinité de valeurs propres, ce qui est en contradiction avec $\dim \mathscr{M}_n(K) = n^2$ (et donc $\operatorname{Card} \operatorname{Sp}(A) \leqslant n^2$).
Il existe donc $k \in [\![1, n^2]\!]$ / $A^k = 0$.

> Donc A est nilpotente et, d'après les propriétés des matrices nilpotentes d'ordre n, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ / $A^k = 0$.

- 2ᵉ méthode

Cette méthode n'utilise pas l'endomorphisme φ, mais une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(K)$.

On considère $\mathcal{M}_n(K) \to \mathbb{R}$, $M \mapsto \| M \|$, une norme sur l'algèbre $\mathcal{M}_n(K)$. Donc :

$$\left\| k\,\lambda\, A^k \right\| = |\lambda|\, k \left\| A^k \right\| \leqslant 2\| B \| \left\| A^k \right\|.$$

Si $\left\| A^k \right\| \neq 0$, alors $|\lambda|\, k \leqslant 2\| B \|$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, ce qui est en contradiction avec le choix de $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $k > E\left(\dfrac{2\| B \|}{\lambda}\right) + 1$, donc il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $A^k = 0$ et A est donc nilpotente.

Ex. 38

Soit A une matrice réelle, carrée, d'ordre n, telle que $A^q = I_n$ pour un certain entier $q > 0$.

Montrer que $\dim \operatorname{Ker}\left(A - I_n\right) = \dfrac{1}{q} \displaystyle\sum_{k=1}^{q} \operatorname{Tr} A^k$.

> Remarquons d'abord que les nombres $\operatorname{Tr} A^k$ s'expriment facilement en fonction des valeurs propres de A.
>
> D'autre part, si 1 est valeur propre de A et si A est diagonalisable, la dimension du sous-espace propre $\operatorname{Ker}\left(A - I_n\right)$ est égale à la multiplicité de la valeur popre 1.

Le polynôme $X^q - 1$ est, par hypothèse, annulateur de A. Or il est simplement scindé dans $\mathbb{C}[X]$, donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et ses valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des racines q-èmes de 1.

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, en notant m_i la multiplicité de la valeur propre λ_i, on a :

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{p} m_i \lambda_i$$

car A est semblable à la matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{m_2} & (0) & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_p I_{m_p} \end{pmatrix}$$

et, plus généralement, A^k étant semblable à :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^k I_{m_1} & & & \\ & \lambda_2^k I_{m_2} & (0) & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_p^k I_{m_p} \end{pmatrix}$$

on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Tr} A^k = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} m_i \lambda_i^k$. On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{q} \operatorname{Tr} A^k = \sum_{i=1}^{p} m_i \sum_{k=1}^{q} \lambda_i^k.$$

Remarquons maintenant que si λ_i est une racine q-ème de 1, différente de 1, on a :

$$\sum_{k=1}^{q} \lambda_i^k = \lambda_i \frac{1 - \lambda_i^q}{1 - \lambda_i} = 0.$$

On envisage donc deux cas :

- 1 n'est pas valeur propre de A

Alors $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{q} \lambda_i^k = 0$ donc $\displaystyle\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q} \operatorname{Tr} A^k = 0 = \dim \operatorname{Ker}(A - I_n)$ car $A - I_n$ est alors inversible.

- 1 est valeur propre de A

Par exemple $\lambda_1 = 1$ et pour $i \in [\![2,p]\!]$, $\lambda_i \neq 1$. On obtient alors :

$$\sum_{k=1}^{q} \operatorname{Tr} A^k = qm_1 + \sum_{i=2}^{p} m_i \sum_{k=1}^{q} \lambda_i^k = qm_1$$

Sachant que A est diagonalisable, on a $m_1 = \dim \operatorname{Ker}(A - I_n)$ donc :

$$\dim \operatorname{Ker}(A - I_n) = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q} \operatorname{Tr} A^k.$$

Ex. 39

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que le spectre de A est réduit à $\{1\}$ si et seulement si :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \operatorname{Tr} A^k = n.$$

- Supposons $\operatorname{Sp} A = \{1\}$.

Sachant que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ toute matrice est trigonalisable, il vient que A est semblable à une matrice T triangulaire de diagonale $(1,\dots,1)$:

$$A = PTP^{-1} \quad \text{avec} \quad P \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ et } T = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \ddots & & \vdots \\ (0) & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Il en résulte, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = PT^kP^{-1}$ avec $T^k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \ddots & & \vdots \\ (0) & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ et donc $\operatorname{Tr} A^k = n$.

- Supposons $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\operatorname{Tr} A^k = n$.

Posons $\operatorname{Sp} A = \{\lambda_1,\dots,\lambda_p\}$ et soit m_i la multiplicité de la valeur propre λ_i.

Les λ_i étant deux à deux distincts, on a $1 \leqslant p \leqslant n$. De plus, $m_1 + m_2 + \dots + m_p = n$ (L_0) et $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $1 \leqslant m_i \leqslant n$.

Comme précédemment, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, A^k est semblable à une matrice triangulaire de diagonale $(\lambda_1^k,\dots,\lambda_1^k,\dots,\lambda_i^k,\dots,\lambda_i^k,\dots,\lambda_p^k,\dots,\lambda_p^k)$ où λ_i est répété m_i fois, donc :

$$\operatorname{Tr} A^k = \sum_{i=1}^{p} m_i\lambda_i^k$$

et, en écrivant les conditions $\operatorname{Tr} A^k = n$ (L_k), pour $k \in [\![1,p]\!]$, on obtient le système :

$$\begin{cases} m_1 + m_2 + \dots + m_p & = & n & (L_0) \\ m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \dots + m_p\lambda_p & = & n & (L_1) \\ \vdots & & & \\ m_1\lambda_1^p + m_2\lambda_2^p + \dots + m_p\lambda_p^p & = & n & (L_p) \end{cases}$$

Remarquer que l'hypothèse : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\operatorname{Tr} A^k = n$ permet d'écrire ce système parce que $1 \leq p \leq n$.

En retranchant à chacune des équations $(L_1) \dots (L_p)$ la précédente, on a alors :

$$\begin{cases} m_1(\lambda_1 - 1) + \dots + m_p(\lambda_p - 1) & = 0 \\ m_1 \lambda_1 (\lambda_1 - 1) + \dots + m_p \lambda_p (\lambda_p - 1) & = 0 \\ \vdots & \\ m_1 \lambda_1^{p-1} (\lambda_1 - 1) + \dots + m_p \lambda_p^{p-1} (\lambda_p - 1) & = 0 \end{cases}$$

et la matrice de Vandermonde :

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_p \\ \vdots & & \\ \lambda_1^{p-1} & \dots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix}$$

étant inversible (car les λ_i sont deux à deux distincts), ce second système donne :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], m_i(\lambda_i - 1) = 0.$$

Sachant que les m_i sont non nuls, il en résulte $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_i = 1$, donc $p = 1$ puisque l'écriture $\operatorname{Sp} A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, avec $p \geq 2$, suppose les λ_i deux à deux distincts. En conclusion, on a :

$$\operatorname{Sp} A = \{1\}.$$

1 Endomorphismes cycliques Théorème de Cayley-Hamilton

Dans tout le problème, on désigne par E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et par f un endomorphisme de E. On note alors :

- $P_f(X) = \det\left(f - X\,\mathrm{Id}\right)$ le polynôme caractéristique de f ;
- $E(x)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\left(f^k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$, pour $x \in E$.

On dit que f est un endomorphisme cyclique s'il existe $x_0 \in E$ tel que $E\left(x_0\right) = E$.

I – Étude des sous-espaces $E(x)$ pour $x \in E$, $x \neq 0_E$

1) Montrer que $E(x)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant x et stable par f.

2) Que peut-on dire de f si $\dim E(x) = 1$ pour tout vecteur non nul x de E ?

3) Justifier l'existence de l'entier :

$$k = \max\left\{m \geqslant 1 \mid \text{ la famille } \left(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{m-1}(x)\right) \text{ est libre}\right\}.$$

Prouver, pour tout entier $p \geqslant k$, que $f^p(x)$ appartient à $\mathrm{Vect}\left(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)\right)$.

En déduire que $\left(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)\right)$ est une base de $E(x)$ et donc que $\dim E(x) = k$.

4) On suppose que f est un endomorphisme cyclique, et que x_0 est un vecteur tel que :

$$E\left(x_0\right) = E.$$

Prouver que la famille $\left(x_0, f\left(x_0\right), \ldots, f^{n-1}\left(x_0\right)\right)$ est une base de E.

II – Polynôme caractéristique d'un endomorphisme cyclique

On suppose que f est un endormorphisme cyclique, et x_0 un vecteur tel que $E\left(x_0\right) = E$.

On rapporte alors l'espace E à la base $\left(x_0, f\left(x_0\right), f^2\left(x_0\right), \ldots, f^{n-1}\left(x_0\right)\right)$ et on pose :

$$f^n\left(x_0\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k\left(x_0\right).$$

(Dans la suite, on reprendra ces notations lorsque f est cyclique.)

5) Écrire la matrice M de f dans la base $\left(x_0, f\left(x_0\right), f^2\left(x_0\right), \ldots, f^{n-1}\left(x_0\right)\right)$ et déterminer $P_f(X)$.

III – Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

6) On suppose que f est un endomorphisme cyclique. Établir que $P_f(f) = 0$.

7) On suppose que f est un endomorphisme quelconque de E.

a) Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, non réduit à $\{0\}$, démontrer que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f_F induit par f divise le polynôme caractéristique P_f de f.

b) Montrer, pour tout vecteur non nul x appartenant à E, que f induit un endomorphisme cyclique du sous-espace $E(x)$ et que $P_f(f)(x) = 0_E$.

En déduire que $P_f(f) = 0$ (théorème de Cayley-Hamilton).

IV – Caractérisation des endomorphismes diagonalisables parmi les cycliques

On suppose dans cette question que f est cyclique.

Établir que f est diagonalisable si et seulement si il a n valeurs propres distinctes.

V – Caractérisation des endomorphismes cycliques parmi les diagonalisables

On suppose dans cette question que f est diagonalisable et on désigne par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f.

8) Montrer que le polynôme $\prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)$ est annulateur de f et en déduire que la famille $(\mathrm{Id}, f, \ldots, f^p)$ est liée dans $\mathscr{L}(E)$.

9) Établir, si $p = n$, que $E = E(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

10) Déduire des résultats précédents que f est cyclique si et seulement si $p = n$.

VI – Étude du commutant de f lorsque f est cyclique

On suppose dans cette question que f est cyclique et que $E(x_0) = E$.

11) Si u et v commutent avec f, montrer que $u = v$ si et seulement si $u(x_0) = v(x_0)$.

12) En déduire que le commutant $C(f) = \{g \in \mathscr{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}$ de f est un espace vectoriel de dimension n dont une base est $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$.

Solution

I – Étude des sous-espaces $E(x)$ pour $x \in E$, $x \neq 0_E$

1) Par définition même, $E(x)$ est un sous-espace vectoriel de E.

> C'est le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(f^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$.

Montrons que $E(x)$ est stable par f.

Soit $y \in E(x)$: $\exists p \in \mathbb{N}$ et :

$$(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in K^{p+1} \,/\, y = \sum_{q=0}^{p} \lambda_q f^q(x)$$

donc $f(y) = \sum_{q=0}^{p} \lambda_q f^{q+1}(x)$; ainsi $f(y) \in E(x)$ pour tout y de $E(x)$; $E(x)$ est stable par f.

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f et contenant x, alors F contient $f(x)$ puis (par récurrence) F contient $f^k(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc F contient $E(x)$.

En conclusion, $E(x)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant x et stable par f.

2) Si $\dim E(x) = 1$, alors $f(x)$ et x sont colinéaires et il existe $\lambda_x \in K$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.

Soit x non nul et $y \in Kx$ alors il existe $\lambda_y \in K$ tel que $f(y) = \lambda_y y$ et il existe $\mu \in K$ tel que $y = \mu x$, donc $f(y) = \lambda_y \mu x$; on a aussi :

$$f(y) = \mu f(x) = \mu \lambda_x x$$

donc $(\lambda_y - \lambda_x)\mu x = 0$, or $x \neq 0$, donc $(\lambda_y - \lambda_x)\mu = 0$. Si $y \neq 0$ alors $\mu \neq 0$ et on obtient $\lambda_y = \lambda_x$ donc $f(y) = \lambda_x y$; cette relation étant encore vérifiée lorsque $y = 0$, $f_{|Kx}$ est l'homothétie vectorielle de rapport λ_x.

Considérons $y \in E$ tel que (x, y) soit libre, alors $f_{|Ky}$ est l'homothétie vectorielle de rapport λ_y et de même $f_{|K(x+y)}$ est l'homothétie vectorielle de rapport λ_{x+y}.

> Bien sûr, $f_{|Kx}$ est la restriction de f à Kx.

Donc $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y)$, or $f \in \mathcal{L}(E)$ donc :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

ainsi :

$$(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$$

et puisque (x, y) est libre, il vient $\lambda_{x+y} - \lambda_x = \lambda_{x+y} - \lambda_y = 0$, et enfin : $\lambda_x = \lambda_y$.

En posant $\lambda_x = \lambda$, on obtient : $\forall x \in E$, $f(x) = \lambda x$ et f est une homothétie vectorielle.

3) Comme $x \neq 0_E$ par hypothèse, la famille (x) est libre.

Soit $\mathcal{N} = \{m \in \mathbb{N}^* \;/\; (x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x)) \text{ est libre}\}$, alors :

$$\mathcal{N} \begin{cases} \text{est une partie de } \mathbb{N} \\ \text{non vide car } 1 \in \mathcal{N} \\ \text{majorée par } n = \dim E \end{cases}$$

> En effet, si $\mathcal{L}$ est une partie libre de E, K-espace vectoriel de dimension n, alors $\operatorname{Card} \mathcal{L} \leqslant n$.

Donc $\mathcal{N}$ admet un plus grand élément ; soit k cet élément, on a :

$$\begin{aligned} &(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{(k-1)}(x)) \text{ libre} \\ \text{et} \quad &(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{k-1}(x), f^k(x)) \text{ liée.} \end{aligned}$$

Donc $f^k(x) \in \operatorname{Vect}(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x))$.

Montrons par récurrence que pour tout entier $p \geqslant k$:

$$f^q(x) \in \operatorname{Vect}(x, f(x), \ldots, f^{k-1}).$$

(i) On vient de voir que cette propriété est vraie pour $p = k$.

(ii) Hérédité. Soit $p \geqslant k$ tel que :

$$\begin{aligned} &f^p(x) \in \operatorname{Vect}(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)). \\ \text{Alors} \quad &f^{p+1}(x) \in \operatorname{Vect}(f(x), f^2(x), \ldots, f^k(x)), \\ \text{or comme} \quad &f^k(x) \in \operatorname{Vect}(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)), \\ \text{on a} \quad &f^{p+1}(x) \in \operatorname{Vect}(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)). \end{aligned}$$

Donc si la propriété est vraie à l'ordre p, elle l'est à l'ordre $p+1$.

(iii) D'après le principe de récurrence :

$$\forall p \in \mathbb{N}, (p \geqslant k \Rightarrow f^p(x) \in \operatorname{Vect}(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)).$$

Donc $\mathrm{Vect}\left(f^k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}} = \mathrm{Vect}\left(x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)\right)$, c'est-à-dire :

$$E(x) = \mathrm{Vect}\left(x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)\right)$$

et cette famille étant libre, c'est une base de $E(x)$ et $\dim E(x) = k$.

4) Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)\right)$ est une base de $E(x_0)$; or $E(x_0) = E$, donc $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)\right)$ est une base de E et comme $\dim E = n$, on obtient $k = n$ et :

$$\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\right) \text{ est une base de } E.$$

II – Polynôme caractéristique d'un endomorphisme cyclique

5) La matrice de f dans la base $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et :

$$M - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \dots & \dots & a_0 \\ 1 & -\lambda & & & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}$$

$P_f(\lambda) = \det\left(M - \lambda I_n\right)$.

En développant le déterminant par rapport à la dernière colonne, on obtient le polynôme caractéristique de f :

$$P_f(X) = (-1)^n \left(X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k\right).$$

III – Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

6) On rappelle que $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E et que :

$$f^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0).$$

Sachant que les puissances d'un endomorphisme sont permutables, on en déduit :

$$\forall j \in [\![0, n-1]\!],\ f^j \circ f^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^j \circ f^k(x_0)$$

soit :

$$f^n\left(f^j(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k\left(f^j(x_0)\right)$$

ou encore :

$$\left(f^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k\right)\left(f^j(x_0)\right) = 0$$

Il en résulte que l'endomorphisme :

$$f^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$$

est nul, puisqu'il s'annule sur tous les vecteurs de la base $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$.

On a ainsi montré que $P_f(f) = 0$ lorsque f est un endomorphisme cyclique.

7) f est un endomorphisme quelconque de E.

a) Si F est un sous-espace vectoriel de E, stable par f, ($F \neq \{0\}$), soit B_1 une base de F et B_2 une famille de vecteurs de E telle que $B = B_1 \cup B_2$ soit une base de E.

La matrice de f dans la base B est la matrice blocs :

$$\begin{pmatrix} M_{B_1}(f_F) & C_1 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

donc le polynôme caractéristique de f est :

$$P_f(\lambda) = \det\left(M_{B_1}(f_F) - \lambda I_m\right) \det\left(C_2 - \lambda I_{n-m}\right).$$

> m est la dimension de l'espace vectoriel F.

Ainsi le polynôme $\det M_{B_1}\left(f_{|F} - XI_m\right)$ divise $P_f(X)$, or $\det M_{B_1}\left(f_{|F} - XI_m\right)$ est le polynôme caractéristique de $f_{|F}$.

b) Soit $x \neq 0$ et $E(x) = \text{Vect}\left(f^k(x)\right)_{k \in \mathbb{N}}$.

Alors $E(x)$ est stable par f et, de plus, $\left(x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x)\right)$ est une base de $E(x)$ ($\dim E(x) = m$).

Ainsi $f_{E(x)}$ est un endomorphisme cyclique de $E(x)$ de polynôme caractéristique P_x qui divise P_f d'après a) : $P_f = QP_x$ avec $Q \in K[X]$.

Or, d'après 7), $P_x\left(f_{E(x)}\right)(x) = 0$ donc $P_x(f)(x) = 0$, puis $P_f(f)(x) = Q(f) \circ P_x(f)(x) = 0$.

Ainsi $\forall x \in E$, $x \neq 0$, $P_f(f)(x) = 0$, ce qui est aussi vrai pour $x = 0$.

> Car $P_f(f) \in \mathcal{L}(E)$.

Ainsi, pour tout $x \in E$, $P_f(f)(x) = 0$, donc $P_f(f) = 0$; c'est le théorème de Cayley-Hamilton.

IV – Caractérisation des endomorphismes diagonalisables parmi les cycliques

Montrons tout d'abord que si λ est valeur propre de f, endomorphisme cyclique, alors $\text{Ker}\left(f - \lambda\, \text{Id}_E\right)$ est une droite vectorielle.

- Soit λ une valeur propre de f et $E_\lambda = \text{Ker}\left(f - \lambda\, \text{Id}_E\right)$ le sous-espace propre de f associé à λ.

D'après II.5), la matrice de $f - \lambda\, \text{Id}_E$ dans la base $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est $M - \lambda I_n$.

λ étant valeur propre de f, $\dim \text{Ker}\left(f - \lambda\, \text{Id}_E\right) \geqslant 1$ et, d'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme $\left(f - \lambda\, \text{Id}_E\right)$ de E, $\text{rg}\left(f - \lambda\, \text{Id}_E\right) \leqslant n - 1$.

Or $\operatorname{rg}\left(f-\lambda \operatorname{Id}_E\right)=\operatorname{rg}\left(M-\lambda I_n\right)$, et les $(n-1)$ premières colonnes de $M-\lambda I_n$ sont :

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 1 & -\lambda & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1 & -\lambda \\ & & & \ddots \\ 0 & \ldots\ \ldots\ \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elles forment une famille libre, donc $\operatorname{rg}\left(M-\lambda I_n\right)=n-1$ et $\dim \operatorname{Ker}\left(f-\lambda \operatorname{Id}_E\right)=1$.

- Si f est diagonalisable, alors $\dim E=\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} \dim E_\lambda$.

Or, d'après le paragraphe précédent, $\dim E_\lambda=1$ pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$, donc :

$$n=\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} 1$$

ce qui donne $\operatorname{Card} \operatorname{Sp} f=n$ et f a donc n valeurs propres deux à deux distinctes.

Réciproquement, si f a n valeurs propres distinctes alors f est diagonalisable.

Ainsi, f étant un endomorphisme cyclique, f est diagonalisable si et seulement si f a n valeurs propres distinctes.

V – Caractérisation des endomorphismes cycliques parmi les diagonalisables

8) Posons $M_f(x)=\prod_{k=1}^{p}\left(X-\lambda_k\right)=X^p+\sum_{k=0}^{p-1} b_k X^k$ en décomposant M_f dans la base canonique.

> Le degré de M_f est p.

Pour tout vecteur propre v de f, il existe $j \in [\![1, p]\!]$ tel que $f(v)=\lambda_j v$.

Donc, en utilisant que les endomorphismes $f-\lambda_k \operatorname{Id}_E$ sont permutables, on obtient :

$$M_f(f)(v)=\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{p}\left(f-\lambda_k \operatorname{Id}_E\right) \circ\left(f-\lambda_j \operatorname{Id}_E\right)(v)=\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{p}\left(f-\lambda_k \operatorname{Id}_E\right)(0)=0.$$

Puisque f est diagonalisable, il existe une base $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ de E formée de vecteurs propres de f et le calcul précédent donne :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ M_f(f)\left(x_k\right)=0.$$

L'endomorphisme $M_f(f)$ est donc nul, ce qui nous donne une combinaison linéaire nulle non triviale de $\operatorname{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^p$.

> En effet, $M_f(f)=0$ s'écrit $f^p+\sum_{k=0}^{p-1} b_k f^k=0$.

Ainsi la famille $\left(\operatorname{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^p\right)$ est une famille liée de $\mathscr{L}(E)$.

9) $p = n$ et f est diagonalisable. $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base de E formé de vecteurs propres de f.

Soit $x_0 = \sum_{j=1}^{n} x_j$, alors : $\forall f \in \mathbb{N}, f^k(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k x_j$; et soit Δ le déterminant dans la base $B = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ de la famille $\left(f^k(x_0)\right)_{k \in [\![0, n-1]\!]}$:

$$\Delta = \mathbf{Det}_B\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\right) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On reconnait le déterminant de Vandermonde des n scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ deux à deux distincts donc $\Delta \neq 0$ et, par suite, la famille $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E donc $E = E(x_0)$ et f est cylique.

10) D'après la question IV, si f est cyclique et diagonalisable, alors f a n valeurs propres distinctes c'est-à-dire $p = n$.

D'après la question V.9), si f admet n valeurs propres distinctes, alors f est cyclique.

En conclusion, f étant diagonalisable, f est cyclique si et seulement si $p = n$.

> On a obtenu de façon plus précise : soit f diagonalisable, alors f est cyclique si et seulement si f admet n valeurs propres deux à deux distinctes.

VI – Étude du commutant de f lorsque f est cyclique

$E(x_0) = E$.

11) Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$, u et v commutant avec f.

Bien sûr, si $u = v$, alors $u(x_0) = v(x_0)$.

La réciproque est plus intéressante. En effet, supposons que $u(x_0) = v(x_0)$ et travaillons dans la base de E :

$$\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\right).$$

Comparons $u\left(f^k(x_0)\right)$ et $v\left(f^k(x_0)\right)$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Pour cela, on montre par récurrence que si u et f commutent, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, u et f^k commutent.

> Ce résultat est immédiat. En effet, par récurrence, si u et f^k commutent, montrons que u et f^{k+1} commutent.
>
> $u \circ f^{k+1} = \left(u \circ f^k\right) \circ f = \left(f^k \circ u\right) \circ f$ d'après l'hypothèse de récurrence, puis :
>
> $$\left(f^k \circ u\right) \circ f = f^k \circ (u \circ f) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } u \text{ et } f \text{ commutent}}}{=} f^k \circ (f \circ u) = \left(f^k \circ f\right) \circ u = f^{k+1} \circ u$$
>
> Ainsi $u \circ f^{k+1} = f^{k+1} \circ u$. La propriété est héréditaire. Or, par hypothèse, f et u commutent donc, d'après le principe de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}^*, f^k$ et u commutent.

De même, $\forall k \in \mathbb{N}^*, f^k$ et v commutent car f et v commutent, donc :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ u\left(f^k(x_0)\right) = f^k\left(u(x_0)\right) = f^k\left(v(x_0)\right) = v\left(f^k(x_0)\right).$$

Ainsi les endomorphismes u et v coïncident sur la base $B = \left(f^k(x_0)\right)_{k \in [\![0, n-1]\!]}$ de E, donc sont égaux.

> On peut rappeler ici qu'une application linéaire est entièrement déterminer par une base de E et son image.

On vient ainsi de montrer que si $E(x_0) = E$ et si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $v \in \mathscr{L}(E)$ commutent avec f, alors $u = v$ si et seulement si $u(x_0) = v(x_0)$.

12) Soit $\psi\ :\ C(f) \to E,\ g \mapsto g(x_0)$.

ψ est une application linéaire du K-espace vectoriel $C(f)$ dans le K-espace vectoriel E, alors ψ est injective d'après VI.11).

ψ est surjective, en effet, soit $y \in E$ et la base $B = \left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ de E, alors :

$$\exists!\left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\right) \in K^n \ /\ y = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0).$$

Considérons $g = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i$, alors $g \in C(f)$ et $g(x_0) = y$; ainsi $\psi(g) = y$, donc tout $y \in E$ admet un antécédent, c'est-à-dire que ψ est surjective.

> On peut vérifier auparavant que $C(f)$ est un K-espace vectoriel : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

Donc ψ est un isomorphisme d'espace vectoriel, et E étant de dimension finie, $C(f)$ l'est également et on a :

$$\dim C(f) = \dim E = n.$$

Or, d'après II.5), $\left(\mathrm{Id}, f, \ldots, f^{n-1}\right)$ est une famille libre, de plus :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ f^k \in C(f).$$

Donc, comme $\mathrm{Card}\left(\mathrm{Id}, f, \ldots, f^{n-1}\right) = n = \dim C(f)$, c'est une base de $C(f)$.

VII – Caractérisation des endomorphismes cycliques parmi les nilpotents

13) $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

- Il existe $x_0 \in E \setminus \mathrm{Ker}\, u^{p-1}$ donc $u^p(x_0) = 0$ et $u^{p-1}(x_0) \neq 0$.

Soit la famille $\left(x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0)\right)$.

Supposons qu'elle est liée, il existe des scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x_0) = 0_E.$$

Soit $\mathcal{N} = \left\{k \in [\![0, p-1]\!] \ /\ \lambda_k \neq 0\right\}$; $\mathcal{N}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (d'après les hypothèses faites sur $\left(\lambda_k\right)_{k \in [\![0,p-1]\!]}$) donc admet un plus petit élément ; soit q ce plus petit élément, on a alors :

$$\sum_{k=q}^{k=p-1} \lambda_k u^k(x_0) = 0_E$$

donc :

$$u^{p-1-q}\left(\sum_{k=q}^{k=p-1} \lambda_k u^k(x_0)\right) = 0$$

Or $u^{p-1-q}\left(\displaystyle\sum_{k=q}^{k=p-1} \lambda_k u^k(x_0)\right) = \lambda_q u^{p-1}(x_0)$, donc :

$$\lambda_q u^{p-1}(x_0) = 0$$

et avec $u^{p-1}(x_0) \neq 0$, il vient $\lambda_q = 0$, ce qui est en contradiction avec la définition de q.

Ainsi la famille $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0))$ est une famille libre de E ; or $\dim E = n$ donc $p \leqslant n$.

- Lorsque $p = n$, alors $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E et la matrice de u dans cette base est :

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & 0\\
 & \ddots & & & & & \vdots\\
1 & & 0 & & & & \vdots\\
 & \ddots & & \ddots & & & \vdots\\
0 & & 1 & & & & \vdots\\
\vdots & \ddots & & \ddots & & \ddots & \vdots\\
\vdots & & & & 1 & & 0\\
\vdots & & & \ddots & & \ddots & \\
0 & \cdots & & \cdots & 0 & & 1
\end{pmatrix}$$

14) Si $p = n$, en choisissant x_0 comme dans la question VII.13), on a :

$$(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)) \text{ est une base de } E \text{ et alors } u \text{ est cyclique.}$$

Si u est cyclique, il existe, par définition des endomorphismes cycliques, x_0 élément de E tel que $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E, donc une famille libre de E, donc :

$$u^{n-1}(x_0) \neq 0$$

ce qui entraine que, p étant l'indice de nilpotence de u, $p \geqslant n$, or, d'après VII.14), $p \leqslant n$ donc $p = n$.

On vient de montrer que, u étant un endomorphisme nilpotent de E, d'indice p, u est cyclique si et seulement si $p = n$.

2 Suites récurrentes linéaires

Dans tout ce problème, K désigne un sous-corps du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

On note $K[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients dans K, et $K(X)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients dans K. On désigne par $K^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de K.

Un polynôme P non nul est dit normalisé si le coefficient de son terme de plus haut degré est égal à 1.

On note T l'endomorphisme de $K^{\mathbb{N}}$ qui, à toute suite $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$, associe la suite $T(u) = (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$. Étant donné un polynôme :

$$P = a_0 X^p - \sum_{i=1}^{p} a_i X^{p-i}, \quad (p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}) \tag{1}$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_p$ appartiennent à K, on note $P(T)$ l'endomorphisme :

$$P(T) = a_0 T^p - \sum_{i=1}^{p} a_i T^{p-i}, \tag{2}$$

et on note $E(P)$ le sous-espace vectoriel de $K^{\mathbb{N}}$ constitué des suites $u = (u_n)$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_0 u_{n+p} - \sum_{i=1}^{p} a_i u_{n+p-i} = 0 \tag{3}$$

Dans ce problème, on se propose d'étudier les suites u satisfaisant à une relation de récurrence de ce type : dans la partie I, on utilise des polynômes ; dans la partie II, on exploite le calcul matriciel ; dans la partie III, on introduit des séries entières.

Partie I
Polynôme minimal associé à une suite

Soit $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$ un élément non nul de $K^{\mathbb{N}}$.

1) Soit P un élément de $K[X]$. Montrer que u appartient à $E(P)$ si et seulement si $P(T)(u) = 0$.

2) On suppose qu'il existe un polynôme P de degré $p \geqslant 1$ tel que u appartienne à $E(P)$.

a) On note $\mathcal{J}_u$ l'ensemble des polynômes Q tels que u appartienne à $E(Q)$. Montrer que $\mathcal{J}_u$ est un idéal de $K[X]$, non réduit à $\{0\}$ et distinct de $K[X]$.

b) Prouver qu'il existe un polynôme normalisé et un seul π_u, appartenant à $\mathcal{J}_u$ et tel que, pour tout élément Q de $\mathcal{J}_u$, $d^\circ \pi_u \leqslant d^\circ Q$. Montrer en outre que tout élément Q de $\mathcal{J}_u$ est un multiple de π_u.

Dans toute la suite, on dira que π_u est le polynôme minimal associé à u.

3) Soit P un polynôme de degré $p \geqslant 1$. Pour tout élément u de $E(P)$, et pour tout entier naturel n, soit U_n l'élément de K^p défini par $U_n = (u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p-1})$.

On note $F(u)$ le sous-espace vectoriel de K^p engendré par les vecteurs U_n, où n parcourt $\mathbb{N}$.

a) Prouver que l'application linéaire φ de $E(P)$ dans K^p définie par $\varphi(u) = U_0$ est un isomorphisme. En déduire la dimension de $E(P)$. Calculer $\varphi(T(u))$. Dans la suite de cette question, on suppose donné un élément u non nul de $E(P)$.

b) Prouver qu'il existe un entier $k \in [\![1, p]\!]$ tel que la famille $B_u = (U_0, U_1, \ldots, U_{k-1})$ soit libre et que la famille $(U_0, U_1, \ldots, U_k)$ soit liée. Prouver que B_u est une base de $F(u)$.

c) On écrit alors $U_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} b_i U_{k-i}$. Déterminer le polynôme minimal π_u associé à u, et comparer en particulier le degré de π_u et la dimension de $F(u)$.

d) Soit en particulier $e_p = (0, \ldots, 0, 1)$ et z l'unique élément de $E(P)$ tel que $\varphi(z) = e_p$.

Prouver que $(Z_0, Z_1, \ldots, Z_{p-1})$ est une base de $F(z)$, déterminer le polynôme minimal π_z, et prouver que $(z, T(z), \ldots, T^{p-1}(z))$ est une base de $E(P)$.

4) *Étude d'exemples*

a) On suppose que $K = \mathbb{R}$ et on prend $P = X^3 + X^2 + X + 1$. Décomposer P en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$. Caractériser, à partir de $U_0 = \varphi(u)$, les éléments u de $E(P)$ tels que $d^\circ \pi_u = 1$, puis ceux tels que $d^\circ \pi_u = 2$.

Dans chacun de ces cas, expliciter la base B_u de $F(u)$.

b) On suppose que $K = \mathbb{C}$ et on prend $P = X^3 + iX^2 + X + i$. Caractériser les éléments u de $E(P)$ tels que $\pi_u = X^2 + 1$, et ceux tels que $\pi_u = (X + i)^2$. Dans chacun de ces cas, expliciter la base B_u de $F(u)$.

5) *Passage à un sous-corps de K*

Soient K' un sous-corps de K, P un élément de $K[X]$ de degré $p \geqslant 1$, u un élément non nul de $E(P)$, et π_u le polynôme minimal associé à u.

a) Montrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n appartient à K', alors π_u appartient à $K'[X]$, c'est-à-dire est à coefficients dans K' (on pourra utiliser la base B_u de $F(u)$).

b) On suppose que $K = \mathbb{C}$ et $K' = \mathbb{R}$, on écrit $P = A + iB$, où A et B appartiennent à $\mathbb{R}[X]$ et sont non nuls, et on note D le pgcd de A et B et d le degré de D.

Si $d \geqslant 1$, prouver que $E(P) \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est constitué des éléments u de $E(D)$ tels que $u_0, \dots, u_{d-1}$ soient réels. Étudier le cas où $d = 0$.

c) *Exemple.* On prend l'exemple du 3.b. avec $K' = \mathbb{R}$. Déterminer les éléments u de $E(P) \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et, lorsque u est non nul, préciser π_u.

Partie II
Matrice associée à un polynôme

On note $\mathcal{M}_p(K)$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre p à éléments dans K.

Soit P un élément de $K[X]$ normalisé, de degré $p \geqslant 1$, écrit sous la forme (1), où $a_0 = 1$.

On appelle matrice associée à P l'élément M de $\mathcal{M}_p(K)$ défini par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ a_p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

Si $p = 1$, on convient que $M_p = (a_1)$. On désigne par f l'endomorphisme de K^p défini par M.

1) Prouver que, pour tout élément u de $E(P)$ et pour tout entier naturel n, $U_n = f^n(U_0)$.

2) Montrer que $(e_p, f(e_p), \dots, f^{p-1}(e_p))$ est une base de K^p.

3) Soit Q un élément de $K[X]$. Montrer que $Q(f) = 0$ si et seulement si $Q(f)(e_p) = 0$. En déduire que $P(f) = 0$ et que tout polynôme Q tel que $Q(f) = 0$ est un multiple de P. (On pourra utiliser φ.)

4) Calculer le polynôme caractéristique de f.

5) Soit un élément non nul de $E(P)$.

a) Montrer que $F(u)$ est stable par f.

b) Soit g l'endomorphisme de $F(u)$ induit par f. Déterminer la matrice de g dans la base B_u à l'aide des coefficients du polynôme minimal π_u ; en déduire le polynôme caractéristique de g.

6) On suppose que $K = \mathbb{C}$, et on munit l'espace $\mathbb{C}^p$ de la norme qui, à tout élément $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de $\mathbb{C}^p$, associe $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leqslant j \leqslant p} |x_j|$; on note $\|h\|$ la norme subordonnée de l'endomorphisme h de $\mathbb{C}^p$.

a) Calculer les composantes $(y_1, \ldots, y_p)$ de $y = f(x)$.

b) En déduire que :

$$\|f\| \leqslant \rho \quad \text{où } \rho = \sup\left(1, |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_p|\right). \tag{4}$$

c) Soit u un élément de $E(P)$. Déterminer un nombre réel $\beta \geqslant 0$ tel que, pour tout entier naturel n,

$$|u_n| \leqslant \beta \rho^n. \tag{5}$$

Partie III
Série entière associée à une suite

On note $\mathbb{C}_m[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré *strictement* inférieur à m, où $m \geqslant 1$. Soit P un élément de $\mathbb{C}[X]$ normalisé de degré $p \geqslant 1$, écrit sous la forme (1).

On pose $\widetilde{P} = 1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X^i$. À tout élément $u = (u_n)$ de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ on associe la série entière $\sum u_n x^n$.

1) On suppose que u est un élément de $E(P)$.

a) Prouver que le rayon de convergence R de cette série est supérieur ou égal à $\frac{1}{\rho}$.

Pour tout nombre réel x tel que $|x| < \frac{1}{\rho}$, on pose $S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

b) Prouver que $\widetilde{P} \cdot S_u$ est un élément de $\mathbb{C}_p[X]$.

c) Prouver que l'application $\psi : u \mapsto \widetilde{P} \cdot S_u$ est un isomorphisme de $E(P)$ sur $\mathbb{C}_p[X]$.

d) Soit en particulier $z = (z_n)$ l'unique élément de $E(P)$ tel que $\psi(z) = e_p$. Préciser l'image de ψ de la base $(z, T(z), \ldots, T^{p-1}(z))$ de $E(P)$.

2) a) Indiquer une méthode de calcul de $z = (z_n)$ à l'aide de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle convenable.

b) En déduire une méthode de calcul de l'unique élément $u = (u_n)$ de $E(P)$ tel que : $u_0 = a_0, \ldots, u_{p-1} = a_{p-1}$ où $(a_0, \ldots, a_{p-1})$ est un élément de $\mathbb{C}^p$.

c) On reprend l'exemple du I.4.a.. Expliciter z, $T(z)$ et $T^2(z)$. Calculer $u = (u_n)$ lorsque $U_0 = (1, 0, 0)$.

3) Soit $u = (u_n)$ une suite de nombres complexes telle que le rayon de convergence R de la série $\sum u_n x^n$ soit strictement positif, et S_u la somme de cette série. On suppose que l'ensemble des entiers n tels que $u_n \neq 0$ est infini et qu'il existe un élément B de $\mathbb{C}[X][$ de degré $p \geqslant 1$ tel que $B(0) = 1$ et que $A = B \cdot S_u$ appartienne à $\mathbb{C}_{p+q}[X]$ où $q \geqslant 0$.

a) Montrer que l'on peut supposer en outre que A et B sont premiers entre eux, ce que l'on fera dans toute la suite. Prouver alors que B ne s'annule pas sur $]-R, R[$ et que le couple (A, B) est unique.

b) Prouver qu'il existe un polynôme normalisé P de degré p et un seul tel que $\widetilde{P} = B$. Montrer que $v = T^q(u)$ est un élément non nul de $E(P)$ et que :

$$S_u(x) = u_0 + u_1 x \cdots + u_{q-1}x^{q-1} + x^q S_v(x), \quad \text{si } q \geqslant 1$$

c) Soient π_v le polynôme minimal associé à v et k son degré. Montrer que $C = \widetilde{\pi}_v S_v$ appartient à $\mathbb{C}_k[X]$, que C et $\widetilde{\pi}_v$ sont premiers entre eux, et que $\widetilde{\pi}_v$ ne s'annule pas sur $]-R, R[$. En déduire que $B = \widetilde{\pi}_v$ et exprimer A à l'aide de C. Prouver en particulier que, si $q = 0$, alors $A = C$.

d) On suppose en outre que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à un sous-corps K' de $\mathbb{C}$. Prouver que A et B appartiennent à $K'[X]$.

Solution

Partie I
Polynôme minimal associé à une suite

1) $u \in E(P) \iff P(T)(u) = 0$

$T^k(u) = (u_{n+k})_{n\geqslant 0}$ d'où l'équivalence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_0 u_{n+p} - \sum_{i=1}^{p} a_i u_{n+p-i} = 0 \iff a_0 T^p(u) - \sum_{i=1}^{p} a_i T^{p-i}(u) = 0$$

c'est-à-dire $u \in E(P) \iff P(T)(u) = 0$.

2) $\exists P \in K[X], \deg P \geqslant -1, u \in E(P)$

a) $\mathcal{J}(u) = \{Q \in K[X] \ / \ u \in E(Q)\}$

(*i*) $\mathcal{J}_u \neq \{0\}$ car $P \in \mathcal{J}_u$.

(*ii*) $Q_1, Q_2 \in \mathcal{J}_u$, $Q_1(T)(u) - Q_2(T)(u) = (Q_1 - Q_2)(T)(u) = 0$ donc $Q_1 - Q_2 \in \mathcal{J}_u$; $\mathcal{J}_u$ est un sous-groupe additif de $K[X]$.

(*iii*) $Q_1 \in \mathcal{J}_u$, $Q_2 \in K[X]$, $Q_2Q_1(T)(u) = Q_2T \circ Q_1(T)(u) = 0$ donc $Q_1Q_2 \in \mathcal{J}_u$.

(*i*), (*ii*) et (*iii*) donnent que $\mathcal{J}_u$ est un idéal de $K[X]$ non réduit à $\{0\}$.

$\mathcal{J}_u = K[X]$ donne $1 \in \mathcal{J}_u$ c'est-à-dire $1(T)(u) = 0$ c'est-à-dire $\mathrm{Id}(u) = 0$ ce qui est à rejeter car par hypothèse $u \neq 0$. On en déduit $\mathcal{J}_u \neq K[X]$.

b) Générateur de $\mathcal{J}_u$

$K[X]$ est principal donc $\mathcal{J}_u$ est principal ce qui assure l'existence et l'unicité de π_u tel que :

$$\mathcal{J}_u = \pi_u K[X].$$

3) $\deg P \geqslant 1$. Pour $u \in E(P), \forall n \in \mathbb{N}, U_n = (u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p-1})$.

$F(u) = \mathrm{Vect}\,\{U_n \;/\; n \in \mathbb{N}\}$

a) $\varphi \;:\; E(P) \to K^p, u \mapsto U_0$

- $\varphi \;:\; u \mapsto (u_0, u_1, \dots, u_{p-1})$ est linéaire. Une suite $u \in E(P)$ est entièrement déterminée par la donnée de ses p premiers termes $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$, c'est-à-dire que pour tout $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1}) \in K^p$ il existe $u \in E(P)$ unique telle que $\forall k \in [\![0, p-1]\!], u_k = x_k$. Ceci prouve que φ est bijective.

Donc $\varphi \in \mathrm{Isom}\,(E(P), K^p)$ et $\dim E(P) = p$.

- $\varphi(T(u)) = (u_1, u_2, \dots, u_{p-1}, u_p) = U_1$ et plus généralement $\varphi(T^n(u)) = U_n$.

b) Entier k tel que $B_u = (U_0, U_1, \dots, U_{k-1})$ soit libre, $(U_0, U_1, \dots, U_k)$ liée

• *Analyse*

Si k existe il est clair que $k = \max A$ avec $A = \{i \in \mathbb{N}^* \;/\; (U_0, U_1, \dots, U_{i-1}) \text{ est libre}\}$.

• *Synthèse*

A est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}^*$, car $u \neq 0$ donne $(U_0) \neq 0$, donc (U_0) est libre et évidemment majoré par p car les U_i sont éléments de K^p ; donc A admet un plus grand élément k.

B_u base de $F(u)$

- $U_k \in \mathrm{Vect}\,(U_0, U_1, \dots, U_{k-1})$ s'écrit $\varphi(T^k(u)) \in \mathrm{Vect}\,\left(\varphi(u), \varphi(T(u)), \dots, \varphi(T^{k-1}(u))\right)$

et équivaut donc, puisque φ est un isomorphisme, à

$$T^k(u) \in \mathrm{Vect}\,(u, T(u), \dots, T^{k-1}(u))$$

- Supposons $T^n(u) \in \mathrm{Vect}\,(u, T(u), \dots, T^{k-1}(u))$, alors :

$$T^{n+1}(u) \in \mathrm{Vect}\,(T(u), T^2(u), \dots, T^k(u)) \subset \mathrm{Vect}\,(u, T(u), \dots, T^{k-1}(u)).$$

Donc en composant par φ :

$$U_n \in \mathrm{Vect}\,(U_0, U_1, \dots, U_{k-1}) \text{ donne } U_{n+1} \in \mathrm{Vect}\,(U_0, U_1, \dots, U_{k-1})$$

En conséquence $F(u) = \mathrm{Vect}\,(U_0, \dots, U_{k-1})$ et B_u est une base de $F(u)$.

c) $U_k = \sum_{i=1}^{k} b_i U_{k-i}$. Polynôme minimal π_u

Alors $\varphi(T^k(u)) = \sum_{i=1}^{k} b_i\, \varphi\,(T^{k-i}(u))$ donc $T^k(u) = \sum_{i=1}^{k} b_i T^{k-i}(u)$ et $X^k - \sum_{i=1}^{k} b_i X^{k-i} \in \mathcal{J}_u$.

S'il existait un polynôme Q de degré $j < k$ tel que $Q(T)(u) = 0$, en composant par φ on aurait $(U_0, U_1, \dots, U_j)$ lié ce qui est contraire à la définition de k.

Donc $\pi_u(X) = X^k - \sum_{i=1}^{k} b_i X^{k-i}$ et $\deg \pi_u = k = \dim F(u)$.

d) $e_p = (0, 0, \ldots, 0, 1)$, $z \in E(P)$, $\varphi(z) = e_p$

$$Z_0 = \varphi(z) = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

$$Z_1 = \varphi\big((T)(z)\big) = \left(0, 0, \ldots, 1, \frac{a_1}{a_0}\right)$$

$$Z_2 = \varphi\big(T^2(z)\big) = \left(0, 0, \ldots, 1, \frac{a_1}{a_0}, \times\right)$$

....

$$Z_k = \varphi\big(T^k(z)\big) = (0, \ldots, 0, 1, \times, \ldots, \times) \quad 1 \text{ est en } (p-k)^{\text{ième}} \text{ position}$$

$$\det_{(e_p - e_1)}\big(Z_0, Z_1, \ldots Z_p\big) = \begin{vmatrix} 1 & \times & \ldots & \ldots & \times \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

ainsi $(Z_0, Z_1, \ldots, Z_p)$ est une base de K^p et donc de $F(z)$.

Polynôme minimal π_z

De $\dim F(z) = p$, on déduit $\pi_z = \dfrac{1}{a_0} P = X^p - \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{a_k}{a_0} X^{p-k}$.

Et puisque $\Big(\varphi(z), \varphi\big(T(z)\big), \ldots, \varphi\big(T^{p-1}(z)\big)\Big)$ est une base de K^p, $\big(z, T(z), \ldots, T^{p-1}(z)\big)$ est une base de $E(P)$ par isomorphisme.

4) Exemples

a) $K = \mathbb{R}$, $P = X^3 + X^2 + X + 1 = (X+1)(X^2+1)$, $p = 3$

- Éléments de $E(P)$ tels que $\deg \pi_u = 1$

* π_u divise P donc $\deg \pi_u = 1$ donne $\pi_u = X + 1$,

et $\pi_u = X + 1$ donne $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + u_n = 0$ donc $u_n = (-1)^n u_0$. Alors $U_0 = (u_0, -u_0, u_0) \in \mathbb{R}^3$ avec $u_0 \neq 0$ sinon $u = 0$.

* Inversement, si $U_0 = (u_0, -u_0, u_0)$ avec $u \neq 0$ alors, puisque $u \in E(P)$, on a :

$$u_3 = -u_2 - u_1 - u_0 = -u_0 + u_0 - u_0 = -u_0 \text{ donc } U_1 = (-u_0, u_0, -u_0) = -U_0.$$

Puisque $U_0 = \varphi(u)$ et $U_1 = \varphi\big(T(u)\big)$, $U_1 + U_0 = 0$ donne $T(u) + u = 0$ donc $X + 1 \in \mathcal{J}_u$.

Or, $u \neq 0$ donne $\deg \pi_u \geqslant 1$ et finalement $\pi_u = X + 1$.

Conclusion : $\deg \pi_u = 1 \iff \pi_u = X + 1 \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, U_0 = (\lambda, -\lambda, \lambda)$.

Dans ce cas $\dim F(u) = 1$ et une base est $B_u = (U_0)$.

Éléments de $E(P)$ tels que $\deg \pi_u = 2$

* π_u divise P donc $\deg \pi_u = 2$ donne $\pi_u = X^2 + 1$,

et $\pi_u = X^2 + 1$ donne $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + u_n = 0$ et $U_0 = (u_0, u_1, -u_0)$ avec $(u_0, u_1) \neq (0, 0)$ sinon $u = 0$.

• Inversement si $U_0 = (u_0, u_1, -u_0)$ avec $(u_0, u_1) \neq (0, 0)$, alors puisque $u \in E(P)$ on a :

$$u_3 = -u_2 - u_1 - u_0 = +u_0 - u_1 - u_0 = -u_1$$
$$u_4 = -u_3 - u_2 - u_1 = u_1 + u_0 - u_1 = u_0$$

ainsi $U_2 = \varphi(T^2(u)) = (-u_0, -u_1, u_0) = -U_0 = -\varphi(u)$ donc $T^2(u) + u = 0$ c'est-à-dire $X^2 + 1 \in \mathcal{J}_u$.

$X^2 + 1$ étant irréductible, on a $\pi_u = X^2 + 1$.

Conclusion : $\deg \pi_u = 2 \iff \pi_u = X^2 + 1 \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}, U_0 = (\lambda, \mu, -\lambda)$.

Dans ce cas, $\dim F(u) = 2$, et une base est $B_u = (U_0, U_1)$, $U_1 = \{\mu, -\lambda, -\mu\}$.

Remarque : $U_0 = \lambda(1, 0, -1) + \mu(0, 1, 0)$, $U_1 = \mu(1, 0, -1) - \lambda(0, 1, 0)$, donc en posant $U_0' = (1, 0, -1)$, $U_1' = (0, 1, 0)$, on a $\det_{(U_0', U_1')}(U_0, U_1) = \begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 - \mu^2 \neq 0$. Ainsi (U_0', U_1') est aussi une base de $F(u)$.

b) $\underline{K = \mathbb{C}, P = X^3 + iX^2 + X + i = (X^2 + 1)(X + i) = (X + i)^2(X - i)}$

• $\underline{\pi_u = X^2 + 1}$

Si $\pi_u = X^2 + 1$ alors $U_0 = (\lambda, \mu, -\lambda)$ comme ci-dessus avec $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

Inversement, si $U_0 = (\lambda, \mu, -\lambda)$ comme ci-dessus on a $X^2 + 1 \in \mathcal{J}_u$, en effet :

$$\begin{cases} u_3 = -iu_2 - u_1 - iu_0 \\ \quad = i\lambda - \mu - i\lambda = -\mu \\ u_4 = -iu_3 - u_2 - iu_1 \\ \quad = i\mu + \lambda - i\mu = \lambda \end{cases} \quad \text{donc } U_2 = \varphi(T^2(u)) = (-\lambda, -\mu, \lambda) = -U_0.$$

Il en résulte que π_u est un diviseur de $X^2 + 1$ donc $\pi_u = X^2 + 1$ ou $\pi_u = X + i$ ou $\pi_u = X - i$ (on a maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

En remarquant qu'un polynôme unitaire de degré 1 est polynôme minimal si et seulement si il est annulateur de u, il vient :

$$\begin{aligned} (1)\ \pi_u = X + i \iff T(u) + iu = 0 &\iff U_1 + iU_0 = 0 \\ &\iff (\mu, -\lambda, -\mu) + i(\lambda, \mu, -\lambda) = 0 \\ &\iff \mu + i\lambda = 0 \end{aligned}$$

et (2) $\pi_u = X - i \iff \pi(u) - iu = 0 \iff \mu - i\lambda = 0$.

Ainsi si $\lambda^2 + \mu^2 = 0$ on a $\pi_u = X + i$ ou $\pi_u = X - i$ et si $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, on a $\pi_u = X^2 + 1$.

Finalement $\pi_u = X^2 + 1 \iff U_0 = (\lambda, \mu, -\lambda)$ avec $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ et une base de $\mathcal{J}_u$ est alors (U_0, U_1).

• $\underline{\pi_u = (X + i)^2}$

$\pi_u = X^2 + 2iX - 1$ donne $U_2 = u_0 - 2iu_1$, $U_0 = (\lambda, \mu, \lambda - 2i\mu)$ et comme $U_1 + iU_0 \neq 0$, on a :

$$\mu + i\lambda \neq 0.$$

Réciproquement, soit $U_0 = (\lambda, \mu, \lambda - 2i\mu)$ avec $\mu + i\lambda \neq 0$

$\mu + i\lambda \neq 0$ donne $X + i \notin \mathcal{J}_u$ et on obtient alors :

$u_3 = -iu_2 - u_1 - iu_0 = -i(\lambda - 2i\mu) - \mu - i\lambda = -2i\lambda - 3\mu$

$u_4 = -iu_3 - u_2 - iu_1 = -2\lambda + 3i\mu - \lambda + 2i\mu - i\mu = -3\lambda + 4i\mu$

donc

$$\begin{array}{llll} U_2 = (& \lambda - 2i\mu & , \; -2i\lambda - 3\mu & , \; -3\lambda + 4i\mu \;) \\ U_1 = (& \mu & , \; \lambda - 2i\mu & , \; -2i\lambda - 3\mu \;) \\ U_0 = (& \lambda & , \; \mu & , \; \lambda - 2i\mu \;) \end{array}$$

puis : $U_2 + 2iU_1 - U_0 = (0, 0, 0)$.

Il en résulte $T^2(u) + 2iT(u) - u = 0$, c'est-à-dire $X^2 + 2iX - 1 \in \mathcal{J}_u$.

Finalement $\pi_u = (X + i)^2$.

5) Passage à un sous-corps K' de K

$u \in E(P)$, $u \neq 0$, π_u polynôme minimal.

a) Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in K'$ alors $\pi_u \in K'[X]$

Soit $B_u = \{U_0, \dots, U_{k-1}\}$ base de $F(u)$, on a $U_i \in K'^p$.

Le polynôme minimal π_u est $X^k - \sum_{i=1}^{k} b_i X^{k-i}$ où les b_i sont tels que $U_k = \sum_{i=1}^{k} b_i U_{k-i}$.

$(b_1, \dots, b_k)$ est l'unique solution d'un système de Cramer à coefficients dans K', donc $b_1, \dots, b_k \in K'$ et $\pi_u \in K'[X]$.

b) $K = \mathbb{C}$; $K' = \mathbb{R}$; $P = A + iB$; $A, B \in \mathbb{R}[X] \setminus 0$; $D = A \wedge B$; $d = \deg B$

$d \geqslant 1$, $E(P) \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{u \in E(D) \,/\, u_0, \dots, u_{d-1} \text{ réels}\}$

- $A = A_1 D$, $B = B_1 D$, $P = (A_1 + iB_1)D$

Pour $u \in E(D)$ on a $P(T)(u) = (A_1(T) + iB_1(T)) \circ D(T)(u) = 0$, donc :

$$\{u \in E(D) \,/\, u_0, \dots, u_{d-1} \text{ réels}\} \subset E(P) \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

- Soit $u \in E(P)$, $A(T)(u) + iB(T)(u) = 0$, donc $u \in E(P) \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \iff A(T)(u) = 0$ et $B(T)(u) = 0$.

$D = AQ + BR$ donc $D(T)(u) = Q(T) \circ A(T)(u) + R(T) \circ B(T)(u) = 0$ et $u \in E(D)$.

Ainsi $E(P) \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \subset \{u \in E(D) \,/\, u_0, \dots, u_{d-1} \text{ réels}\}$ c'est-à-dire $E(D) \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = E(P) \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$d = 0$ donne $A \wedge B = D = 1$ et donc $E(D) = \{0\}$.

c) Exemple

$P = X^3 + X + i(X^2 + 1)$, $D = B = X^2 + 1$

$$\begin{aligned} u \in E(P) \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\iff u \in E(X^2 + 1) \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ &\iff U_0 = (\lambda, \mu, -\lambda), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

alors $\pi_u = X^2 + 1$

Partie II
Matrices associées à un polynôme

$$P = X^p - \sum_{i=1}^{p} a_i X^{p-i} \quad , \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ a_p & & & a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

1) $u \in E(P)$, $U_n = f^n(U_0)$

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \\ \sum_{i=1}^{p} a_i u_{n+p-i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ a_p & \dots & \dots & \dots & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \quad , \quad U_{n+1} = MU_n$$

donc :

$$U_n = M^n U_0 .$$

2) $\left(e_p, f(e_p), \dots, f^{p-1}(e_p)\right)$ base de K^p

Soit $u \in E(P)$ telle que $U_0 = e_p$; on a vu en I.3.d. que $\left(U_0, U_1, \dots, U_{p-1}\right)$ est une base de K^p donc $\left(e_p, f(e_p), \dots, f^{p-1}(e_p)\right)$ est une base de K^p.

3) $Q \in K[X]$, $Q(f) = 0 \iff Q(f)(e_p) = 0$

$Q(f) = 0$ donne évidemment $Q(f)(e_p) = 0$.

Si $Q(f)(e_p) = 0$, alors $Q(f)\left(f^k(e_p)\right) = f^k \circ Q(f)(e_p) = 0$, ainsi $Q(f)$ s'annule sur une base donc :

$$Q(f) = 0.$$

- $P(f) = 0$. $P(f)(e_p) = f^p(e_p) - \sum_{i=1}^{p} a_i f^{p-i}(e_p) = 0$ car, toujours d'après I.3.d., on a $P = \pi_{e_p}$.
- $Q(f) = 0$ donne que Q est multiple de P car $Q \in \mathcal{J}_{e_p}$ et $\mathcal{J}_{e_p} = PK[X]$.

4) En posant $\chi_f = D_p$, on obtient : $\chi_f = \begin{vmatrix} -X & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -X & 1 \\ a_p & & & a_1 - X \end{vmatrix} = -XD_{p-1} + (-1)^{p+1} a_p$

$D_1 = a_1 - X$

$D_2 = -X(a_1 - X) - a_2 = X^2 - a_1 X - a_2$

$D_3 = -X^3 + a_1 X^2 + a_2 X + a_3$

....

$\chi_f = (-1)^p \left[X^p - a_1 X^{p-1} \dots a_p\right] = (-1)^p P(X)$

5) $u \neq 0, u \in E(P)$

a) $F(u)$ stable par f

Avec $F(u) = \text{Vect}\left(U_n \ / \ n \in \mathbb{N}\right)$, on obtient :

$$f\left(F(u)\right) = \text{Vect}\left(f\left(U_n\right) \ / \ n \in \mathbb{N}\right) = \text{Vect}\left(U_{n+1} \ / \ n \in \mathbb{N}\right) \subset \text{Vect}\left(U_n \ / \ n \in \mathbb{N}\right).$$

b) $g = f_{F(u)}$

$$\pi_u = X^k - \sum_{i=1}^{k} b_i X^{k-i}$$

On a ici :

$$g\left(U_0\right) = U_1$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$g\left(U_{k-2}\right) = U_{k-1}$$

$$g\left(U_{k-1}\right) = U_k = \sum_{i=1}^{k} b_i U^{k-i}$$

donc $\underset{B_u}{\text{mat}}\, g = \begin{bmatrix} 0 & & & b_k \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & b_1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_k(K)$ et $\chi_g(X) = (-1)^k \, \pi_u \, (X)$.

6) a) $y = f(x)$

$$y_1 = x_2$$

$$y_2 = x_3$$

$$\vdots$$

$$y_{p-1} = x_p$$

$$y_p = a_p x_1 + a_{p-1} x_2 + \ldots + a_1 x_p$$

b) $\|f\| \leqslant \rho$

Il est clair que le a) donne : $\sup|y_k| \leqslant \max\left\{1, |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_p|\right\}$.

c) $|u_n| \leqslant \beta\rho^n$

$U_n = f^n\left(U_0\right)$, $\|U_n\| \leqslant \rho^n \|u_0\|$, $|u_n| \leqslant \rho^n \|U_0\|$.

Partie III
Série entière associée à une suite

1) a) Rayon de convergence

On a $R \geqslant \dfrac{1}{\rho}$ car $\left|u_n x^n\right| \leqslant \beta\,|\rho x|^n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |\rho x|^n$ converge pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{\rho}, \dfrac{1}{\rho}\right[$.

b) $\widetilde{P} \cdot S_u \in \mathbb{C}_p[X]$

Par produit de Cauchy, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho}\right[$:

$$\widetilde{P}(x)S_u(x) = \left(1 - \sum_{i=1}^{p} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_j x^j\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} x^k \left(u_k - \sum_{i=1}^{k} u_{k-i} a_i\right) + \sum_{k=p}^{+\infty} x^k \left(u_k - \sum_{i=1}^{p} u_{k-i} a_i\right)$$

donc $\widetilde{P}(x)S_u(x) = \sum_{k=0}^{p-1} x^k \left(u_k - \sum_{i=1}^{k} u_{k-i} a_i\right)$ car pour $k \geqslant p$, $u_k = \sum_{i=1}^{p} u_{k-i} a_i$.

c) $\psi\ :\ u \mapsto \widetilde{P} \cdot S_u$ est un isomorphisme de $E(P)$ sur $\mathbb{C}_p[X]$

D'après b), ψ est à valeurs dans $\mathbb{C}_p[X]$.

La linéarité est évidente avec $S_{u+\lambda v} = S_u + \lambda S_v$.

Ayant $\dim E(p) = \dim \mathbb{C}_p[X] = p$, il reste à prouver que ψ est injective c'est-à-dire $\operatorname{Ker} \psi = \{0\}$.

Or $\psi(u) = 0$ donne $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $u_k - \sum_{i=1}^{k} u_{k-i} a_i = 0$, c'est un système échelonné et on en déduit $u_0 = u_1 = \dots = u_{p-1} = 0$ donc $u = 0$. D'où la conclusion.

d) $z \in E(P)$ tel que $\psi(z) = e_p$. Préciser $\left(\psi(z), \psi\left(T(z)\right), \dots, \psi\left(T^{p-1}(z)\right)\right)$

$z_0 = z_1 = \dots = z_{p-2} = 0$, $z_{p-1} = 1$.

$T_j(z) = \left(z_{n+j}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et d'après b) : $\psi\left(T_j(z)\right) = \sum_{k=0}^{p-1} x^k \left(z_{k+j} - \sum_{i=1}^{k} a_i z_{k+j-i}\right)$, soit :

$$\psi\left(T_j(x)\right) = \sum_{n=j}^{p+j-1} x^{n-j} \left(z_n - \sum_{i=1}^{n-j} a_i z_{n-i}\right).$$

On considère ici que $0 \leqslant j \leqslant p-1$.

- Pour $n \leqslant p-2$, on a $z_n = 0$ et $z_{n-i} = 0$ pour tout $i \geqslant 1$ donc :

$$\psi\left(T_j(z)\right) = \sum_{n=p-1}^{p+j-1} x^{n-j} \left(z_n - \sum_{i=1}^{n-j} a_i z_{n-i}\right)$$

- Pour $n = p-1$, on a $z_n = 1$ et $z_{n-i} = 0$ pour tout $i \geqslant 1$ donc :

$$\psi\left(T_j(z)\right) = x^{p-j-1} + \sum_{n=p}^{p+j-1} x^{n-j} \left(z_n - \sum_{i=1}^{n-j} a_i z_{n-i}\right)$$

- Pour $n \geqslant p$, $p \geqslant i > n-j$ donne $0 \leqslant n-i < j \leqslant p-1$ donc $z_{n-i} = 0$ donc :

$$\sum_{i=1}^{n-j} a_i z_{n-i} = \sum_{i=1}^{p} a_i z_{n-i} = 0$$

et en conséquence $z_n - \sum_{i=1}^{n-j} a_i z_{n-i} = z_n - \sum_{i=1}^{p} a_i z_{n-i} = 0$ et finalement $\psi\left(T_j(z)\right) = x^{p-j-1}$.

2) a) Calcul de $z = (z_n)$

$\psi(T^{p-1}(z)) = 1 = \widetilde{P}S_{T^{p-1}(z)}$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z_{n+p-1}x^n = \frac{1}{\widetilde{P}}$.

La décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{\widetilde{P}}$ permet d'en faire le développement en série entière et par identification on obtient les z_{n+p-1}.

b) Calcul de u tel que $u_0 = \alpha_0, \dots, u_{p-1} = \alpha_{p-1}$

u se décompose sur la base $(z, T(z), \dots, T^{p-1}(z))$ de $E(p)$:

$$u = \sum_{k=0}^{p-1} \beta_k T^k(z)$$

et il vient ensuite :

$$u_n = \sum_{k=0}^{p-1} \beta_k z_{n+k}.$$

c) Exemple : $P = X^3 + X^2 + X + 1$, $p = 3$

On obtient :

$$\frac{X^2}{1+X+X^2+X^3} = \frac{1/2}{1+X} + \frac{1-i}{4i(1-iX)} - \frac{1+i}{4i(1+iX)}$$

$$\frac{X^2}{1+X+X^2+X^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right)X^n$$

Donc avec $\dfrac{X^2}{1+X+X^2+X^3} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z_n X^n$, il vient $z_n = \dfrac{(-1)^n}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + n\dfrac{\pi}{2}\right)$, d'où :

$$z_p = \frac{1}{2}\left(1-(-1)^p\right) \text{ et } z_{2p+1} = -z_{2p},$$

et enfin $z_{4p} = 0$, $z_{4p+1} = 0$, $z_{4p+2} = 1$, $z_{4p+3} = -1$.

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit alors $u \in E(P)$, définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $u = \beta_0 z + \beta_1 T(z) + \beta_2 T^2(z)$ où $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ sont

définis par le système $\begin{cases} \beta_2 = 1 \\ \beta_1 - \beta_2 = 0 \\ \beta_0 - \beta_1 = 0 \end{cases}$ donc $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1$ et $u = z + T(z) + T^2(z)$.

Finalement $u_n = z_n + z_{n+1} + z_{n+2}$ ce qui donne :

$$u_{4p} = 1, \quad u_{4p+1} = 0, \quad u_{4p+2} = 0, \quad u_{4p+3} = -1.$$

3) a) On peut supposer $A \wedge B = 1$

Avec $D = A \wedge B$, on a $A = DA_1$, $B = DB_1$, $A_1 \wedge B_1 = 1$ et $A_1 = B_1 S_u \in \mathbb{C}[X]$.

Si on avait $\deg B_1 = 0$, la relation $A_1 = B_1 S_u$ donnerait $S_u \in \mathbb{C}[X]$ ce qui est contradictoire avec le fait que $\{n \in \mathbb{N} \,/\, u_n \neq 0\}$ est infini. Donc $\deg B_1 \geqslant 1$. Avec $d = \deg D$, $p_1 = \deg B_1$, $\deg BS_u = p + q$ donne $\deg B_1 S_u = p_1 + q$, $q \geqslant 0$.

$B(0) = 1$ donne $D(0) \neq 0$, à un coefficient de proportionnalité près on peut donc choisir D tel que $D(0) = 1$ ce qui donne $B_1(0) = 1$.

- B ne s'annule pas sur $\left]-R, R\right[$

On suppose maintenant $A \wedge B = 1$. S'il existait $\alpha \in \left]-R, R\right[$ tel que $B(\alpha) = 0$, on aurait $A(\alpha) = B(\alpha)S_u(\alpha) = 0$ donc $X - \alpha$ diviserait A et B ce qui est contradictoire avec $A \wedge B = 1$.

- (A, B) est unique

$A = BS_u$ et $A' = B'S_u$ donnent $AB' = A'B$ donc B divise AB' et puisque $A \wedge B = 1$, d'après le théorème de Gauss, B divise B' : $B' = QB$.

Alors $AB' = AQB$ donc $AQB = A'B$ et $A' = QA$: Q divise A' et B'. Puisque $A' \wedge B' = 1$, Q est constant et alors $B'(0) = B(0) = 1$ donne $Q = 1$ d'où finalement $A = A'$ et $B = B'$.

b) Polynôme P normalisé tel que $\widetilde{P} = B$

$B = 1 + b_1X + \dots + b_pX^p$ donne évidemment $P = X^p + b_1X^{p-1} + \dots + b_{p-1}X + b_p$.

- $v = T^q(u)$ est élément non nul de $E(P)$

$v_n = u_{n+q}$; v est non nul car l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $u_n \neq 0$ est infini. Il faut prouver que $v \in E(P)$.

$$\widetilde{P}(x)S_u(x) = \sum_{k=0}^{p-1} x^k \left(u_k - \sum_{i=1}^{k} a_i u_{k-i}\right) + \sum_{k=p}^{+\infty} x^k \left(u_k - \sum_{i=1}^{p} a_i u_{k-i}\right) \text{ (calcul antérieur)}$$

donc, puisque $\widetilde{P}(x)S_u(x) \in \mathbb{C}_{p+q}[X]$, pour tout $k \geqslant p + q$, on a :

$$u_k - \sum_{i=1}^{p} a_i u_{k-i} = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \text{pour } k \geqslant p,\ u_{k+q} - \sum_{i=1}^{p} a_i u_{k+q-i} = 0$$

ce qui prouve que $v = \left(u_{k+q}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ appartient à $E(P)$.

- $S_u(x) = u_0 + u_1x + \dots + u_{q-1}x^{q-1} + x^qS_v(x)$

Par définition de S_u et S_v.

c) π_v polynôme minimal de v, $\deg \pi_v = k$

D'après 1., $u \in E(P)$ donne $\widetilde{P}S_u \in \mathbb{C}_p[X]$.

Ici $v \in E(\pi_v)$ donc $C = \widetilde{\pi}_vS_u \in \mathbb{C}_k[X]$.

C et $\widetilde{\pi}_v$ sont premiers entre eux

Supposons que C et $\widetilde{\pi}_v$ ne soient pas premiers entre eux, , et soit $D = C \wedge \widetilde{\pi}_v$, on a $C = C_1D$, $\widetilde{\pi}_v = \widetilde{Q}D$, $\deg D \geqslant 1$, $Q(0) = 1$ et $C_1 = \widetilde{Q}S_v$.

Avec les notations de a. et b., $\deg \widetilde{\pi}_v = k$ et $C \in \mathbb{C}_k[X]$ donne $q = 0$.

D'après le b., $T^q(v) = v$ (car $q = 0$) appartient à $E(Q)$, c'est en contradiction avec le fait que π_v soit polynôme minimal de v car $\deg Q = k - \deg D < \deg \pi_v$.

$\widetilde{\pi}_v$ ne s'annule pas sur $\left]-R, R\right[$

Sinon C et $\widetilde{\pi}_v$ ne seraient pas premiers entre eux (comme en a.).

En déduire $B = \widetilde{\pi}_v$

$\widetilde{\pi}_v(0) = 1$ donc l'unicité de (A, B) donne $B = \widetilde{\pi}_v$.

Expression de A

$$\begin{aligned} A = BS_u &= \widetilde{\pi}_v S_u \\ &= \widetilde{\pi}_v\left(u_0 + u_1 X + \dots + u_{q-1}X^{q-1}\right) + X^q \widetilde{\pi}_v S_v(X) \\ &= \widetilde{\pi}_v\left(u_0 + u_1 X + \dots + u_{q-1}X^{q-1}\right) + X^q C \end{aligned}$$

donc $q = 0$ donne $A = C$.

d) u_0 appartient à K'

D'après I.5., $\pi_v \in K'[X]$ donc $\widetilde{\pi}_v$ aussi.

Ainsi $B = \widetilde{\pi}_v \in K'[X]$, $C = \widetilde{\pi}_v S_v \in K'[X]$ et $A = \widetilde{\pi}_v\left(u_0 + \dots + u_{q-1}X^{q-1}\right) + X^q C \in K'[X]$.

CHAPITRE 3

Espaces vectoriels normés Suites et séries

Sujets d'oraux

(A) Espaces vectoriels normés

Ex. 1

Caractériser les applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telles que l'image de tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ soit un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

> En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Le choix des normes utilisées dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ n'est donc pas précisé.
>
> Usuellement, on appelle applications ouvertes les applications donnant pour tout ouvert une image ouverte.

- Supposons que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est ouverte.

Alors $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$.

Nous notons 0_n (resp. 0_p) le zéro de $\mathbb{R}^n$ (resp. de $\mathbb{R}^p$).

Puisque f est linéaire, on a $0_p = f(0_n) \in \operatorname{Im} f$ donc, puisque $\operatorname{Im} f$ est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_o(0_p, r) \subset \operatorname{Im} f$ où $B_o(0_p, r)$ désigne la boule ouverte de $\mathbb{R}^p$ de centre 0_p et de rayon r :

$$B_o(0_p, r) = \{y \in \mathbb{R}^p \,/\, \|y\| < r\}.$$

Pour tout vecteur e_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, de la base canonique de $\mathbb{R}^p$, en posant :

$$e_i' = \frac{r}{2}\frac{e_i}{\|e_i\|},$$

on a :

$$\|e_i'\| = \frac{r}{2} < r$$

donc $e_i' \in B_o(0_p, r)$. Il en résulte $e_i' \in \operatorname{Im} f$ puis $e_i \in \operatorname{Im} f$ et ceci étant vrai pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on obtient $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^p$, c'est-à-dire que f est surjective.

- Supposons que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est surjective.

> Lorsque l'espace de départ est de dimension finie, toute application linéaire est continue donc, en dimension finie, tout isomorphisme est un homéomorphisme, donc une application ouverte.

La remarque ci-dessus montre que le cas $n = p$ est évident, en effet la surjectivité de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ montre qu'il s'agit alors d'un automorphisme donc d'un homéomorphisme.

On suppose maintenant $n > p$. La surjectivité de f s'écrit $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^p$ et donne donc $\operatorname{rg} f = p$, donc $\dim \operatorname{Ker} f = n - p$. En introduisant E supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans $\mathbb{R}^n$, $R^n = E \oplus \operatorname{Ker} f$, on a $\dim E = p$ et on sait que la restriction f_E de f à E est un isomorphisme, donc un homéomorphisme de E sur $\mathbb{R}^p$. Enfin, en notant π la projection sur E parallèlement à $\operatorname{Ker} f$, on a :

$$f = f_E \circ \pi \quad \text{donc aussi} \quad \pi = f_E^{-1} \circ f.$$

Considérons alors un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, il nous faut prouver que $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et, puisque f_E^{-1} est un homéomorphisme, cela revient à montrer que :

$$\pi(U) = f_E^{-1}(f(U)) \text{ est un ouvert de } E.$$

Pour $x_1 \in \pi(U)$, il existe $x \in U$ tel que $x_1 = \pi(x)$ et donc :

$$x' = x - x_1 \in \operatorname{Ker} \pi = \operatorname{Ker} f.$$

Puisque U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_o(x, r) \subset U$. Considérons alors $y_1 \in E$ tel que :

$$\|x_1 - y_1\| < r,$$

en notant $y = y_1 + x'$, on a $y_1 = \pi(y)$ et :

$$\|x - y\| = \|x_1 - y_1\| < r$$

donc $y \in B_o(x, r) \subset U$ et $y_1 \in \pi(U)$.

On a ainsi prouvé que, dans E, la boule ouverte $B_o^E(x_1, r) = \{y \in E \,/\, \|x_1 - y\| < r\}$ est incluse dans $\pi(U)$. Ceci a été réalisé avec x_1 quelconque dans $\pi(U)$ donc $\pi(U)$ est un ouvert de E et $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Finalement, f est ouverte.

Ex. 2

Soit K une partie convexe d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, admettant 0_E comme centre de symétrie, ne contenant aucune droite vectorielle mais telle que toute droite vectorielle la rencontre en au moins un point distinct de 0_E.

1) Montrer que $N \;:\; x \mapsto \inf\left\{\lambda \in \mathbb{R}_+^* \,/\, \dfrac{x}{\lambda} \in K\right\}$ est une norme de E.

2) Prouver que pour cette norme :

$$B_o(0_E, 1) = \overset{\circ}{K} \quad \text{et} \quad B_f(0_E, 1) = \overline{K}.$$

où $B_o(0_E, 1)$ et $B_f(0_E, 1)$ désignent les boules unités respectivement ouverte et fermée, $\overset{\circ}{K}$ est l'intérieur et $\overline{K}$ l'adhérence de K.

1) Avant de vérifier les axiomes de définition des normes, il faut penser à montrer que $N(x)$ a un sens quel que soit $x \in E$.

- $N(x)$ a un sens pour tout $x \in E$.

Remarquons d'abord que, par hypothèse, K contient au moins un vecteur $a \neq 0_E$ puisque pour toute droite vectorielle D, on a $K \cap D \setminus \{0_E\} \neq \varnothing$. L'hypothèse de symétrie par rapport à 0_E montre alors que $-a \in K$, puis la convexité donne $[-a, a] \subset K$ et donc $0_E \in K$.

Pour $x = 0_E$, on obtient $\left\{\lambda \in \mathbb{R}_+^* \,/\, \dfrac{x}{\lambda} \in K\right\} = \mathbb{R}_+^*$ d'où l'existence de $N(0_E) = 0$.

Pour $x \neq 0_E$, $D = \mathbb{R}x$ est une droite vectorielle et il existe $a \in K \cap D \setminus \{0_E\}$. Alors on a aussi $-a \in K$ et il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$a = \frac{x}{k} \quad \text{donc} \quad -a = \frac{x}{-k}.$$

L'un des deux réels k et $-k$ étant strictement positif, ceci nous montre que l'ensemble :

$$A_x = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^* \;/\; \frac{x}{\lambda} \in K \right\}$$

est non vide et, puisqu'il est évidemment minoré pour 0, il admet une borne inférieure.

- $x \neq 0_E \;\Rightarrow\; N(x) > 0$

Pour $x \neq 0_E$, $D = \mathbb{R}x$ est une droite vectorielle et on sait que $D \not\subset K$ donc il existe $y \in D$ tel que $y \notin K$ et, de même, $-y \notin K$ par symétrie de K.

Sachant que $0_E \in K$, on a $y \neq 0_E$ et il existe $\mu > 0$ tel que $y = \mu x$ ou $-y = \mu x$.

Pour tout $\mu' \geqslant \mu$ on a alors $\dfrac{1}{\mu'} \notin A_x$ car, pour $\dfrac{1}{\mu'} \in A_x$ on obtient $\left[-\mu' x, \mu' x\right] \subset K$ et donc $y = \pm\, \mu\, x \in K$ ce qui est exclu.

On en déduit que A_x est minoré par $\dfrac{1}{\mu}$ d'où, encore, $N(x) \geqslant \dfrac{1}{\mu} > 0$.

- $N(\alpha x) = |\alpha|\, N(x)$

La propriété est vérifiée pour $\alpha = 0$, on se limite maintenant à $\alpha \neq 0$.

Par symétrie de K, on a :

$$A_{\alpha x} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^* \;/\; \frac{\alpha\, x}{\lambda} \in K \right\} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^* \;/\; \frac{|\alpha|\, x}{\lambda} \in K \right\}$$

donc, en posant $\mu = \dfrac{\lambda}{|\alpha|}$, il vient :

$$A_{\alpha x} = \left\{ \mu\, |\alpha| \;/\; \mu \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{x}{\mu} \in K \right\}$$

et on en déduit :

$$N(\alpha x) = \inf A_{\alpha x} = |\alpha| \inf A_x = |\alpha|\, N(x).$$

- $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$

> Cette dernièr vérification est moins immédiate. C'est le moment d'observer que la convexité de K n'a été exploitée que bien partiellement et d'autre part, qu'il suffit, pour conclure, de montrer que :
>
> $$A_x + A_y \subset A_{x+y} \quad \text{c'est-à-dire que} \quad \forall\, \lambda \in A_x,\ \forall\, \mu \in A_y,\ \lambda + \mu \in A_{x+y}.$$

Soit $\lambda \in A_x$ et $\mu \in A_y$. Alors $\dfrac{x}{\lambda}$ et $\dfrac{y}{\mu}$ sont éléments de K donc, par convexité de K, on a :

$$\left[\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\mu}\right] \subset K$$

puis $\dfrac{\lambda \dfrac{x}{\lambda} + \mu \dfrac{y}{\mu}}{\lambda + \mu} \in \left[\dfrac{x}{\lambda}, \dfrac{y}{\mu}\right]$ donne $\dfrac{x+y}{\lambda+\mu} \in K$ c'est-à-dire $\lambda + \mu \in A_{x+y}$.

Par définition de $N(x+y)$, on en déduit :

$$\forall\, \lambda \in A_x,\ \forall\, \mu \in A_y,\ N(x+y) \leqslant \lambda + \mu.$$

En observant que $N(x+y) - \lambda$ est un minorant de A_y, on obtient :

$$\forall\, \lambda \in A_x,\ N(x+y) - \lambda \leqslant N(y)$$

puis en observant que $N(x+y) - N(y)$ est un minorant de A_x, il vient :

$$N(x+y) - N(y) \leqslant N(x)$$

$$\text{c'est-à-dire} \qquad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y).$$

2) Pas de mystère, il s'agit ici de faire le lien entre les propositions $x \in K$, $N(x) < 1$ et $N(x) \leqslant 1$.

Si $x \in K$, on a évidemment $1 \in A_x$ donc $N(x) \leqslant 1$. Ceci nous donne :
$$K \subset B_f(0_E, 1).$$

Si $x \in B_o(0_E, 1)$, c'est-à-dire $N(x) < 1$, il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que $\dfrac{x}{\lambda} \in K$ donc, compte tenu de $\dfrac{1}{\lambda} > 1$, on obtient :
$$x \in \left[0, \frac{x}{\lambda}\right] \subset K.$$

On a ainsi prouvé que $B_o(0_E, 1) \subset K$.

Il est facile de remarquer que $\mu \in A_x \Rightarrow [\mu, +\infty[\subset A_x$ et donc :
$$A_x = [N(x), +\infty[\quad \text{ou} \quad A_x =]N(x), +\infty[.$$
Dans les deux cas, $N(x) < 1$ donne $1 \in A_x$ donc $x \in K$.

Sachant que $\overline{B_o(0_E, 1)} = B_f(0_E, 1) = \overline{B_f(0_E, 1)}$ et que $B_o(0_E, 1) \subset K \subset B_f(0_E, 1)$ donne :
$$\overline{B_o(0_E, 1)} \subset \overline{K} \subset \overline{B_f(0_E, 1)},$$
il vient :
$$\overline{K} = B_f(0_E, 1).$$

De même, avec $\overset{\circ}{\widehat{B_o(0_E, 1)}} = B_o(0_E, 1) = \overset{\circ}{\widehat{B_f(0_E, 1)}}$, on obtient :
$$\overset{\circ}{K} = B_o(0_E, 1).$$

Ex. 3

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme et :
$$F = \left\{ u \in E \,/\, \int_0^1 u = 0 \right\}.$$

1) Montrer que tout $u \in E$ admet une primitive et une seule appartenant à F, on la note $T(u)$.

2) Montrer que T est linéaire, continue et calculer $|||T|||$.

1) Toute primitive v de u s'écrit :
$$\forall x \in [0,1],\ v(x) = \int_0^x u(t)\mathrm{d}t + k, \quad k \in \mathbb{R}$$
et la condition $v \in F$ équivaut alors à :
$$k + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x u(t)\mathrm{d}t = 0 \quad \text{soit} \quad k = -\iint_D u(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$
où on a posé $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant x\}$.

Avec $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leqslant t \leqslant 1, t \leqslant x \leqslant 1\}$, le théorème de Fubini donne aussi :
$$k = -\int_0^1 \mathrm{d}t \int_t^1 u(t)\mathrm{d}x = -\int_0^1 (1-t)u(t)\mathrm{d}t.$$

Ainsi u admet une primitive v et une seule appartenant à F, il s'agit de :

$$v : x \mapsto \int_0^x u(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 (1-t)u(t)\mathrm{d}t$$

ce qui définit l'application $T : u \to v$ de E dans F.

2) La linéarité de T est une conséquence évidente de la linéarité de l'intégrale. En remarquant que l'on a aussi :

$$T(u)(x) = \int_0^x tu(t)\mathrm{d}t - \int_x^1 (1-t)u(t)\mathrm{d}t,$$

pour $\| u \|_\infty \leqslant 1$, on obtient :

$$\forall x \in [0, 1], |T(u)(x)| \leqslant \frac{x^2}{2} + \frac{(1-x)^2}{2} = x^2 - x + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad \| T(u) \|_\infty \leqslant \frac{1}{2}.$$

On en déduit que T est bornée sur la boule unité $B_F(0_E, 1)$ de E donc que T est continue et :

$$|||T||| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{i}$$

Pour $u = 1$ (fonction constante), on a $T(1)(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{2}$ donc $\| T(1) \|_\infty = \dfrac{1}{2}$ et :

$$|||T||| \geqslant \frac{1}{2}. \tag{ii}$$

Finalement, les inégalités (i) et (ii) donnent $|||T||| = \dfrac{1}{2}$.

Ex. 4

On note E l'espace vectoriel des suites complexes $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite nulle muni de la norme uniforme : $\| \ \|_\infty$.

Pour tout $u \in E$, on pose $\varphi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} u_n$, puis $H = \operatorname{Ker} \varphi$.

1) Montrer que φ est continue et exprimer sa norme subordonnée N.

2) On pose ici $u = \left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Calculer $\varphi(u)$ et $d(u, H)$.

3) Pour x quelconque dans E, construire $y \in H$ tel que $d(x, y) \leqslant \dfrac{3}{2} d(x, H)$.

> Même si l'énoncé ne donne pas explicitement la question, il est bon de commencer par préciser que la majoration :
>
> $$\left|2^{-n} u_n\right| \leqslant \frac{1}{2^n} \| u \|_\infty$$
>
> prouve la convergence de la série :
>
> $$\sum_{n \geqslant 0} 2^{-n} u_n$$
>
> donc l'existence de $\varphi(u)$ pour tout $u \in E$, puis de remarquer que φ est une forme linéaire non nulle, donc que H est un hyperplan de E.

1) Pour tout $u \in E$, on a :

$$|\varphi(u)| \leqslant \| u \|_\infty \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}$$

donc :

$$|\varphi(u)| \leqslant 2\| u \|_\infty$$

ce qui prouve que φ est continue et que

$$N(\varphi) \leqslant 2. \tag{i}$$

> L'égalité $|\varphi(u)| = 2\| u \|_\infty$ est ici irréalisable avec $u \in E \setminus \{0\}$. En effet, avec :
>
> $$|\varphi(u)| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} |u_n| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \| u \|_\infty = 2\| u \|_\infty$$
>
> on voit qu'elle exige :
>
> $$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \left(\| u \|_\infty - |u_n| \right) = 0$$
>
> donc, tous les termes de cette dernière série étant positifs ou nuls, ils sont nécessairement nuls : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = \| u \|_\infty$, ce qui donne $\| u \|_\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$ puis $u = 0$.
>
> Pour arriver au résultat souhaité, c'est-à-dire $N(\varphi) \leqslant 2$, nous allons donc exhiber une suite $\left(u^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ de $E \setminus \{0\}$ (c'est-à-dire une suite de suites) telle que :
>
> $$\lim_{p\to+\infty} \frac{\left|\varphi\left(u^p\right)\right|}{\left\|u^p\right\|_\infty} = 2.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, soit $u^p = \left(u_n^p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_n^p = 1 \text{ si } n \leqslant p-1 \quad \text{et} \quad u_n^p = 0 \text{ si } n \geqslant p.$$

Il est clair que $u^p \in E$ et que $\left\|u^p\right\|_\infty = 1$.

On a alors :

$$\varphi\left(u^p\right) = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{2^n} = \frac{1-2^{-p}}{1-2^{-1}} = 2\left(1-2^{-p}\right) \quad \text{donc} \quad \varphi\left(u^p\right) = 2\left(1-2^{-p}\right) \left\|u^p\right\|_\infty.$$

Il en résulte que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $N(\varphi) \geqslant 2\left(1-2^{-p}\right)$ et donc que $N(\varphi) \geqslant 2$. (ii)

Enfin, les inégalités (i) et (ii) donnent $N(\varphi) = 2$.

2) Avec $u = \left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient :

$$\varphi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-n}}{n+1} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n}}{n} = -2\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = 2\ln 2.$$

> On a bien sûr utilisé le développement en série entière à l'origine de $x \mapsto \ln(1-x)$:
>
> $$\forall x \in \left]-1, 1\right[, \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Posons maintenant $\delta = d(u, H) = \inf\left\{\| u - v \|_\infty \;/\; v \in H\right\}$.

> Le calcul de δ se fait suivant une démarche classique :
>
> 1) on exhibe un réel α tel que $\forall v \in H$, $\alpha \leqslant \| u - v \|_\infty$ ce qui donne $\delta \geqslant \alpha$;
>
> 2) pour tout $\varepsilon > 0$, on montre qu'il existe $v \in H$ tel que $\| u - v \|_\infty < \alpha + \varepsilon$ ce qui donne $\delta \leqslant \alpha$.

Pour tout $v \in H$, on a $\varphi(u - v) = \varphi(u) = 2\ln 2$ donc $2\ln 2 \leqslant N(\varphi)\| u - v \|_\infty$ c'est-à-dire :

$$2\ln 2 \leqslant 2\| u - v \|_\infty \quad \text{soit aussi} \quad \ln 2 \leqslant \| u - v \|_\infty .$$

On en déduit $\ln 2 \leqslant \delta$. (i)

Par définition de $N(\varphi)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\omega \in E \setminus \{0\}$ tel que :

$$N(\varphi) - \varepsilon = 2 - \varepsilon < \frac{|\varphi(\omega)|}{\|\omega\|_\infty}.$$

On suppose de plus $\varepsilon < 2$, ce qui impose $\varphi(\omega) \neq 0$.

Sachant que H est un hyperplan de E et que $u \notin H$, on a $E = \mathbb{R}u \oplus H$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v_1 \in H$ tels que $\omega = \lambda u + v_1$.

Puisque $\omega \notin H$, on a aussi :

$$\omega = \lambda \left(u + \frac{v_1}{\lambda} \right)$$

c'est-à-dire $\omega = \lambda(u - v)$ où on a posé $v = -\dfrac{v_1}{\lambda}$, donc $v \in H$.

On obtient alors :

$$\frac{|\varphi(\omega)|}{\|\omega\|_\infty} = \frac{|\varphi(u-v)|}{\|u-v\|_\infty} = \frac{|\varphi(u)|}{\|u-v\|_\infty}$$

et donc $2 - \varepsilon < \dfrac{2\ln 2}{\|u-v\|_\infty}$ soit aussi, puisque $2 - \varepsilon > 0$, $\|u - v\|_\infty < \dfrac{2\ln 2}{2-\varepsilon}$.

> Remarquer que $\dfrac{2\ln 2}{2-\varepsilon}$ est de la forme $\ln 2 + \varepsilon'$, $\varepsilon' > 0$.

Avec $\delta \leqslant \|u - v\|_\infty$ on en déduit :

$$\delta < \frac{2\ln 2}{2-\varepsilon},$$

et cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon \in \left]0, 2\right[$, il vient (en faisant tendre ε vers 0) :

$$\delta \leqslant \ln 2. \tag{ii}$$

Les inégalités (i) et (ii) donnent la conclusion :

$$\delta = \ln 2 = \frac{|\varphi(u)|}{N(\varphi)}.$$

3) Comme dans le b) on établit que, pour tout $x \in E$:

$$d(x, H) = \frac{|\varphi(x)|}{N(\varphi)} = \frac{|\varphi(x)|}{2}.$$

La question revient donc à trouver $y \in H$ tel que :

$$\|x - y\|_\infty \leqslant \frac{3}{4}|\varphi(x)|.$$

Posons alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = x_n - \frac{3}{4}\frac{\varphi(x)}{2^n}.$$

Il est clair que $\lim\limits_{+\infty} y_n = 0$ donc $y \in E$, et que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - y_n| \leqslant \frac{3}{4}|\varphi(x)| \quad \text{donc} \quad \|x - y\|_\infty \leqslant \frac{3}{4}|\varphi(x)|.$$

D'autre part :

$$\varphi(y) = \varphi(x) - \frac{3}{4}\varphi(x)\sum_{x=0}^{+\infty} 4^{-n} = \varphi(x)\left(1 - \frac{3}{4} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}\right) = 0,$$

donc $y \in H$ et cette suite y répond à la question.

Ex. 5

n est un entier naturel $\geqslant 2$.

1) Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ \left\|P^{-1}AP\right\| = \|A\|. \qquad (\mathrm{R})$$

2) Une semi-norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est une application N de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad N(x) \geqslant 0 \qquad (1)$$

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x) \qquad (2)$$

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y) \qquad (3)$$

Soit N une semi-norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant (R), démontrer que :

- N est lipschitzienne ;
- $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $N(AB) = N(BA)$;
- $\mathrm{Tr}(A) = 0 \ \Rightarrow\ N(A) = 0$.

Quelles sont les semi-normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant (R) ?

1) La lecture complète de l'énoncé peut faire penser à montrer que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \|AB\| = \|BA\|.$$

Pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, d'après (R) on a $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$,

$$\left\|P^{-1}(PA)P\right\| = \|PA\| \quad \text{donc} \quad \|AP\| = \|PA\|. \qquad (\mathrm{i})$$

La densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un résultat classique ; par exemple, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$M = \lim_{k \to +\infty} M + \frac{1}{k} I_n$$

et les matrices $M_k = M + \dfrac{1}{k} I_n$ sont inversibles à partir d'un certain rang car le polynôme $\det\left(M + XI_n\right)$ admet au plus n racines. Ainsi, toute matrice B est limite d'une suite $\left(P_n\right)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices inversibles, donc, par continuité de la norme, on obtient d'après (i) :

$$\|AB\| = \lim_{k \to +\infty} \|AP_k\| = \lim_{k \to +\infty} \|P_k A\| = \|BA\|. \qquad (\mathrm{ii})$$

On obtient alors une contradiction en exhibant des matrices A et B telles que :

$$AB \neq 0 \quad \text{et} \quad BA = 0.$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient $AB = A \neq 0$ et $BA = 0$ (car $n \geqslant 2$) ce qui est en contradiction avec (ii) puisque $BA \neq 0$ donne $\|BA\| > 0$.

En conclusion, il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant (R).

2) On suppose que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni d'une norme quelconque, par exemple $\|\ \|_\infty$:

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A = \left[a_{ij}\right]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}},\ \|A\|_\infty = \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \left|a_{ij}\right|$$

Il est à noter d'autre part que la deuxième inégalité triangulaire reste vraie pour les semi-normes car elle se déduit des axiomes (2) et (3).

- En notant $\left(E_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$A = \left[a_{ij}\right] = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{ij}E_{ij}$$

donc avec les axiomes (2) et (3) :

$$N(A) \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \left|a_{ij}\right| N\left(E_{ij}\right) \leqslant \|A\|_\infty \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} N\left(E_{ij}\right)$$

d'où $N \leqslant k\|\cdot\|_\infty$ en posant $k = \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} N\left(E_{ij}\right)$.

D'autre part, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a par inégalité triangulaire :

$$N(A) = N(A - B + B) \leqslant N(A - B) + N(B)$$

donc $N(A) - N(B) \leqslant N(A - B)$ et symétriquement $N(B) - N(A) \leqslant N(B - A)$.

Puisque $N(A - B) = N(B - A)$, on en déduit :

$$-N(A - B) \leqslant N(A) - N(B) \leqslant N(A - B) \quad \text{c'est-à-dire} \quad |N(A) - N(B)| \leqslant N(A - B).$$

Compte tenu de $N \leqslant k\|\cdot\|_\infty$ il vient enfin :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ |N(A) - N(B)| \leqslant k\|A - B\|_\infty .$$

On a ainsi montré que N est k-lipchitzienne de $\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$ dans $\mathbb{R}$ donc aussi qu'elle est continue.

- N étant continue, la démonstration donnée en 1) reste valable et on a :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ N(AB) = N(BA).$$

- La question revient à prouver que $\operatorname{Ker}\operatorname{Tr} \subset \operatorname{Ker} N$ et on sait que $\operatorname{Ker}\operatorname{Tr}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il va être utile de commencer par observer que $\operatorname{Ker} N$ est également un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le noyau de N est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il est en effet :

– non vide car, en substituant à λ la valeur 0 dans l'axiome (2), il vient $N(0) = 0$;

– stable par combinaison linéaire, car $N(A) = N(B) = 0$ donne, avec les axiomes (1), (2) et (3), pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$0 \leqslant N(A + \lambda B) \leqslant N(A) + |\lambda|\, N(B) = 0 \quad \text{donc} \quad A + \lambda B \in \operatorname{Ker} N.$$

Pour conclure, il suffit maintenant d'exhiber un système générateur de $\operatorname{Ker}\operatorname{Tr}$ formé de matrices appartenant à $\operatorname{Ker} N$.

Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, si $i \neq j$, on a $E_{ij} \in \operatorname{Ker}\operatorname{Tr}$ et $E_{ij} = E_{ii}E_{ij}$ avec $E_{ij}E_{ii} = 0$.

Donc, avec $N\left(E_{ii}E_{ij}\right) = N\left(E_{ij}E_{ii}\right)$, il vient $N\left(E_{ij}\right) = N(0) = 0$ c'est-à-dire que $E_{ij} \in \operatorname{Ker} N$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $E_{11} - E_{ii} \in \operatorname{Ker}\operatorname{Tr}$. D'autre part, $E_{11} - E_{ii}$ est semblable à $E_{1i} + E_{i1}$ car cette seconde matrice est symétrique réelle, donc diagonalisable, de valeurs propres 1 et -1, simples, et 0 d'ordre $n - 2$. Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$E_{11} - E_{ii} = P^{-1}\left(E_{1i} + E_{i1}\right)P$$

et, d'après (R), on en déduit :

$$N\left(E_{11} - E_{ii}\right) = N\left(E_{1i} + E_{i1}\right)$$

or $E_{1i} \in \operatorname{Ker} N$, $E_{1i} \in \operatorname{Ker} N$ et $\operatorname{Ker} N$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc :

$$E_{1i} + E_{i1} \in \operatorname{Ker} N \quad \text{et} \quad N\left(E_{11} - E_{ii}\right) = N\left(E_{1i} + E_{i1}\right) = 0.$$

On a ainsi prouvé que les $n-1$ matrices $E_{11} - E_{ii}$, $2 \leqslant i \leqslant n$, appartiennent à $\operatorname{Ker} N$.

La famille formée par les $E_{i,j}$, $i \neq j$, et les $E_{11} - E_{ii}$, $2 \leqslant i \leqslant n$, est libre, de cardinal $n^2 - 1$ et constituée d'éléments de $\operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$, c'est donc une base de cet hyperplan et puisqu'elle est aussi formée d'éléments du sous-espace $\operatorname{Ker} N$, on a :

$$\operatorname{Ker} \operatorname{Tr} \subset \operatorname{Ker} N.$$

Remarquons enfin que si N n'est pas nulle, on a $\operatorname{Ker} N \neq E$ et, puisque $\operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$ est un hyperplan, l'inclusion précédente devient une égalité :

$$\operatorname{Ker} \operatorname{Tr} = \operatorname{Ker} N.$$

- Semi-normes vérifiant (R)

Puisque $I_n \notin \operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$, on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R} I_n \oplus \operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$ et toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique $M = \alpha I_n + H$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $H \in \operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$. En prenant la trace des deux membres, on obtient :

$$\alpha = \frac{\operatorname{Tr} M}{n} \quad \text{donc} \quad H = M - \frac{\operatorname{Tr} M}{n} I_n.$$

Si N est une semi-norme vérifiant (R), on a $\operatorname{Ker} \operatorname{Tr} \subset \operatorname{Ker} N$ donc, avec les axiomes (2) et (3), il vient :

$$N(M) \leqslant |\alpha| \, N\left(I_n\right) + N(H) \quad \text{c'est-à-dire} \quad N(M) \leqslant |\alpha| \, N\left(I_n\right) \tag{i}$$

et si $\alpha \neq 0$, c'est-à-dire $M \notin H$, en écrivant $I_n = \frac{1}{\alpha} M - \frac{1}{\alpha} H$, on obtient :

$$N\left(I_n\right) \leqslant \frac{1}{|\alpha|} N(M) + \frac{1}{|\alpha|} N(H) \quad \text{c'est-à-dire} \quad N\left(I_n\right) \leqslant \frac{1}{|\alpha|} N(M)$$

ou encore :

$$N(M) \geqslant |\alpha| \, N\left(I_n\right). \tag{ii}$$

Les inégalités (i) et (ii) donnent enfin $N(M) = |\alpha| \, N\left(I_n\right)$ et ceci reste vrai lorsque $\alpha = 0$ puisque, dans ce cas, on a $\operatorname{Tr} M = 0$ donc $N(M) = 0$.

En posant $\lambda = \frac{1}{n} N\left(I_n\right)$, on a $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(M) = \lambda \, |\operatorname{Tr} M|$ donc $N = \lambda \, |\operatorname{Tr}|$ avec $\lambda \geqslant 0$.

Réciproquement, pour tout $\lambda \geqslant 0$, l'application $\lambda \, |\operatorname{Tr}| \;:\; M \mapsto \lambda \, |\operatorname{Tr}(M)|$ est bien une semi-norme (la vérification des axiomes (1), (2) et (3) est immédiate), et elle vérifie (R) car on sait que deux matrices semblables ont la même trace.

Les semi-normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant (R) sont donc les applications $\lambda \, |\operatorname{Tr}|$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Ex. 6

L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni d'une norme arbitraire.

1) Montrer que l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang $\geqslant k+1$ est un ouvert.

2) Déterminer l'adhérence de l'ensemble des matrices de rang k.

Quelles sont les méthodes pratiques pour prouver qu'une partie Ω d'un espace vectoriel normé E est ouverte ?

1) La définition : pour tout x de Ω, il existe une boule ouverte non vide, de centre x incluse dans Ω.

2) Le passage au complémentaire permet d'utiliser la caractérisation séquentielle des fermés.

3) Exhiber une application continue $f : E \to F$, où F est un espace vectoriel normé, et un ouvert U de F tel que $\Omega = f^{-1}(U)$.

1) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang $r \geqslant 1$, il existe A' sous-matrice de A, carrée d'ordre r et inversible.

En posant $A = [a_{ij}]$, une telle matrice extraite s'obtient en considérant les a_{ij} communs à r lignes (d'indices $i_1, i_2, \ldots, i_r$) et r colonnes (d'indices $j_1, j_2, \ldots, j_r$).

Sous Maple, on définirait A' par :

$$\text{submatrix}\left(A, \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}, \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}\right).$$

Il existe donc deux parties I et J de $[\![1, n]\!]$, de cardinal r, $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ et $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ telles que :

$$A' = [a_{i_k j_\ell}]_{\substack{1 \leqslant k \leqslant r \\ 1 \leqslant \ell \leqslant r}} \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R}).$$

I et J étant fixées, considérons l'application $D : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ D(M) = \det\,[m_{i_k j_\ell}]_{\substack{1 \leqslant k \leqslant r \\ 1 \leqslant \ell \leqslant r}}$$

Cette application est continue puisque polynomiale en les coefficients de M.

Or $D(A) \neq 0$, donc il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\| M - A \| < \varepsilon \ \Rightarrow\ D(M) \neq 0$$

et si $r \geqslant k+1$, $D(M) \neq 0$ donne $\mathrm{rg}(M) \geqslant r \geqslant k+1$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, nous notons Ω_k l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de rang $\geqslant k+1$.

Si $k \geqslant n$, on a $\Omega_k \neq \emptyset$ donc Ω_k est ouvert.

Si $k \leqslant n-1$, pour tout $A \in \Omega_k$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que Ω_k contienne la boule ouverte $B_o(A, \varepsilon)$ donc Ω_k est ouvert.

2) Notons maintenant R_k l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang k, et S_k l'ensemble des matrices de rang $\leqslant k$.

On a clairement $S_k = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \Omega_k$ donc puisque, d'après le 1), Ω_k est ouvert, on obtient que S_k est fermé et l'inclusion $R_k \subset S_k$ donne :

$$\overline{R}_k \subset \overline{S}_k = S_k\,.$$

Pour montrer $S_k \subset \overline{R}_k$, on peut maintenant penser à la caractérisation séquentielle des points adhérents.

Soit $A \in S_k$ donc de rang $r \leqslant k$. On sait qu'il existe P et Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = PJ_rQ \quad \text{avec} \quad J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on a donc :

$$A = \lim_{p \to +\infty} P\left(J_r + \frac{1}{p}J_k\right)Q.$$

Or les matrices :

$$J_r + \frac{1}{p} J_k = \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{p} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1+\frac{1}{p} & & & & & & \\ & (0) & & \frac{1}{p} & & (0) & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \frac{1}{p} & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

sont de rang k et il en est de même pour :

$$P\left(J_r + \frac{1}{p} J_k\right) Q,$$

ce qui prouve que A est limite d'une suite de matrices de R_k, donc que $A \in \overline{R}_k$.
On vient de montrer $S_k \subset \overline{R}_k$ d'où finalement $\overline{R}_k = S_k$.

Ex. 7

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé.
Pour $(q, n) \in \mathbb{N}^2$, $q \geqslant 2$, $n \geqslant 2$, soit $E_q = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), M^q = I_n\}$.

1) Que dire de $M \in E_q$ si elle admet 1 pour unique valeur propre ?

2) Montrer que I_n est un point isolé de E_q c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$E_q \cap B(I_n, \varepsilon) = \{I_n\}.$$

($B(I_n, \varepsilon)$ désigne la boule ouverte de centre I_n et de rayon ε.)

Indication. $\varepsilon = 2 \sin \dfrac{\pi}{q}$.

3) Soit $A_0 \in E_q$, montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall A \in B(A_0, \varepsilon) \cap E_q$, le spectre de A est inclus dans celui de A_0.

> Par définition, une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est élément de E_q si et seulement si le polynôme $X^q - 1$ est annulateur de M.

1) Dans $\mathbb{C}[X]$, le polynôme $X^q - 1$ est scindé à racines simples donc toute matrice M de E_q est diagonalisable.
Si, de plus, le spectre de $M \in E_q$ est réduit à 1, M est semblable à I_n et donc $M = I_n$.

> Plus généralement, toute matrice diagonalisable $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dont le spectre est réduit à un singleton $\{\lambda\}$, est égale λI_n.

2)

> D'après le 1), une matrice M de E_q est distincte de I_n si et seulement si elle admet au moins une valeur propre distincte de 1. Nous sommes donc amenés à établir un lien entre $\|I_n - M\|$ et les valeurs propres de $I_n - M$.
> Pour ce faire, il est bon de commencer par préciser une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ étant identifié, par isomorphisme canonique, à $\mathbb{C}^n$ muni d'une norme quelconque, on définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une norme d'algèbre en posant pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\| M \| = \sup \left\{ \frac{\| MX \|}{\| X \|} \,/\, X \in \mathbb{C}^n, X \neq 0 \right\}.$$

Si on note f_M l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M, c'est-à-dire tel que $M = \underset{\mathcal{B}_n}{\mathrm{mat}}\, f_M$ où $\mathcal{B}_n$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on a $\| M \| = |||f_M|||$.

Soit alors $\lambda \in \mathbb{C}$, une valeur propre de M. Si $V \in \mathbb{C}^n$ est vecteur propre associé, on a :

$$MV = \lambda V \text{ et } V \neq 0 \quad \text{donc} \quad \frac{\| MV \|}{\| V \|} = |\lambda| \text{ et } \| M \| \geqslant |\lambda|.$$

Soit maintenant $M \in E_q \setminus \{I_n\}$. D'après la remarque préliminaire, il existe λ valeur propre de M avec $\lambda \neq 1$. De plus, $X^q - 1$ étant annulateur de M, on sait que les valeurs propres de M sont des racines de ce polynôme. On obtient ainsi $\lambda \in \mathbb{U}_q \setminus \{1\}$ avec :

$$\mathbb{U}_q = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{q}} \,/\, 0 \leqslant k \leqslant q-1 \right\} \quad \text{soit encore} \quad \lambda = e^{\frac{2ik\pi}{q}},\ 1 \leqslant k \leqslant q-1.$$

Sachant que $1 - \lambda$ est valeur propre de $I_n - M$ (car $(I_n - M)V = (1-\lambda)V$) on a alors

$$\|I_n - M\| \geqslant |1 - \lambda| \quad \text{donc} \quad \|I_n - M\| \geqslant \min \geqslant \left\{ \left| 1 - e^{\frac{2ik\pi}{q}} \right|, 1 \leqslant k \leqslant q-1 \right\}$$

c'est-à-dire :

$$\|I_n - M\| \geqslant \sqrt{2 - 2\cos\frac{2\pi}{q}} = 2 \sin\frac{\pi}{q}.$$

En conséquence, avec $\varepsilon = 2\sin\frac{\pi}{q} \in \mathbb{R}_+^*$, on a $E_q \cap B_o(I_n, \varepsilon) = \{I_n\}$.

3) Il s'agit encore d'établir un lien entre $\|A_0 - A\|$ et les valeurs propres de A_0 et A. Un choix judicieux de la norme sur $\mathbb{C}^n$ va, en exploitant le fait que A_0 est diagonalisable, faciliter le travail.

En tant qu'élément de E_q, A_0 est diagonalisable. Il existe donc une base $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de A_0 (c'est-à-dire de f_{A_0}), $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f_{A_0}(U_i) = \lambda_i U_i$, et nous pouvons supposer que $\mathbb{C}^n$ est muni de la norme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{C}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i U_i,\ \| x \| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il s'agit de la norme associée à la structure hermitienne de $\mathbb{C}^n$ définie par le fait que la base $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est orthonormale.

Supposons maintenant que le spectre de A, élément de E_q, ne soit pas inclus dans celui de A_0. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{U}_q$ tel que $\lambda \in \mathrm{Sp}\,A$, $\lambda \notin \mathrm{Sp}\,A_0$ et soit :

$$V = \sum_{i=1}^{n} v_i U_i$$

un vecteur propre de f_A associé à cette valeur propre. On obtient alors :

$$(f_{A_0} - f_A)(V) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i U_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} v_i U_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda) v_i U_i.$$

En remarquant, comme dans le 2), que $\lambda \in \mathbb{U}_q \setminus \mathrm{Sp}\,A_0$ donne :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ |\lambda_i - \lambda| \geqslant 2 \sin\frac{\pi}{q}.$$

il vient :

$$\left\|\left(f_{A_0}-f_A\right)(V)\right\|^2=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i-\lambda|^2\,|v_i|^2\geqslant 4\sin^2\frac{\pi}{q}\|V\|^2$$

donc :

$$\left\|\left|f_{A_0}-f_A\right\|\right|\geqslant 2\sin\frac{\pi}{q}\quad\text{c'est-à-dire}\quad \|A_0-A\|\geqslant 2\sin\frac{\pi}{q}.$$

On a ainsi montré que :

$$\forall A\in E_q,\ \operatorname{Sp}A\not\subset\operatorname{Sp}A_0\ \Rightarrow\ \|A_0-A\|\geqslant 2\sin\frac{\pi}{q}$$

en contraposant, on en déduit :

$$\forall A\in E_q,\ \|A_0-A\|<\varepsilon\ \Rightarrow\ \operatorname{Sp}A\subset\operatorname{Sp}A_0.$$

Ex. 8

On dit qu'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est matricielle s'il existe une norme sur $\mathbb{C}^n$ à laquelle elle est subordonnée.

1) Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice non nilpotente. Montrer qu'il existe $\alpha>0$ qui minore $N(A)$ pour toute norme matricielle N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2) Cela reste-t-il valable pour une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

1) $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ sont identifiés par isomorphisme canonique. Si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$, la norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui lui est subordonnée est définie par :

$$\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ N(A)=\sup\left\{\frac{\|AX\|}{\|X\|},\ X\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}\right\}=\sup\left\{\|AX\|,\ X\in\mathbb{C}^n,\ \|X\|=1\right\}$$

et il existe un lien simple entre $N(A)$ et toute valeur propre de A.

D'autre part, une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si sa seule valeur propre est 0.

Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est non nilpotente, elle admet une valeur propre $\lambda\in\mathbb{C}$ non nulle. Soit alors $V\in\mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé à λ : $AV=\lambda V$, $V\neq 0$.
Pour toute norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ subordonnée à une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^n$ on a alors :

$$\|AV\|\leqslant N(A)\|V\|\quad\text{c'est-à-dire}\quad |\lambda|\,\|V\|\leqslant N(A)\|V\|$$

et, puisque $\|V\|\neq 0$, il vient $N(A)\geqslant|\lambda|$. Le réel $\alpha=|\lambda|$ répond à la question.

2) La réponse est vraisemblablement négative. Pour le prouver il suffit, en ayant fixé une matrice A nilpotente, de construire une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de normes sur $\mathbb{C}^n$ telle que $\lim\limits_{k\to+\infty}N_k(A)=0$ où N_k est la norme subordonnée à n_k.

Considérons la matrice :

$$A=\begin{pmatrix}0&\dots&0&1\\ &\ddots&&0\\ (0)&&\ddots&\vdots\\ &&&0\end{pmatrix}$$

et $u\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que $A=\operatorname{mat}_{B_n}u$ où $B_n=(e_1,\dots,e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Pour tout $x\in\mathbb{C}^n$, on note $x=\sum\limits_{i=1}^{n}x_ie_i$.

Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, avec $k \geq 2$, l'application :

$$n_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n-1}|x_i| + \left(1 - \frac{1}{k}\right)|x_n|$$

est une norme sur $\mathbb{C}^n$.

La sphère unité $S_k = \{x \in \mathbb{C}^n \,/\, n_k(x) = 1\}$ est caractérisée par $|x_n| = \dfrac{k - \sum_{i=1}^{n-1}|x_i|}{k-1}$ donc, N_k désignant la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ subordonnée à n_k, on a :

$$N_k(A) = |||u||| = \sup_{x \in S_k} n_k(u(x)) = \sup_{x \in S_k} \frac{1}{k}|x_n| = \sup_{x \in S_k} \frac{k - \sum_{i=1}^{n-1}|x_i|}{k(k-1)} \leq \frac{1}{k-1}.$$

Il en résulte $\lim_{k \to +\infty} N_k(A) = 0$, ce qui nie l'existence de $a > 0$ tel que $N(M) \geq a$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

B Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Ex. 9

Trouver les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(x^2 + f(y)\right) = y + f(x)^2. \qquad (E)$$

On commencera par prouver que si f est une solution alors :

1) f est bijective ;

2) f est strictement croissante ;

3) $f(0) = 0$.

On suppose que f est solution.

1) Avec $x = 0$, l'équation (E) donne :

$$\forall y \in \mathbb{R}, f \circ f(y) = y + a$$

où on a posé $a = f(0)^2$. On en déduit que $f \circ f = t_a$ où t_a désigne la translation $y \mapsto y + a$.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a donc $y = f\left(f(y - a)\right)$ ce qui montre que f est surjective, et pour $y = f(x)$ on obtient $x + a = f \circ f(x)$ donc $x = f(y) - a$ ce qui montre que f est injective (tout y a au plus un antécédent).

Ainsi f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

> On peut aussi remarquer que le calcul précédent donne $f^{-1} = t_{-a} \circ f$.

2) Puisqu'elle est continue et bijective, on sait que f est strictement monotone. En posant $b = f(0)$ deux cas sont possibles :

- si f est croissante, alors $f\left([b, +\infty[\right) = [f(b), +\infty[$; $\qquad (i)$
- si f est décroissante, alors $f\left([b, +\infty[\right) =]-\infty, f(b)]$. $\qquad (ii)$

Or $f\left(x^2 + f(0)\right) = f(x)^2$ montre que $f\left([b, +\infty[\right) \subset [0, +\infty[$, le seul cas à retenir est donc (i) et f est strictement croissante.

3) Avec $y = 0$, l'équation (E) donne pour tout x réel :

$$f(x)^2 = f\left(x^2 + f(0)\right) \quad \text{et} \quad f(-x)^2 = f\left(x^2 + f(0)\right)$$

donc $f(-x)^2 = f(x)^2$. Compte tenu de la croissance stricte de f, cela exige $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \neq 0$ puis $f(0) = 0$ par continuité de f en 0.

> On vient de trouver des conditions nécessaires sur les solutions de l'équation. Il reste à déterminer quelles sont, parmi les fonctions vérifiant ces conditions, celles qui sont effectivement solutions de (E).

Si f est solution du problème, elle est strictement croissante et vérifie :

$$f \circ f = \text{Id} \quad , \quad f(0) = 0.$$

Pour une telle fonction, en supposant $f(x) > x$, on obtient $f\left(f(x)\right) > f(x) > x$ ce qui est contradictoire avec $f \circ f = \text{Id}$. De même $f(x) < x$ donne $f\left(f(x)\right) < x$ en contradiction avec $f \circ f = \text{Id}$.

En conséquence, on $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$ et donc $f = \text{Id}$.

La fonction Id étant évidemment solution du problème, c'est la seule solution.

Ex. 10

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^2(x) + \left(1 + f'(x)\right)^2 \leqslant 1 \quad (I)$$

Montrer que $f = 0$.

> Par hypothèse, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et rien de plus. En particulier, on ne suppose pas que f' est continue, ce qui interdit d'écrire :
>
> $$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$$
>
> et, dans cette situation, la seule façon de relier f à f' consiste à appliquer le théorème des accroissements finis. Il est alors naturel de s'orienter vers l'étude des variations de f.

Relevons d'abord deux conséquences pour (I) :

- $\left(1 + f'(x)\right)^2 \leqslant 1 - f^2(x)$ donne $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|1 + f'(x)\right| \leqslant 1$ donc $f'(x) \leqslant 0$: f est décroissante sur $\mathbb{R}$;
- $f^2(x) \leqslant 1 - \left(1 + f'(x)\right)^2$ donne $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant 1$: f est bornée sur $\mathbb{R}$.

En tant que fonction décroissante bornée, f admet une limite a en $+\infty$ et une limite b en $-\infty$ avec de plus, puisque $|f(x)| \leqslant 1$, $-1 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$.

> Pour conclure, il suffit maintenant de montrer que $a = b = 0$ et, puisque l'on dispose déjà de $a \leqslant b$, il suffit de prouver que $a \geqslant 0$ et $b \leqslant 0$. Nous allons raisonner par l'absurde.

Supposons $a < 0$, c'est-à-dire $-1 \leqslant a < 0$.

La condition $\lim\limits_{+\infty} f(x) = a < 0$ donne l'existence de x_0 réel tel que f soit négative sur $\left[x_0, +\infty\right[$, ce qui induit que $|f|$ est croissante sur cet intervalle et donc que $1 - f^2$ est décroissante. Puisque l'on a alors $\lim\limits_{+\infty} 1 - f^2(x) = 1 - a^2 < 1$, en introduisant $\lambda > 0$ tel que $1 - a^2 < \lambda^2 < 1$, on obtient l'existence de $x_1 \in \left[x_0, +\infty\right[$ tel que :

$$\forall x \in \left[x_1, +\infty\right[, 1 - a^2 \leqslant 1 - f^2(x) \leqslant \lambda^2 \quad \text{donc} \quad \left(1 + f'(x)\right)^2 \leqslant \lambda^2.$$

De cette dernière inégalité, on déduit $-\lambda \leqslant 1+f'(x) \leqslant \lambda$ donc $-1-\lambda \leqslant f'(x) \leqslant -1+\lambda < 0$ puis $|f'(x)| \geqslant 1-\lambda > 0$. Le théorème des accroissements finis appliqué sur le segment $[x, x+1]$ donne alors pour tout $x \geqslant x_1$, $f(x+1)-f(x) \geqslant 1-\lambda > 0$, ce qui est contradictoire avec $\lim\limits_{+\infty} f(x) = a$, qui donne en effet $\lim\limits_{+\infty} f(x+1) - f(x) = 0$.

On a ainsi prouvé, par l'absurde, $a \geqslant 0$. (i)

Considérons maitenant la fonction $g : x \mapsto -f(-x)$.

On a $g \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f'(-x)$ donc g vérifie aussi l'inégalité (I) et, d'après ce qui précède, on a $\lim\limits_{+\infty} g(x) \geqslant 0$. Or, par définition de g, $\lim\limits_{+\infty} g(x) = -\lim\limits_{-\infty} f(x) = -b$, donc $b \leqslant 0$. (ii)

Enfin, sachant que $a \leqslant b$ (décroissance de f') les inégalités (i) et (ii) donnent $a = b = 0$ puis $f = 0$.

Ex. 11

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 + f'(x)^2 \leqslant 1 + x^2.$$

Montrer que $f(1)^2 - f(0)^2 \leqslant \dfrac{4}{3}$.

> Un bon moyen, pour voir ce qui se passe, est d'élargir les hypothèses de façon, par exemple, à pouvoir écrire $f(1)^2 - f(0)^2$ sous la forme d'une intégrale.

- Supposons, dans un premier temps, f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$f(1)^2 - f(0)^2 = \int_0^1 2f(x)f'(x)\mathrm{d}x.$$

Or il est bien connu que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, 2ab \leqslant a^2 + b^2$, on en déduit :

$$f(1)^2 - f(0)^2 \leqslant \int_0^1 \left(f(x)^2 + f'(x)^2\right)\mathrm{d}x$$

puis, d'après l'hypothèse, et la croissance de l'intégrale :

$$f(1)^2 - f(0)^2 \leqslant \int_0^1 \left(1 + x^2\right)\mathrm{d}x \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(1)^2 - f(0)^2 \leqslant \frac{4}{3}.$$

- Revenons à l'hypothèse, f dérivable sur $\mathbb{R}$.

Le calcul précédent a mis en évidence que la conclusion se lit $F(1) \leqslant F(0)$ où on a posé :

$$F(x) = f(x)^2 - x - \frac{x^3}{3}.$$

Étudions donc les variations de cette fonction F.

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = 2f(x)f'(x) - 1 - x^2.$$

D'après l'hypothèse, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) \leqslant f(x)^2 + f'(x)^2 - \left(1 + x^2\right) \leqslant 0.$$

Ainsi F est décroissante et on en déduit $F(1) \leqslant F(0)$, c'est-à-dire la conclusion souhaitée.

Ex. 12

Trouver tous les couples (x, y) d'entiers naturels non nuls tels que $x^y = y^x$.

La résolution de cette équation dans $\mathbb{R}_+^{*2}$ se fait en séparant les variables, ce qui conduit à $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln y}{y}$ puis en étudiant la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$. On peut penser qu'une discussion précise de cette équation va nous permettre d'en déduire les solutions dans $\mathbb{N}^{*2}$.

Il est clair que tout couple $(x, x) \in \mathbb{N}^{*2}$ est solution. On se limite dans la suite à $x \neq y$, et, en remarquant que x et y jouent des rôles symétriques, on peut supposer $x < y$.
Pour $x = 1$, la seule solution en y est 1. On se limite finalement à $1 < x < y$.

L'équation $x^y = y^x$ équivaut à $y \ln x = x \ln y$ soit aussi à $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln y}{y}$.

Étudions les variations de $f\ :\ \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$.

Avec $f'(t) = \dfrac{1 - \ln t}{t^2}$ on obtient le tableau :

t	0		e		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	0

Donc $f_{|]1,e]}$ induit un homéomorphisme de $]1, e]$ sur $\left]0, \dfrac{1}{e}\right]$,

et $\quad f_{|[e,+\infty[}$ induit un homéomorphisme de $[e, +\infty[$ sur $\left]0, \dfrac{1}{e}\right]$.

Étant donné $z \in \mathbb{R}$, l'équation $\dfrac{\ln t}{t} = z$ admet deux racines distinctes x et y telles que $1 < x < y$, si et seulement si $z \in \left]0, \dfrac{1}{e}\right[$ et on a alors :

$$x = f_{|]1,e]}^{-1}(z) \quad , \quad y = f_{|[e,+\infty[}^{-1}(z).$$

En conséquence, si $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$ est solution de l'équation avec $1 < x < y$, on a nécessairement :

$$x \in]1, e] \quad \text{et} \quad y \in [e, +\infty[.$$

Puisque $e \approx 2,72$, la seule possibilité est $x = 2$ et y est l'unique solution de $t \geqslant 3$, $2^t = t^2$ c'est-à-dire $y = 4$.
En conclusion, les solutions de l'équation sont $(2, 4)$, $(4, 2)$ et tous les couples (x, x) avec $x \in \mathbb{N}^*$.

Ⓒ Suites

Ex. 13

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $P_n(x) = x^n + x^2 - 1$ a une racine unique u_n dans l'intervalle $]0, 1[$.

2) Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3) Déterminer un équivalent simple de $u_n - \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

1) Aucune difficulté : on étudie les variations de P_n.

P_n est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc elle induit un homéomorphisme de $[0, 1]$ sur $[P(0), P(1)] = [-1, 1]$. Puisque $0 \in]P(0), P(1)[$, on en déduit qu'il existe u_n unique, $u_n \in]0, 1[$ tel que $P_n(u_n) = 0$.

2) D'après le 1), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Il est maintenant naturel d'examiner si elle est monotone. Pour ce faire, il est bon de garder à l'esprit que, l'homéomorphisme $P_{n|[0,1]}$ étant croissant, on a :

$$\forall x \in [0, 1], x > u_n \iff P_n(x) > 0.$$

Formons $P_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n + u_{n+1}^2 - 1$. Puisque $u_{n+1} \in]0, 1[$, on a $u_{n+1}^n > u_{n+1}^{n+1}$ donc :

$$P_n(u_{n+1}) > P_{n+1}(u_{n+1}) = 0$$

et il en résulte $u_{n+1} > u_n$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée donc convergente de limite $\ell \in [0, 1]$.

En supposant $\ell \in [0, 1[$ on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(u_n) = \ell^2 - 1$ c'est-à-dire :

$$\ell^2 - 1 = 0 \text{ soit encore } \ell = 1.$$

Ceci montre par l'absurde que $\ell \notin [0, 1[$ donc que $\ell = 1$.

Autre solution

La relation $u_n^n = 1 - u_n^2$ s'écrivant aussi $n = \dfrac{2\ln(1 - u_n^2)}{\ln u_n^2}$, étudions la fonction :

$$f :]0, 1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln x}.$$

Pour tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$f'(x) = -\frac{x \ln x + (1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)\ln^2 x}$$

donc $f'(x)$ est du signe de $u(x)$ avec $u(x) = (x-1)\ln(1-x) - x\ln x$.

Le calcul donne alors $u'(x) = \ln(1-x) - \ln x$ d'où les variations de u, le signe de u, le signe de f' et enfin les variations de f.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
$u(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	0		$\nearrow$		$+\infty$

On en déduit que f est un homéomorphisme croissant de $]0, 1[$ sur $]0, +\infty[$ et la relation $n = 2f(u_n^2)$ s'écrit aussi $u_n^2 = f^{-1}\left(\dfrac{n}{2}\right)$.

L'étude de f montre que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = 1$, et il en résulte :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

3) L'intérêt de la deuxième solution donnée dans le 2) est qu'elle nous donne une expression de u_n en fonction de n (même si celle-ci n'est pas explicite). De plus, on sait que lorsque x tend vers 1, on a $\ln x = \ln(1 + x - 1) \sim x - 1$ donc $\ln u_n$ fait naturellement apparaître un équivalent de $u_n - \ell = u_n - 1$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ on a :

$$\ln u_n = \ln\left(1 + u_n - 1\right) \sim u_n - 1 \quad \text{donc} \quad u_n - 1 \sim \frac{\ln\left(1 - u_n^2\right)}{n}.$$

Avec $\ln\left(1 - u_n^2\right) = \ln\left(1 - u_n\right) + \ln\left(1 + u_n\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1 + u_n\right) = \ln 2$, on obtient :

$$u_n - 1 \sim \frac{\ln\left(1 - u_n\right)}{n} \quad \text{soit aussi} \quad u_n - 1 = \frac{\ln\left(1 - u_n\right)}{n}\left(1 + o(1)\right).$$

Il vient alors :

$$\ln\left(1 - u_n\right) = \ln\left|\ln\left(1 - u_n\right)\right| - \ln n + o(1)$$

et, puisque $\ln\left|\ln\left(1 - u_n\right)\right| = o\left(\ln\left(1 - u_n\right)\right)$, on en déduit $\ln\left(1 - u_n\right) \sim -\ln n$.

En conséquence, l'équivalence $u_n - 1 \sim \dfrac{\ln\left(1 - u_n\right)}{n}$ donne $u_n - 1 \sim -\dfrac{\ln n}{n}$.

Ex. 14

Soit $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels de $]-1, +\infty[$.

1) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(a_n - \ln\left(1 + a_n\right)\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

2) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} = 0 \iff e^{a_n} \sim \left(1 + \dfrac{a_n}{n}\right)^n$.

1) L'hypothèse se lit $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(a_n\right) = 0$ où l'on a posé $f : x \mapsto x - \ln(1 + x)$. Une démarche naturelle consiste donc en l'étude de cette fonction.

$f : x \mapsto x - \ln(1 + x)$ est définie, de classe C^∞ sur $]-1, +\infty[$ avec $f'(x) = \dfrac{x}{x+1}$ d'où le tableau de variation :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que les deux restrictions $f_1 = f|_{]-1,0]}$ et $f_2 = f|_{[0,+\infty[}$ sont des homéomorphismes respectivement décroissant et croissant, tous deux de limite nulle en 0.

Posons $u_n = a_n - \ln(1 + a_n) = f(a_n)$, si $-1 < a_n \leq 0$, on a $a_n = f_1^{-1}(u_n)$ et si $a_n \geq 0$, on a $a_n = f_2^{-1}(u_n)$. Donc, dans tous les cas :

$$|a_n| \leq |f_1^{-1}(u_n)| + |f_2^{-1}(u_n)|$$

et la continuité de f_1^{-1} et f_2^{-1} en 0, avec $f_1^{-1}(0) = f_2^{-1}(0) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, donne $\lim\limits_{n\to+\infty} f_1^{-1}(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_2^{-1}(u_n) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

2) Voilà une question qui ne présente pas de réelle difficulté mais qu'il s'agit de traiter avec beaucoup de soin car on nous demande de trouver des équivalents d'exponentielles. Rappelons donc que dans ce genre d'étude, la règle fondamentale utile est :

$$e^{u_n} \sim e^{v_n} \iff v_n = u_n + o(1).$$

Supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$.

On a alors, a fortiori, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n} = 0$ donc :

$$\ln\left(1 + \frac{a_n}{n}\right) = \frac{a_n}{n} - \frac{a_n^2}{2n^2} + o\left(\frac{a_n^2}{n^2}\right)$$

puis $$\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)\right) = \exp\left(a_n - \frac{a_n^2}{2n} + o\left(\frac{a_n^2}{n}\right)\right).$$

sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n^2}{n} = 0$, il vient donc $\left(1 + \dfrac{a_n}{n}\right)^n = e^{a_n + o(1)}$ soit aussi $\left(1 + \dfrac{a_n}{n}\right)^n \sim e^{a_n}$.

Supposons maintenant $e^{a_n} \sim \left(1 + \dfrac{a_n}{n}\right)^n$.

Cette hypothèse se lit aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n - n\ln\left(1 + \dfrac{a_n}{n}\right) = 0$ ce qui donne a fortiori :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} - \ln\left(1 + \frac{a_n}{n}\right) = 0$$

et d'après le 1) on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n} = 0$.

Dans ces conditions, on a $\ln\left(1 + \dfrac{a_n}{n}\right) = \dfrac{a_n}{n} - \dfrac{a_n^2}{2n^2} + o\left(\dfrac{a_n^2}{n^2}\right)$ donc :

$$a_n - n\ln\left(1 + \frac{a_n}{n}\right) = \frac{a_n^2}{2n} + o\left(\frac{a_n^2}{n}\right) \sim \frac{a_n^2}{2n}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n - n\ln\left(1 + \dfrac{a_n}{n}\right) = 0$ donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n^2}{n} = 0$ soit aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$.

Ex. 15

Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{n}{k}\right) \sim n \ln n$$

où $E(x)$ est la partie entière de x, $(x \in \mathbb{R})$.

On va tout d'abord essayer d'encadrer :

$$\sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{n}{k}\right)$$

en remarquant que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ E(x) \leqslant x < E(x) + 1.$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ k \in \mathbb{N}^*,\ E\left(\frac{n}{k}\right) \leqslant \frac{n}{k} < E\left(\frac{n}{k}\right) + 1$, ainsi :

$$\frac{n}{k} - 1 < E\left(\frac{n}{k}\right) \leqslant \frac{n}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k} - 1\right) < \sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{n}{k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k}$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1, n]\!],\ n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - n < \sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{n}{k}\right) \leqslant n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

On va, à présent, établir des résultats classiques de la suite :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

par exemple, en étudiant les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ell n\, n \quad \text{et} \quad b_n = a_n - \frac{1}{n}.$$

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n+1} - \ell n(n+1) + \ell n\, n = \dfrac{1}{n+1} - \ell n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right).$

Il est bien connu que $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[\setminus \{0\},\ \ell n(1+x) < x$.

Cette inégalité résulte de la stricte concavité sur $\left]-1, +\infty\right[$ de la fonction $f\ :\ x \mapsto \ell n(1+x)$, elle-même conséquence de :

$$\forall x \in \left]-1, +\infty\right[,\ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0.$$

En écrivant :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} + \ell n\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

on obtient, d'après le rappel précédent, $a_{n+1} - a_n < 0$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.

- À présent, étudions la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} - \ell n\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant 0$$

C'est de nouveau une conséquence de $\forall x > -1,\ \ell n(1+x) \leqslant x$.

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante.

- La suite $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(-\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et sa limite est nulle.

Les suites $(a_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc adjacentes.

> *Rappel.* Si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent et ont la même limite.

Donc $(a_n)_{\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

> Cette limite commune est la constante d'Euler $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$.

$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ell n\, n = \gamma + o(1)$, donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ell n\, n$, et par suite :

$$n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\, \ell n\, n.$$

De cette équivalence et de l'encadrement précédent :

$$n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - n < \sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{n}{k}\right) \leqslant n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

on déduit :

$$\sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{n}{k}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\, \ell n\, n.$$

Ex. 16

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{11}{2}\ , \quad u_1 = \frac{61}{11} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 111 - \frac{1\,130}{u_{n+1}} + \frac{3\,000}{u_n\, u_{n+1}}.$$

> Le problème semble assez hermétique. Une exploration numérique va peut-être nous permettre d'y voir plus clair. Par exemple, avec Maple, on peut utiliser la procédure suivante :
>
> ```
> suite:=proc(n::integer)
>     if n=0 then 11/2
>     elif n=1 then 61/11
>     else 111-1130/suite(n-1)+3000/suite(n-1)/suite(n-2)
>     fi;
>  end;
> ```

Le calcul des premiers termes donne :

$u_0 = \frac{11}{2}$, $u_1 = \frac{61}{11}$, $u_2 = \frac{341}{61}$, $u_3 = \frac{1\,921}{341}$, $u_4 = \frac{10\,901}{1\,921}$, $u_5 = \frac{62\,281}{10\,901}$, $u_6 = \frac{358\,061}{62\,281}$,

ce qui semble mettre en évidence l'existence de deux suites $(a_n)_{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{\mathbb{N}}$ d'entiers naturels non nuls vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{a_n}{b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = a_n.$$

- Supposons que ces suites existent. On obtient alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n u_{n+1} = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{b_n} \quad \text{donc} \quad u_{n+2} = 111 - 1\,130\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} + 3\,000\frac{b_n}{a_{n+1}}$$

et, compte tenu de $b_n = a_{n-1}$, il en résulte :

$$u_{n+2} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{111a_{n+1} - 1\,130a_n + 3\,000a_{n-1}}{a_{n+1}}$$

c'est-à-dire aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+3} = 111a_{n+2} - 1\,130a_{n+1} + 3\,000a_n \qquad (\mathcal{R})$$

Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être que la suite récurrente définie par $(\mathcal{R})$ et $a_0 = 11$, $a_1 = 61$, $a_2 = 341$.

- Considérons maintenant la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme ci-dessus et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$b_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = a_{n-1}.$$

Il est clair que ce sont des suites d'entiers relatifs et si ces entiers sont tous non nuls, en posant $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$, le même calcul que ci-dessus montre que la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ vérifie :

$$u_0 = \frac{11}{2},\quad u_1 = \frac{61}{11} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 111 - \frac{1\,130}{u_{n+1}} + \frac{3\,000}{u_{n+1}}.$$

L'équation caractéristique de la récurrence $(\mathcal{R})$ s'écrit :

$$x^3 - 111x^2 + 1\,130x - 3\,000 = 0. \qquad (E)$$

S'agissant d'une équation du troisième degré, on commence par chercher des solutions particulières.

En remarquant que si un entier x est solution de (E), alors x est un diviseur de $3\,000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3$, quelques essais donnent rapidement les trois solutions : 5, 6 et 100.

On sait que, dans ces conditions, il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \lambda 5^n + \mu 6^n + \nu 100^n$$

Le triplet (λ, μ, ν) est donné par le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 11 \\ 5\lambda + 6\mu + 100\nu = 61 \\ 25\lambda + 36\mu + 10\,000\nu = 341 \end{cases}$$

ce qui fournit $\lambda = 5$, $\mu = 6$, $\nu = 0$ et donc $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 5^{n+1} + 6^{n+1}$.

Avec cette expression, il est clair que les a_n sont des entiers naturels non nuls et on a ainsi achevé la preuve de l'existence de deux suites $(a_n)_{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{a_n}{b_n}.$$

> On remarquera que cette étude règle au passage le problème de l'existence de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ puisque la récurrence donnée pour la définition de u_{n+2} n'a de sens que si u_n et u_{n+1} sont non nuls.

En conclusion, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{5^{n+1} + 6^{n+1}}{5^n + 6^n}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$.

Ex. 17

Soit la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n \exp\left(-u_n\right) \end{cases}$$

1) Étudier cette suite selon $u_0 \in \mathbb{R}$.

2) On suppose $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer un équivalent de u_n.
On pourra commencer par déterminer α réel tel que $v_n = u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$ ait une limite finie non nulle, puis appliquer le théorème de Cesaro à cette suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$: si $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors la suite des moyennes arithmétiques :

$$w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k\,,$$

converge également vers ℓ.

1) On remarque que $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$ où $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto x\exp(-x)$.
Étude rapide de $f\ :\ x \mapsto xe^{-x}$.
a) f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^{-x}(-x+1)$.
b) Points fixes de f et signe de $f(x) - x$; $f(x) - x = x\left(e^{x} - 1\right)$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
Variation de f	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0
Signe de $\left(f(x) - x\right)$		$-$	0	$-$	$\frac{1}{e}-1$	$-$	
		$f(x) \leqslant x$				$f(x) \leqslant x$	

c) Intervalles de $\mathbb{R}$ stables par f :

$$\left]-\infty, 0\right[\ ,\ \left]0, 1\right]\ ,\ f\left(\left[1, +\infty\right[\right) \subset \left]0, 1\right].$$

f admet un unique point fixe : $x_0 = 0$.
On peut maintenant étudier la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Si $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite ne peut être que 0.

Si $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, par continuité de f en ℓ, on a $f(\ell) = \ell$.

- Soit $u_0 \in \mathbb{R}_-^*$, alors par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{R}_-^*.$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $f(x) \leqslant x$ donc $f\left(u_n\right) \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n.$$

Ainsi la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Si elle convergeait, on aurait :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n \leqslant u_0 \in \mathbb{R}_-^*,$$

ce qui est en contradiction avec la remarque précédente : si $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ce ne peut être que vers 0.

Donc si $u_0 \in \mathbb{R}_-^*$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

- $u_0 = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
- $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, alors par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left]0, 1\right].$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par 0, elle converge et on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2) Considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$v_n = u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Déterminons α pour que cette suite ait une limite finie non nulle (donc $\alpha \neq 0$) :

$$v_n = u_n^\alpha e^{-\alpha u_n} - u_n^\alpha = u_n^\alpha\left(e^{-\alpha u_n} - 1\right)$$

Or $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha u_n = 0$. On en déduit :

$$e^{-\alpha u_n} = 1 - \alpha u_n + o(u_n), \quad \text{puis} \quad v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\alpha\, u_n^{1+\alpha}.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est non nulle si et seulement si $\alpha = -1$, et alors :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 1.$$

On applique alors le théorème de Cesaro ; puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, la suite :

$$(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \; / \; w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k$$

converge et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

En remarquant que :

$$w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}\right)$$

on obtient donc :

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$$

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \sim n$$

Or $\dfrac{1}{u_n} \sim \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_0}$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$) d'où finalement :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Ex. 18

Étudier la suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{2 - u_n}$.

Il s'agit là d'une suite récurrente homographique : la méthode est classique.

La fonction homographique $f \;:\; x \mapsto \dfrac{1+x}{2-x}$ définit une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la bijection réciproque est :

$$f^{-1} \;:\; y \mapsto \frac{2y-1}{y+1}.$$

La suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est définie si et seulement si $u_0 \notin \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ où $(v_n)_{\mathbb{N}}$ est la suite telle que :

$$v_0 = 2, \ v_{n+1} = f^{-1}(v_n).$$

Déterminons les points fixes de f.

$$f(x) = x \iff x^2 - x + 1 = 0 \iff x \in \{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}\}.$$

Notons que ces points fixes sont aussi $-j$ et $-j^2$ et que ce sont aussi les points fixes de f^{-1} puisque $f(x) = x$ équivaut à $x = f^{-1}(x)$.

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, formons :

$$\frac{f(x)+j}{f(x)+j^2} = \frac{x+1+2j-jx}{x+1+2j^2-j^2x} = \frac{(1-j)x+j-j^2}{(1-j^2)x+j^2-j}$$

$$\frac{f(x)+j}{f(x)+j^2} = \frac{1-j}{1-j^2} \cdot \frac{x+j}{x+j^2} = \frac{1}{1+j}\frac{x+j}{x+j^2}$$

$$\text{donc} \quad \frac{f(x)+j}{f(x)+j^2} = -j\frac{x+j}{x+j^2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}\frac{x+j}{x+j^2}.$$

En posant $y = f(x)$ on en déduit que pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$\frac{y+j}{y+j^2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}\frac{f^{-1}(y)+j}{f^{-1}(y)+j^2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{f^{-1}(y)+j}{f^{-1}(y)+j^2} = e^{i\frac{\pi}{3}}\frac{y+j}{y+j^2}.$$

Il résulte de ce calcul que, si $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est définie, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+6}+j}{u_{n+6}+j^2} = \frac{u_n+j}{u_n+j^2}$$

donc $u_{n+6} = u_n$ et $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est périodique de période 6, et il en est de même pour $(v_n)_{\mathbb{N}}$.

Pour conclure, il nous reste à déterminer $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$; avec $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = \dfrac{2v_n - 1}{v_n + 1}$ on obtient $v_0 = 2$, $v_1 = 1$, $v_2 = 1/2$, $v_3 = 0$, $v_4 = -1$ et v_n n'est pas défini à partir de $n = 5$.

Finalement, la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est définie pour $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1/2, 1, 2\}$ et alors elle est 6-périodique.

À titre de vérification, le calcul donne :

$$u_1 = \frac{1+u_0}{2-u_0}, \quad u_2 = \frac{1}{1-u_0}, \quad u_3 = \frac{2-u_0}{1-2u_0},$$

$$u_4 = \frac{-1+u_0}{u_0}, \quad u_5 = \frac{-1+2u_0}{1+u_0}, \quad u_6 = u_0.$$

Ex. 19

Discuter, selon $u_0 \in \mathbb{R}$, la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

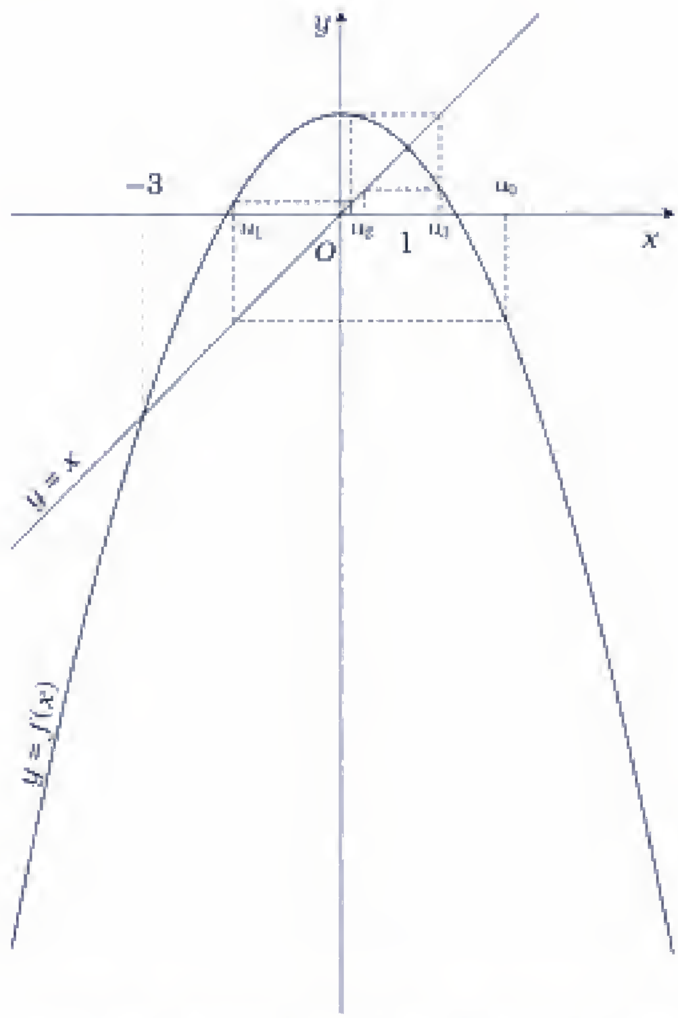
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(3 - u_n^2\right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Commençons par une étude rapide de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}(3 - x^2)$.

a) La courbe représentative de f est une parabole.

– Tableau de variation et courbe représentative :

x	$-\infty$		-3		$-\sqrt{3}$		0		1		$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$



b) Points fixes de f et position relative de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $y = x$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = \frac{1}{2}\left(3 - x^2\right) - x = \frac{1}{2}\left(3 - x^2 - 2x\right) = -\frac{1}{2}(x-1)(x+3)$$

$$f(x) = x \iff x \in \{-3, 1\}$$

et on a :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
signe de $f(x) - x$		$-$	0	$+$	0	$-$	
		$f(x) \leqslant x$	$f(x) = x$	$f(x) \geqslant x$	$f(x) = x$	$f(x) \leqslant x$	

c) Intervalles de $\mathbb{R}$ stables par f, intervalles remarquables

$$f\left([0,\sqrt{3}]\right) = \left[0,\frac{3}{2}\right] \subset [0,\sqrt{3}]$$

$$f\left([-\sqrt{3},0]\right) = \left[0,\frac{3}{2}\right] \subset [0,\sqrt{3}]$$

$$f\left(]-\infty,-3]\right) =]-\infty,-3]$$

$$f\left([3,+\infty[\right) =]-\infty,-3]$$

$$f\left([-3,-\sqrt{3}]\right) = [-3,0]$$

$$f\left([\sqrt{3},3]\right) = [-3,0]$$

d) La fonction f étant décroissante sur l'intervalle stable $[0,\sqrt{3}]$, on étudie les points fixes de $f\circ f$ dans l'intervalle $[0,\sqrt{3}]$, et les intervalles de $[0,\sqrt{3}]$ stables par $f\circ f$.

- $\forall x\in\mathbb{R}, f\circ f(x) = \frac{1}{2}\left(3-\left(f(x)\right)^2\right) = -\frac{1}{8}\left(x^4-6x^2-3\right)$

$\forall x\in\mathbb{R}, f\circ f(x) - x = -\frac{1}{8}(x+3)(x-1)^3$

$\forall x\in[0,\sqrt{3}], f\circ f(x) = x \iff x = 1$

$\forall x\in[0,1], f\circ f(x) \geqslant x$

$\forall x\in[1,\sqrt{3}], f\circ f(x) \leqslant x$

- $f\circ f$ est croissante sur $[0,\sqrt{3}]$
- $f\circ f\left([0,1]\right) = \left[\frac{3}{8},1\right] \subset [0,1]$

$f\circ f\left([1,\sqrt{3}]\right) = \left[1,\frac{3}{2}\right] \subset [1,\sqrt{3}]$

2) Étudions à présent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon les valeurs de $u_0\in\mathbb{R}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

D'abord, f étant continue sur $\mathbb{R}$, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite est un point fixe de f, donc ne peut être que -3 ou 1.

Étudions ensuite les différents cas.

- 1er cas : $u_0\in[0,\sqrt{3}]$
- Par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[0,\sqrt{3}]$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ce ne peut être que vers 1.
- Les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et (u_{2n+1}) sont strictement monotones et :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} = f\circ f(u_n).$$

Si $u_0\in[0,1[$, alors :

a) $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{2n}\in[0,1]$, intervalle stable par $f\circ f$ et $u_{2(n+1)} = f\circ f(u_{2n}) \geqslant u_{2n}$, donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée par 1, elle converge ; soit ℓ sa limite, $f\circ f$ étant continue sur $[0,\sqrt{3}]$, ℓ est un point fixe de $f\circ f$ dans l'intervalle $[0,1]\subset[0,\sqrt{3}]$ donc $\ell = 1$;

b) et $u_1 = f(u_0)\in[1,\sqrt{3}]$, donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{2n+1}\in[1,\sqrt{3}]$, intervalle stable par $f\circ f$ et $u_{2n+3} = f\circ f(u_{2n+1}) \leqslant u_{2n+1}$, donc $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par 1, elle converge ;

soit ℓ' sa limite, $f \circ f$ étant continue sur $[0, \sqrt{3}]$, sa limite ℓ' est un point fixe de $f \circ f$ de l'intervalle $[1, \sqrt{3}]$ donc $\ell' = 1$;

c) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a ses suites extraites d'ordres pair et impair qui convergent avec $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = 1$, donc elle converge et $\lim u_n = 1$.

• Si $u_0 \in \left]1, \sqrt{3}\right]$, en échangeant le rôle des indices pairs et impairs, on obtient le même résultat.

• Si $u_0 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$, suite constante.

En résumé, si $u_0 \in [0, \sqrt{3}]$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est 1.

▪ 2^e cas : $u_0 \in [-\sqrt{3}, 0]$

Alors $u_1 \in f([-\sqrt{3}, 0]) = \left[0, \dfrac{3}{2}\right] \subset [0, \sqrt{3}]$, et on est ramené au cas précédent.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, sa limite est 1.

▪ 3^e cas : $u_0 \in \left]-\infty, -3\right[$

Alors $u_n \in \left]-\infty, -3\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on a $f(u_n) < u_n$, c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante, si elle est minorée alors elle converge et sa limite ℓ vérifie : $\ell = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n < -3$.

Or la limite, en cas d'existence, appartient à $\{1, -3\}$, par suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et on a $\lim u_n = -\infty$.

▪ 4^e cas : $u_0 \in \left]3, +\infty\right[$

Alors $u_1 \in f(\left]3, +\infty\right[) = \left]-\infty, -3\right[$, on est ramené au cas précédent.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge en tendant vers $-\infty$.

▪ 5^e cas : $u_0 \in \{-3, 3\}$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = -3$, suite constante, bien sûr convergente, de limite -3.

▪ 6^e cas : $u_0 \in \left]-3, -\sqrt{3}\right]$

Comme pour tout $x \in \left]-3, 1\right[$, $f(x) > x$, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left]-3, -\sqrt{3}\right[$, alors $f(u_n) = u_{n+1} > u_n$, et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, majorée par $-\sqrt{3}$, elle converge et sa limite ℓ appartient à $\left]u_0, -\sqrt{3}\right]$ ce qui est contradiction avec $\ell \in \{-3, 1\}$ et par suite :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ u_{n_0} \in \left]-3, -\sqrt{3}\right[\quad \text{et} \quad u_{n_0+1} = f(u_{n_0}) \notin \left]-3, -\sqrt{3}\right[.$$

Or, si $u_{n_0} \in \left]-3, -\sqrt{3}\right[$, $f(u_{n_0}) \in f(\left]-3, -\sqrt{3}\right[) = \left]-3, 0\right[$, donc :

$$f(u_{n_0}) = u_{n_0+1} \in \left[-\sqrt{3}, 0\right[.$$

On est alors ramené à partir du rang $n_0 + 1$ au 2^e cas.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est 1.

▪ 7^e cas : $u_0 \in \left]\sqrt{3}, 3\right[$

Alors $u_1 \in \left]-3, 0\right[$, c'est le cas précédent à partir du rang 1.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est 1.

- Conclusion

Si $u_0 \in]-3,+3[$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est 1, avec le cas particulier $u_0 = 1$, où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1.

Si $u_0 \in \{-3,+3\}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante et sa limite est -3.

Si $u_0 \in]-\infty,-3[\cup]3,+\infty[$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge en tendant vers $-\infty$.

D Séries

Ex. 20

$\sum a_n$ est une série convergente, à termes positifs. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{a_{2n}a_n}$.
Étudier la nature de la série $\sum u_n$.

On va tout d'abord étudier la série de terme général a_{2n}.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum a_{2n}$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \sum_{k=0}^{n} a_{2k}.$$

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant la suite des sommes partielles de la série de terme général a_n, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

et on obtient :

$$A_n \leqslant S_{2n}.$$

Or la série $\sum a_n$ est convergente, donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et, comme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in \mathbb{R}^+,\ \lim_{n\to+\infty} S_n = \sup_{n\geqslant 0} S_n = S$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \leqslant S_{2n} \leqslant S.$$

La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série à *termes positifs* $\sum a_{2n}$ est majorée par S, donc elle converge et la série $\sum a_{2n}$ converge.

On obtient bien sûr :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

On sait que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ \sqrt{xy} \leqslant \frac{1}{2}(x+y)$$

Revoir peut-être, d'une façon plus générale, les moyennes arithmétiques et géométriques.

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \sqrt{a_n a_{2n}} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{2n}).$$

La série $\sum a_n$ est convergente par hypothèse.

On vient de montrer que $\sum a_{2n}$ est convergente, on en déduit que $\sum \frac{1}{2}\left(a_n + a_{2n}\right)$ est convergente.

> En effet, l'ensemble des séries convergentes a une structure d'espace vectoriel.

D'après les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \sqrt{a_n a_{2n}}$ est convergente.

Ex. 21

1) $\sum u_n$ est une série à termes complexes convergente, étudier la série $\sum \frac{u_n}{n}$.

2) Peut-on appliquer le même raisonnement à $\sum \frac{i^n}{n}$?

1)

> On peut remarquer que si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors :
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\frac{u_n}{n}\right| \leqslant |u_n| \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left|\frac{u_n}{n}\right| = \mathcal{O}\left(|u_n|\right).$$
>
> Or la série $\sum |u_n|$ est convergente donc, d'après les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{u_n}{n}$ est absolument convergente. Il reste à étudier le cas où $\sum u_n$ est une série semi-convergente.

Étudions, dans tous les cas, la suite $(S_n)_{\in \mathbb{N}^*}$ des sommes partielles de la série $\sum \frac{u_n}{n}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}.$$

> La suite des sommes partielles de la série de terme général $\sum u_n$ est une suite convergente. Introduisons-la : soit $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = U_k - U_{k-1}.$$

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k - U_{k-1}}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{U_{k-1}}{k}.\end{aligned}$$

En translatant l'indice dans la seconde somme, on obtient :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n &= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{U_k}{k} - \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{U_k}{k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1} U_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{U_n}{n} - U_0.\end{aligned}$$

Considérons alors la série $\sum v_n$ où $v_n = U_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On reconnaît en :

$$\sum_{k=1}^{n-1} U_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

la somme partielle d'ordre $n-1$ de la série de terme général $\sum v_n$.

Étudions la nature de cette série $\sum v_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |v_n| \leqslant |U_n|\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Car la série $\sum u_n$ est convergente par hypothèse.

Étant convergente, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, |U_n| \leqslant M$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |v_n| \leqslant M\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Or la série $\sum M\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ est une série convergente.

En effet, montrons ce résultat de deux façons différentes :

(i) ou bien sa somme est M (car $\sum_{k=1}^{n} M\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = M\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$) ;

(ii) ou bien on peut remarquer que $0 < M\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{M}{n^2}$ et que $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.

D'après les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs, $\sum |v_n|$ est donc convergente, c'est-à-dire que $\sum v_n$ est absolument convergente, ce qui entraîne la convergence de $\sum v_n$. Ceci est équivalent, par définition, à la convergence de la suite des sommes partielles de $\sum v_n$.

Or $\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} U_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\left(\sum_{k=1}^{n-1} U_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{|U_n|}{n} \leqslant \frac{M}{n}$ donc la suite $\left(\frac{U_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et sa limite est nulle.

Ainsi, d'après les opérations algébriques élémentaires, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente donc la série de terme général $\frac{u_n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, est convergente.

1) *Vocabulaire*. La transformation effectuée sur la somme $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, qui a consisté à remplacer u_k par $U_k - U_{k-1}$, est appelée *transformation d'Abel*.

On dit avoir effectué la transformation d'Abel sur la somme $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{u_k}{k}$.

2) *Remarque*. Dans la démonstration précédente, seul est intervenu le fait que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et non sa convergence.

2) Peut-on appliquer le même raisonnement à $\sum \frac{j^n}{n}$?

Posons $u_n = j^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Mais $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} j^k$; or $1 + j + j^2 = 0$.

Si $n \equiv 2(3)$ alors $\sum_{k=0}^{n} j^k = 0$.

Si $n \equiv 1(3)$ alors $\sum_{k=0}^{n} j^k = 1 + j$.

Si $n \equiv 0(3)$ alors $\sum_{k=0}^{n} j^k = 1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=0}^{n} j^n \right| \leqslant 2$.

Ainsi la suite des sommes partielles de la série $\sum j^n$ est bornée et, d'après le raisonnement de la question 1) et la remarque précédente, $\sum \frac{j^n}{n}$ est une série convergente.

> Bien sûr elle n'est pas absolument convergente car $\sum \frac{|j^n|}{n} = \sum \frac{1}{n}$ et on sait que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

Ex. 22

Soit f une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur lui-même, préciser la nature des séries de termes généraux :

$$u_n = \frac{1}{n f(n)} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{f(n)}{n^2}$$

> L'énoncé ne donnant pas la réponse, il faut la «deviner» et, pour ce faire, il est judicieux d'examiner un cas particulier.
>
> Pour $f = \mathrm{Id}$ on a $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $v_n = \frac{1}{n}$. Dans ce cas, $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge. On peut penser que cela reste vrai dans le cas général.

- Étude de $\sum u_n$

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n f(n)} \leqslant \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{f(n)^2} \right)$$

puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k f(k)} \leqslant \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)^2} \right)$$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ étant convergente, à termes positifs, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

De plus, f étant une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur lui-même, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $N = \max\left\{f(k) \,/\, 1 \leqslant k \leqslant n\right\}$, on a aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,f(k)} \leqslant \frac{\pi^2}{6}$$

ce qui prouve la convergence de $\sum u_n$ en tant que série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est majorée.

- Étude de $\sum v_n$

> On remarque que si $n_1, n_2, \dots, n_p$ sont p entiers non nuls deux à deux distincts, on a :
> $$n_1 + n_2 + \dots + n_p \geqslant 1 + 2 + \dots + p.$$
> En effet, en les supposant classés dans l'ordre croissant, on a :
> $$n_1 \geqslant 1,\ n_2 \geqslant 2,\ \dots,\ n_p \geqslant p$$
> d'où la conclusion.

Notons V_n la somme partielle d'ordre n de $\sum v_n$: $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$. Si la série $\sum v_n$ était convergente, en notant V sa somme, on aurait :

$$\lim_{n\to+\infty} V_{2n} = \lim_{n\to+\infty} V_n = V \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} V_{2n} - V_n = 0.$$

Or, on a :

$$V_{2n} - V_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{f(k)}{k^2} \geqslant \frac{1}{4n^2} \sum_{k=n+1}^{2n} f(k) \geqslant \frac{1+2+\dots+n}{4n^2} = \frac{n+1}{8n}$$

(d'après la remarque précédente) donc, puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{8n} = \frac{1}{8}$, on en déduit que $V_{2n} - V_n$ ne tend pas vers 0 et il en résulte que $\sum v_n$ diverge.

Ex. 23

Soit $\sum u_n$ une série convergente, on note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ son reste d'ordre n.

1) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, la différence $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} R_k - \sum_{k=1}^{k=n} k u_k$ en fonction de n et de R_n.

2) On suppose, de plus, $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que les séries $\sum n u_n$ et $\sum R_n$ sont de même nature et, en cas de convergence, comparer leurs sommes :

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} R_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{n=+\infty} n u_n.$$

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k = \sum_{k=1}^{n} k\left(R_{k-1} - R_k\right) = \sum_{k=1}^{n} kR_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} kR_k.$

Dans la première somme, le changement de variable $q = k - 1$ donne :

$$\sum_{k=1}^{n} kR_{k-1} = \sum_{q=0}^{n-1}(q+1)R_q .$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} ku_k &= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)R_k - \sum_{k=1}^{n} kR_k \\ &= R_0 - nR_n + \sum_{k=1}^{n-1}\big((k+1)R_k - kR_k\big) \\ &= R_0 - nR_n + \sum_{k=1}^{n-1} R_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_k - nR_n = \sum_{k=0}^{n} R_k - (n+1)R_n\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} R_k - \sum_{k=1}^{n} ku_k = (n+1)R_n .$$

2) Montrons que la convergence de $\sum R_n$ entraîne la convergence de $\sum ku_k$.
D'après le résultat précédent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} ku_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} R_k \quad \text{car } u_n \geqslant 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Or $\sum R_n$ converge, soit R sa somme ; comme $R_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} R_k \leqslant R$$

donc :

$$\sum_{k=1}^{n} ku_k \leqslant R \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles de la série *positive* $\sum ku_k$ est majorée, donc $\sum ku_k$ converge, et de plus on a $\sum_{n=0}^{+\infty} nu_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.

Pour la réciproque, on va, dans un premier temps, démontrer que si $\sum nu_n$ converge, alors la suite $(n+1)R_n$ converge.

Si la série $\sum ku_k$ converge, alors la suite de ses restes d'ordre n existe :

$$\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} ku_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

et elle converge, sa limite est 0.

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \geqslant n+1 \sum_{k=n+1}^{k=m} ku_k \geqslant \sum_{k=n+1}^{k=m} (n+1)u_k = (n+1)\sum_{k=n+1}^{m} u_k .$$

Par hypothèse, $\sum u_n$ converge, donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = R_n .$$

De même :
$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{m} k\,u_k=\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,u_k$$
donc, d'après les théorèmes sur les limites et relation d'ordre :
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} ku_k \geqslant (n+1)R_n \geqslant 0.$$
En appliquant le théorème d'encadrement aux suites :
$$\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} ku_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{convergente, de limite 0, et } \big((n+1)R_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$$
on obtient que la suite $\big((n+1)R_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite 0.

Maintenant, nous allons pouvoir conclure.

Or, d'après la question 1) :
$$\sum_{k=0}^{n} R_k-\sum_{k=0}^{n} ku_k=(n+1)R_n$$
donc la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} R_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est-à-dire que $\sum R_n$ converge, et on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n=\sum_{n=0}^{+\infty} nu_n\,.$$
En conclusion, les deux séries $\sum nu_n$ et $\sum R_n$ sont de même nature et, lorsqu'elles convergent, elles ont même somme :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} nu_n=\sum_{n=0}^{+\infty} R_n\,.$$

Ex. 24

1) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que, quel que soit $n\in\mathbb{N}^*$:
$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{u_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) \tag{1}$$

2) On suppose que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{u_n}$ est convergente. Montrer qu'il en est de même pour la série de terme général $\dfrac{n}{u_n+\cdots+u_n}$ et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{u_1+u_2+\cdots+u_n}\leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{u_n}$.

3) Montrer que 2 est la plus petite constante K réelle positive vérifiant :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{u_1+u_2+\cdots+u_n}\leqslant K\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{u_n}$$
pour toute suite $(u_n)\in\mathbb{R}_+^{*\mathbb{N}^*}$ telle que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{u_n}$ soit convergente.

On pourra, pour $n\in\mathbb{N}^*$ fixé, considérer la suite $(u_k)_{k\geqslant 1}$ définie par :
$$u_k=k \text{ si } 1\leqslant k\leqslant n \quad\text{et}\quad u_k=(n+1)2^{k-n} \text{ si } k\geqslant n+1.$$

1) On se doit de penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Avec $u = \left(\sqrt{u_1}, \sqrt{u_2}, \ldots, \sqrt{u_n}\right) \in \mathbb{R}^n$ et $v = \left(\frac{k}{\sqrt{u_1}}, \frac{k}{\sqrt{u_2}}, \ldots, \frac{k}{\sqrt{u_n}}\right) \in \mathbb{R}^n$, en utilisant le produit scalaire euclidien canonique, on a :

$$\langle u \mid v\rangle = \sum_{k=1}^{n^2} k \quad , \quad \| u \|^2 = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad \| v \|^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{u_k}$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\langle u \mid v\rangle^2 \leqslant \| u \|^2 \| v \|^2$ donne le résultat annoncé.

2) Essayons d'abord de faire le lien avec la question précédente.

Compte tenu de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, l'inégalité (1) donne :

$$\frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k} \leqslant \frac{4}{n(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{u_k} \tag{2}$$

À ce niveau, pour atteindre l'inégalité annoncée dans cette question 2), il parait nécessaire de majorer la somme partielle $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{u_1 + \cdots + u_n}$ en faisant apparaître la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{u_k}$ donc en permutant les sommes dans $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{4}{n(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{u_k}$.

Cependant cette permutation donne :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{4}{n(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{u_k} &= \sum_{k=1}^{N} \frac{4k^2}{u_k} \sum_{n=k}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{4k^2}{u_k}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1}\right) - \sum_{k=1}^{N} \frac{4k^2}{u_k} \sum_{n=k+1}^{N+1} \frac{1}{k^2} \leqslant 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{u_k}\end{aligned}$$

et on n'obtient pas le résultat souhaité !

On peut alors avoir l'idée de reprendre la majoration (2) en remplaçant :

$$\frac{4}{n(n+1)^2} \text{ par } \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

En remarquant que $\displaystyle\frac{4}{n(n+1)^2} = \frac{4n}{n^2(n+1)^2} = \frac{2(n+1)^2 - 2n^2 - 2}{n^2(n+1)^2} \leqslant \frac{2}{n^2} - \frac{2}{(n+1)^2}$ on obtient :

$$\frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k} \leqslant 2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{u_k} \tag{3}$$

En permutant les sommations, il vient maintenant :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{u_1 + \cdots + u_n} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{u_k} \sum_{n=k}^{N} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{u_1 + \cdots + u_n} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{u_k} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(N+1)^2}\right) \leqslant 2 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{u_k}.$$

Avec la majoration (3), les facteurs k^2 se sont simplifiés après permutation des sommations.

Enfin, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{u_n}$ étant convergente, on en déduit :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{u_1 + \cdots + u_n} \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}.$$

Il en résulte que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{u_1 + \cdots + u_n}$ converge en tant que série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est majorée et, en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{u_1 + \cdots + u_n} \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}.$$

3) En premier lieu, il y a lieu d'étudier la série $\sum \frac{1}{u_k}$.

À partir du rang $n+1$, $\sum \frac{1}{u_k}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc convergente, et sa somme est :

$$S(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}.$$

La série harmonique $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$ étant divergente, la somme $S(n)$ de la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{u_k}$ tend vers $+\infty$ lorsque le paramètre n tend lui-même vers $+\infty$.

Soit K une constante vérifiant les conditions annoncées. Avec la série ci-dessus on obtient :

$$K \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} = K \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{u_1 + \cdots + u_k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{u_1 + \cdots + u_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{k(k+1)}$$

c'est-à-dire :

$$K\, S(n) \geqslant 2S(n) - 2$$

soit encore :

$$K \geqslant 2 - \frac{2}{S(n)}.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit $K \geqslant 2 - 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{S(n)}$ c'est-à-dire $K \geqslant 2$.

Compte tenu du 2), cette inégalité prouve que 2 est le plus petit réel positif K tel que, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}_+^{*\mathbb{N}}$ pour laquelle $\sum \frac{1}{u_n}$ converge, on ait :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{u_1 + \cdots + u_n} \leqslant K \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

Ex. 25

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leqslant \dfrac{e}{n+1}$.

2) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{b_n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k}$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ est convergente.

1) Pas de mystère, il faut passer au logarithme.

La croissance de la fonction ℓn donne $\forall k \geqslant 2$, $\ell n\, k \geqslant \int_{k-1}^{k} \ell n\, x \mathrm{d}x$, donc :

$$\ell n \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ell n\, k \geqslant \frac{1}{n}\int_{1}^{n} \ell n\, x \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire $\ell n \sqrt[n]{n!} \geqslant \frac{1}{n}\left(n\,\ell n\, n - n + 1\right)$ soit aussi $\ell n \sqrt[n]{n!} \geqslant \ell n\, n + \frac{1}{n} - 1$.

Sachant que $\frac{1}{n} \geqslant \ell n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ell n(n+1) - \ell n\, n$, il vient $\ell n \sqrt[n]{n!} \geqslant \ell n(n+1) - 1$ et finalement :

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leqslant \frac{e}{n+1}. \qquad \textbf{(1)}$$

2) b_n est la moyenne harmonique des n nombres $a_1, \ldots, a_n$. C'est le moment de se souvenir que l'on sait comparer les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique de n réels strictement positifs.

Si $x_1, \ldots, x_n$ sont n réels strictement positifs, de par la concavité de la fonction ℓn, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ell n\, x_k \leqslant \ell n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right),$$

d'où :

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}\left(x_1 + \cdots + x_n\right). \qquad \textbf{(2)}$$

En conséquence, on a $\sqrt[n]{\dfrac{1}{a_1}\cdots\dfrac{1}{a_n}} \leqslant \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}\right)$, c'est-à-dire :

$$b_n \leqslant \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}. \qquad \textbf{(3)}$$

Pour conclure à la convergence de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} b_n$; il suffit donc de montrer la convergence de la série de terme général $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$.

Posons $c_n = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$. On a aussi $c_n = \left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod\limits_{k=1}^{n} k a_k\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

La majoration «naturelle» de la moyenne géométrique $\left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\right)$ par la moyenne arithmétique (formule **(2)**) s'avérant insuffisante, nous nous sommes laissés guider par l'énoncé en effectuant sur l'expression de c_n une manipulation permettant d'exploiter l'inégalité **(1)**.

D'après **(2)**, on a $\left(\prod_{k=1}^{n} k\,a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ka_k$ d'où, compte tenu de **(1)**, $c_n \leqslant \frac{e}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} ka_k$.

> L'apparition de la série télescopique de terme général $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ va nous permettre, au prix d'une permutation des sommations, de majorer les sommes partielles d'ordre n de la séries de terme général c_n en fonction de celles de la série de terme général a_n.

Avec la dernière inégalité, on obtient :

$$S_p = \sum_{n=1}^{p} c_n \leqslant e\sum_{n=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} \frac{ka_k}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{p} ka_k \sum_{n=k}^{p} \frac{1}{n(n+1)},$$

or :

$$\sum_{n=k}^{p} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=k}^{p}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{p+1} < \frac{1}{k},$$

donc :

$$S_p \leqslant \sum_{k=1}^{p} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

La suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ étant majorée, la série de terme général c_n converge, et il en est de même de la série de terme général b_n avec de plus :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Ex. 26

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \tan\left(7+4\sqrt{3}\right)^n \pi$.

> L'idée est simple : en posant $a_n = \left(7+4\sqrt{3}\right)^n$ et $b_n = \left(7-4\sqrt{3}\right)^n$, on a $a_n + b_n \in 2\mathbb{N}$ donc $\tan\left(a_n\pi\right) = -\tan\left(b_n\pi\right)$ et, puisque b_n tend vers 0, il vient $u_n \sim -b_n\pi$.

Avec la formule du binôme, on a :

$$\begin{aligned}
a_n = \left(7+4\sqrt{3}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, 4^k \cdot 3^{\frac{k}{2}} \cdot 7^{n-k} \\
&= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \mathrm{C}_n^{2k}\, 4^{2k} \cdot 3^k \cdot 7^{n-2k} + \sqrt{3} \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} \mathrm{C}_n^{2k+1}\, 4^{2k+1} \cdot 3^k \cdot 7^{n-2k-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n = \left(7-4\sqrt{3}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, 4^k \cdot (-1)^k \cdot 3^{\frac{k}{2}} \cdot 7^{n-k} \\
&= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \mathrm{C}_n^{2k}\, 4^{2k} \cdot 3^k \cdot 7^{n-2k} - \sqrt{3} \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} \mathrm{C}_n^{2k+1}\, 4^{2k+1} \cdot 3^k \cdot 7^{n-2k-1}
\end{aligned}$$

d'où :

$$a_n + b_n = 2\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \mathrm{C}_n^{2k}\, 4^{2k} \cdot 3^k \cdot 7^{n-2k} \in 2\mathbb{N} \quad \text{et} \quad u_n = \tan\left(\pi a_n\right) = -\tan\left(\pi b_n\right).$$

Remarquons alors que $\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right) = 49 - 48 = 1$, il en résulte $0 < 7 - 4\sqrt{3} < 1$ et $b_n = \frac{1}{a_n}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc $\tan\left(\pi b_n\right) \sim \pi b_n$.

Finalement, $u_n \sim -\pi\left(7-4\sqrt{3}\right)^n$, et la série géométrique $\sum\left(7-4\sqrt{3}\right)^n$ de raison $7-4\sqrt{3} \in]0,1[$ étant convergente, la règle des équivalents montre qu'il en est de même pour $\sum u_n$.

> Noter que $\sum u_n$ est de signe constant, négatif.

Ex. 27

On pose $\quad a_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

Prouver la convergence et calculer la somme de la série de terme général a_n, $n \geqslant 1$.

> En tant que suite des restes d'ordre n d'une série alternée convergente dont le terme général décroit en valeur absolue (c'est-à-dire vérifiant le critère spécial des séries alternées), on sait, d'après les théorèmes généraux, que la suite $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$ est alternée. Dans le but de montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ vérifie également ce critère spécial, il serait bien utile de disposer d'une expression simplifiée de $|a_n|$ et cela est rendu possible par la remarque suivante :
>
> $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\mathrm{d}t$$

En remarquant que $a_n = \displaystyle\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=n}^{n+p} (-1)^k \int_0^1 t^{k-1}\mathrm{d}t$, formons :

$$A_{n,p} = \sum_{k=n}^{n+p}(-1)^k \int_0^1 t^{k-1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=n}^{n+p}(-1)^k t^{k-1}\mathrm{d}t.$$

> On a ainsi fait apparaître une somme géométrique de raison $-t \neq 1$.

On a aussi :

$$\begin{aligned} A_{n,p} &= \int_0^1 (-1)^n t^{n-1}\frac{1-(-t)^{p+1}}{1+t}\mathrm{d}t \\ &= (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t}\mathrm{d}t + (-1)^{n+p}\int_0^1 \frac{t^{n+p}}{1+t}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On remarque que :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+p}}{1+t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{n+p}\mathrm{d}t = \frac{1}{n+p+1}$$

et on en déduit :

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^{n+p}}{1+t}\mathrm{d}t = 0 \quad \text{donc} \quad a_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Avec cette expression, il est clair que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ est alternée, et que a_n tend vers 0 car :

$$|a_n| \leqslant \int_0^1 t^{n-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}.$$

> Ce dernier point était déjà connu puisque a_n est le reste d'ordre n d'une série convergente.

D'autre part, on a $|a_n| = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t}\mathrm{d}t$ et la décroissance de $\left(|a_n|\right)_{n\geqslant 1}$ est maintenant claire puisque $\forall t \in [0,1]$, $0 \leqslant t^n \leqslant t^{n-1}$. Ainsi la série $\sum a_n$ converge d'après le critère spécial des séries alternées et sa somme est :

$$S=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1\frac{t^{n-1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Nous nous trouvons face à un problème de permutation série-intégrale, que nous n'allons pas essayer de résoudre par application d'un «gros» théorème du cours car, en considérant les sommes partielles, nous allons être en mesure de conclure tout simplement en utilisant des sommes géométriques.

On a aussi $S=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ avec $S_n=\sum\limits_{p=1}^{n}(-1)^p\int_0^1\frac{t^{p-1}}{1+t}\mathrm{d}t$ et la linéarité de l'intégrale donne :

$$S_n=\int_0^1\sum_{p=1}^{n}(-1)^p\frac{t^{p-1}}{1+t}\mathrm{d}t=\int_0^1-\frac{1-(-t)^n}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$$

On a encore vu apparaître une somme géométrique de raison $-t\neq 1$.

En écrivant :

$$S_n=-\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}+(-1)^n\int_0^1\frac{t^n}{(1+t)^2}\mathrm{d}t,\quad \text{avec}\ 0\leqslant\int_0^1\frac{t^n}{(1+t)^2}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1},$$

on obtient $S=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=-\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$, d'où finalement : $S=\left[\frac{1}{1+t}\right]_0^1=-\frac{1}{2}$.

En conclusion, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sum\limits_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}=-\frac{1}{2}$.

Ex. 28

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, convergente de limite nulle, et $p\in\mathbb{N}^*$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=(-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)}a_n$ où E désigne la fonction partie entière.

1) Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge, où :

$$v_n=\sum_{q=pn}^{q=pn+p-1}u_q\,.$$

2) Étudier la nature des séries $\sum u_n$ où :

a) $\begin{cases} u_n=0 & \text{si } n\in[\![0,2p-1]\!] \\ u_n=\dfrac{(-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)}}{\sqrt{E\left(\frac{n}{p}\right)+(-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)}}} & \text{pour tout } n\geqslant 2p\,; \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_n=0 & \text{si } n\in[\![0,2p-1]\!] \\ u_n=\dfrac{(-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)}}{\sqrt{E\left(\frac{n}{p}\right)+(-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)}}} & \text{pour tout } n\geqslant 2p. \end{cases}$

1) Étudions d'abord la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En remarquant que :

$$\forall q \in [\![pn, pn+p-1]\!],\ n \leqslant \frac{q}{p} \leqslant n + \frac{p-1}{p} = n + 1 - \frac{1}{q},$$

on obtient que :

$$\forall q \in [\![pn, pn+p-1]\!],\ E\left(\frac{q}{p}\right) = n.$$

Ainsi :

$$v_n = \sum_{q=pn}^{q=pn+p-1} u_q = \sum_{q=pn}^{q=pn+p-1} (-1)^{E\left(\frac{q}{p}\right)} \alpha_q = (-1)^n \sum_{q=pn}^{pn+p-1} \alpha_q,$$

or $\forall q \in \mathbb{N},\ \alpha_q \in \mathbb{R}_+^*$ donc :

$$\sum_{q=pn}^{pn+p-1} \alpha_q > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

et $\sum v_n$ est une série alternée.

On peut remarquer que, si $p = 1$, alors $v_n = u_n$ et $\sum u_n$ est une série alternée.

Comparons $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suites des sommes partielles respectives de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = \sum_{q=0}^{n} v_q = \sum_{q=0}^{q=n} \sum_{k=pq}^{k=pq+p-1} u_k = \sum_{k=0}^{k=pn+p-1} u_k = U_{pn+p-1}.$$

Si la série de terme général u_n converge, alors la suite $(U_n)_n$ converge et toute suite extraite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc la suite $(U_{pn+p-1})_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, converge aussi, donc la série $\sum v_n$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} U_{pn+p-1} = \lim_{n\to+\infty} V_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Réciproquement, si $\sum v_n$ converge alors la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et la suite $(U_{pn+p-1})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q = E\left(\dfrac{n-p+1}{p}\right)$ alors :

$$pq + p - 1 \leqslant n < p(q+1) + p - 1$$

et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{pq+p-1} u_k + \sum_{k=pq+p}^{n} u_k$$

donc :

$$U_n = U_{pq+p-1} + \sum_{k=pq+p}^{n} u_k = V_q + \sum_{k=pq+p}^{n} u_k$$

La somme :

$$\sum_{k=pq+p}^{n} u_k$$

contient au plus p termes chacun d'eux ayant, par hypothèse, une limite nulle, elle admet donc aussi 0 pour limite.

En remarquant que lorsque n tend vers l'infini, q tend aussi vers l'infini, on en déduit que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est la limite de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n .$$

On a ainsi montré que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge, et en cas de convergence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n .$$

2) a) Posons $\alpha_n = \dfrac{1}{\sqrt{E\left(\frac{n}{p}\right) + (-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)}}}$ pour tout $n \geqslant 2p$.

$$\alpha_n = 0 \text{ pour tout } n \in [\![0, 2p-1]\!]$$

$\forall n \geqslant 2p$, $\alpha_n > 0$, et $u_n = (-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)} \alpha_n$; $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.

La nature d'une suite, ou d'une série, n'étant pas modifiée lorsque l'on modifie un nombre fini de termes, les hypothèses de l'exercice sont donc vérifiées et $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{q=pn}^{q=pn+p-1} u_q = (-1)^n \sum_{q=pn}^{pn+p-1} \frac{1}{\sqrt{E\left(\frac{q}{p}\right) + (-1)^{E\left(\frac{q}{p}\right)}}}$$

$$= (-1)^n \sum_{q=pn}^{pn+p-1} \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}} = \frac{(-1)^n p}{\sqrt{n+(-1)^n}} .$$

La suite $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroissante, en effet :

$$\forall k \in \mathbb{N}, |v_{2k+1}| - |v_{2k}| = \frac{p}{\sqrt{2k}} - \frac{p}{\sqrt{2k+1}} \geqslant 0.$$

On ne peut donc pas appliquer le théorème des séries alternées (qui est une condition suffisante de convergence).

Effectuons alors un développement limité :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

La série alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série convergente ;

la série $w_n = \dfrac{1}{2n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ est une série à termes positifs et :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n\sqrt{n}} .$$

D'après le théorème des équivalents des séries à termes positifs, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ étant convergente, la série $\sum w_n$ est également convergente. Donc :

$$\sum v_n = p \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$$

est convergente en tant que somme de deux séries convergentes et, par suite, $\sum u_n$ est convergente.

b) Posons $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{E\left(\frac{n}{p}\right) + (-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)}}}$ pour tout $n \geqslant 2p$.

$$a_n = 0 \text{ pour tout } n \in [\![0, 2p-1]\!].$$

$\forall n \geqslant 2p$, $a_n > 0$, et $u_n = (-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)} a_n$, (a_n) est convergente de limite nulle.

Comme pour l'exemple a), $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{q=pn}^{q=pn+p-1} u_q = (-1)^n \sum_{q=pn}^{q=pn+p-1} \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{p(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

À nouveau, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'étant pas monotone, le théorème des séries alternées ne peut pas être appliqué, et un développement limité est maintenant :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Avec ici :

$$w_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

la série $\sum w_n$ est un série divergente (car $w_n \sim 1/n$ et par application du théorème des équivalents des séries à termes positifs). Donc :

$$\sum v_n = p \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

est divergente en tant que somme d'une série convergente et d'une série divergente et, par suite $\sum u_n$ est divergente.

Thèmes d'étude - Problèmes

1 Étude de suites Recherche d'équivalents

E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles. Soit $f\ :\ E \to E$ telle que, si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de E :

$$f(a) = \alpha \text{ avec } \alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = a_n + 2a_{n+1}.$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de E et déterminer son noyau.

2) a) Soit F le sous-espace vectoriel de E constitué des suites de E :

$$a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ avec } a_0 = 0.$$

Montrer que la restriction de f à F est une bijection de F sur E.

b) Soit $a \in F$ et $\alpha = f(a)$. Montrer que si α converge vers 0, il en est de même de a.

3) Soit $\alpha \in E$. Déterminer les suites $b \in E$ telles que $f(b) = \alpha$. Montrer que si α converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, b est une suite convergente, et préciser sa limite.

4) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 1 + \sqrt{u_n \cdot u_{n+1}}.$$

a) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{3} \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant 1.$$

c) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = u_n - u_{n-1} \quad \text{et} \quad v_0 = u_0.$$

Soit $\alpha = f(v)$. Montrer que la suite α est convergente. Quelle est sa limite ?

d) Montrer que, lorsque $n \to +\infty$, $u_{n+1} \sim u_n$.

Déterminer un équivalent, quand $n \to +\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k$ et en déduire $u_n \sim \dfrac{2n}{3}$.

e) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \alpha_n - 2$. Donner un équivalent de w_n quand n tend vers $+\infty$.

f) Soit $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = u_n - \frac{2}{3}n \quad \text{et} \quad \beta = f(b) = (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Donner un équivalent de β_n (quand n tend vers $+\infty$).

g) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (b_{n+1} - b_n)$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n$.

Déterminer un équivalent de b_n (quand n tend vers $+\infty$) et en déduire un développement asymptotique de u_n à deux termes quand $n \to +\infty$.

Solution

1) E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles donc aussi des applications de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

> Montrer que $f : E \to E$ est linéaire consiste, bien sûr, à vérifier que :
> $$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall(a, b) \in E^2, f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b)$$
> où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\lambda a + \mu b = (\lambda a_n + \mu b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\operatorname{Ker} f = \{a \in E \,/\, f(a) = 0\} = \{a \in E \,/\, \forall n \in \mathbb{N}, a_n + 2a_{n+1} = 0\}$$
$$\operatorname{Ker} f = \left\{a \Big/ a = \left(a_0\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\}.$$

Ainsi, $\operatorname{Ker} f$ est le sous-espace vectoriel de E des suites géométriques de raison $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

2) a) Soit $f_{|F} = g$, alors $g \in \mathscr{L}(F, E)$.

- Injectivité

$\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f \cap F = \left\{a \in E \Big/ a = a_0\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } a_0 = 0\right\}$, donc $\operatorname{Ker} g = \{0\}$ donc $g = f_{|F}$ est une application linéaire injective de F vers E.

- Surjectivité

Soit $\alpha \in E$; la suite $a \in E$ telle que :

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{\alpha_n - a_n}{2}$$

est un élément de F et vérifie $f_{|F}(a) = \alpha$, donc $f_{|F}$ est une application surjective.

On en déduit que $f_{|F}$ est un isomorphisme de F sur E.

> Bien sûr, il n'est pas question ici d'appliquer le théorème valable lorsque E et F sont deux K-espaces vectoriels de dimension finie vérifiant $\dim E = \dim F$: il est alors équivalent de dire, pour $u \in \mathscr{L}(E, F)$, u est injective, u est surjective, u est bijective.
>
> On peut remarquer que $f_{|F}$ est une bijection de F sur E avec $F \subsetneq E$.

b) On montre alors que, pour tout $\alpha \in E$, la suite $a \in F$ vérifiant $f(a) = \alpha$ est telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1}2^k\alpha_k$$

donc :

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}2^k|\alpha_k|.$$

Par hypothèse, la suite α converge et sa limite est nulle, donc $2^n|\alpha_n| = o(2^n)$.

$\sum 2^n|\alpha_n|$ et $\sum 2^n$ sont deux à deux séries à termes positifs et la série $\sum 2^n$ est divergente.

En appliquant un théorème de sommation des prépondérances pour les séries à termes positifs, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k |\alpha_k| = o\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k\right).$$

Comme $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$ et que $2^n - 1 \sim 2^n$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k |\alpha_k| = o(2^n),$$

ce qui donne que la suite $\left(|\alpha_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite nulle. Enfin, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est nulle.

3) D'après la question 2)a), $f_{|F}$ étant une application bijective de F dans E, il existe une unique suite $a \in F$ telle que que $f(a) = \alpha$. Par linéarité de f, on en déduit que :

$$\mathcal{T} = \left\{b \in E \,/\, f(b) = \alpha\right\} = \left\{a + u \,/\, u \in \operatorname{Ker} f\right\}.$$

> Par le raisonnement très classique :
> $$f(b) = \alpha \iff f(b) = f(a) \iff f(b-a) = 0$$
> (car f est linéaire) ; or $f(b-a) = 0 \iff b - a \in \operatorname{Ker} f$.

Si α converge vers ℓ, alors la suite $\alpha' = \left(\alpha_n - \ell\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est 0.

La suite constante $\left(\frac{\ell}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour image par f la suite $(\ell)_{n\in\mathbb{N}}$.

Par linéarité de f et d'après les résultats précédents :

$$\left\{b' \in E \,/\, f(b') = \alpha'\right\} = \left\{a - \left(\frac{\ell}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}} + u \,/\, u \in \operatorname{Ker} f\right\}$$

$$= \left\{a' + u \,/\, u \in \operatorname{Ker} f\right\} = \left\{b - \left(\frac{\ell}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, b \in \mathcal{T}\right\}$$

où a' est l'unique suite de F telle que $f(a') = \alpha'$, qui est convergente de limite 0, d'après 2)b).

> Le but est de «reconstituer» les hypothèses de la question 2)b) et d'appliquer ensuite les résultats sur les opérations algébriques élémentaires des suites convergentes.

On en déduit que :

$$\forall b \in \mathcal{T},\ \exists u \in \operatorname{Ker} f \,/\, b = a' + u + \left(\frac{\ell}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

u est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ donc convergente, de limite nulle. Donc la suite b converge et sa limite est $\frac{\ell}{3}$.

4) a) $u_0 = u_1 = \frac{3}{2}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 1 + \sqrt{u_n \cdot u_{n+1}}.$$

On peut d'abord montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{R}_+^*$ (par récurrence), donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

(i) Ensuite, comme $u_2 = \dfrac{5}{2}$, on remarque que :
$$u_0 < u_1 < u_2 .$$
(ii) Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ / $u_n \geqslant u_{n-1} \geqslant u_{n-2}$.
$u_n u_{n-1} \geqslant u_{n-1}^2 \geqslant u_{n-1} u_{n-2}$ car $u_{n-1} \in \mathbb{R}_+^*$:
$$1 + \sqrt{u_n u_{n-1}} \geqslant 1 + u_{n-1} \geqslant 1 + \sqrt{u_{n-1} u_{n-2}} = u_n$$
On obtient alors $u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant u_{n-1}$, la propriété est donc héréditaire et :
$$u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant u_{n-1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$
(iii) On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors soit elle converge, soit elle diverge en tendant vers $+\infty$.
Si elle converge, sa limite ℓ vérifie $\ell = 1 + \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$, ce qui est impossible.

> D'après la continuité de $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 1 + \sqrt{x \cdot y}$.

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge en tendant vers $+\infty$.

b) $u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ d'après la question précédente. On en déduit que :
$$u_{n+2} \geqslant 1 + u_n \geqslant u_{n+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

> Il suffit de reprendre les calculs de l'hérédité de la récurrence de la question précédente.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \geqslant u_{n+1} - u_n$, et comme la suite est croissante :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \geqslant u_{n+1} - u_n \geqslant 0.$$

> On veut «améliorer» cette inégalité en montrant que $\dfrac{1}{3} \leqslant u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = 1 + \sqrt{u_n u_{n-1}} - u_n \geqslant 1 + \sqrt{(u_n - 1)u_n} - u_n = \varphi(u_n)$$
où $\varphi : x \mapsto \sqrt{(x-1)x} - x + 1$ est définie et continue sur $[1, +\infty[$, dérivable sur $]1, +\infty[$ avec, pour tout $x \in]1, +\infty[$:
$$\varphi'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x(x-1)}} - 1 > 0.$$

> Car $(2x-1)^2 - 4x(x-1) = 1$, donc :
> $$\forall x \in]1, +\infty[,\ 2x - 1 > 2\sqrt{x(x-1)}$$
> puis :
> $$\forall x \in]1, +\infty[,\ \frac{(2x-1)}{2\sqrt{x(x-1)}} - 1 > 0.$$

Donc φ est croissante sur $[1, +\infty[$; ainsi :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n \geqslant \varphi(u_n) \geqslant \varphi(u_1) = \varphi\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 1\right)\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{3}.$$

D'où le résultat : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n \geqslant \dfrac{1}{3}$.

c) $\alpha = f(v)$ donc :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n &= v_n + 2v_{n+1} = 2u_{n+1} - u_n - u_{n-1}\\ &= 2\left(1 + \sqrt{u_n u_{n-1}}\right) - u_n - u_{n-1} = 2 - \left(\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}}\right)^2\end{aligned}$$

Or :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{3} \leqslant \left(\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}\right)\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}}\right) \leqslant 1$$

$$\text{et} \quad \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}} \in \mathbb{R}_+^* \ \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

donc :

$$\frac{1}{3\left(\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}\right)} \leqslant \sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}}$$

De plus $\left(\sqrt{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge en tendant vers $+\infty$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}} = 0.$$

Donc, d'après les théorèmes d'encadrement la suite $\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge avec :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}}\right) = 0$$

et il en résulte que $\left(\alpha_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 2$.

Enfin, d'après 3), $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{2}{3}$.

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{3} \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant 1$, or $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{3u_n} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \leqslant \frac{1}{u_n} \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0.$$

Par application du théorème d'encadrement, on obtient $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

> - Une erreur classique est de penser, qu'étant donné une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a toujours $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$; il n'en est, bien sûr, rien.
>
> Par exemple, soit la suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$ et donc, à l'exception de la suite constante égale à 1, on n'a jamais u_n et u_{n+1} équivalents !
>
> - On peut de plus remarquer ici que $u_{n+1} - u_n$ est compris entre $1/3$ et 1 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors que $u_{n+1} \sim u_n$, donc, si $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ce n'est pas vers 0.

$\sum \alpha_k$ et $\sum 2$ sont deux séries divergentes à termes positifs et vérifiant :

$$\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2.$$

Dans ces conditions, on démontre aisément que les sommes partielles sont équivalentes :

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \sim \sum_{k=0}^{n} 2 = 2(n+1).$$

Or :

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = \sum_{k=1}^{n} \left(2u_{k+1} - u_k - u_{k-1}\right) + \alpha_0$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} \left(u_{k+1} - u_k\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(u_k - u_{k-1}\right) + \alpha_0$$

$$= 2u_{n+1} + u_n - 3 = u_{n+1}\left(2 + \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{3}{u_{n+1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 3u_{n+1}$$

donc $u_{n+1} \sim \frac{2}{3}(n+1)$, soit aussi $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n$.

> Une autre démonstration consiste à appliquer le théorème de Cesaro à la suite $\left(\alpha_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 2, on a alors :
>
> $$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
>
> converge et sa limite est 2.
>
> *Remarque.* Ce théorème ainsi que le théorème de sommation des équivalences sont hors programme en PSI. Leur utilisation nécessite donc une démonstration directe.

e) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \alpha_n - 2$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \alpha_n - 2 = -\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}}\right)^2$$

$$= -\frac{\left(u_n - u_{n-1}\right)^2}{\left(\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}\right)^2} = \frac{-v_n^2}{\left(\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}\right)^2}$$

Or $\left(\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}\right)^2 = u_n\left(1 + \frac{\sqrt{u_{n-1}}}{\sqrt{u_n}}\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 4u_n$, donc :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{v_n^2}{4u_n} \text{ avec } v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3} \quad \text{donc} \quad w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6n}.$$

f) $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = u_n - \frac{2}{3}n$ et $\beta = f(b) = \left(\beta_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n = \left(u_n - \frac{2}{3}n\right) + 2\left(u_{n+1} - \frac{2(n+1)}{3}\right)$$

$$= u_n + 2u_{n+1} - 2n - \frac{4}{3}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k + 3 - 2n - \frac{4}{3}.$$

Or $\sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k - 2(n+1)$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n = \sum_{k=0}^{n} w_k + 2 + 3 - \frac{4}{3}.$$

En appliquant, à nouveau, le théorème de sommation des équivalences pour les séries à termes positifs divergentes, présenté dans le 4)d), on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} w_k \sim -\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\sim -\frac{1}{6}\ell n\, n$$

donc :

$$\beta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6}\ell n\, n.$$

g)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - b_n = \left(u_{n+1} - \frac{2(n+1)}{3}\right) - \left(u_n - \frac{2}{3}n\right)$$

$$= u_{n+1} - u_n - \frac{2}{3}$$

$$= v_{n+1} - \frac{2}{3}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \frac{2}{3}$ donc $(b_{n+1} - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et :

$$\lim_{n\to+\infty}(b_{n+1} - b_n) = 0.$$

De $b_{n+1} - b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\beta_n = b_n + 2b_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} = -\infty$ (car $\beta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6}\ell n\, n$), on tire :

$$3b_{n+1} = (b_{n+1} - b_n) + (b_n + 2b_{n+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

donc la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge en tendant vers $-\infty$. On déduit de ce résultat :

$$3b_{n+1} \sim -\frac{1}{6}\ell n\, n.$$

> En effet, $\dfrac{3b_{n+1}}{-\frac{1}{6}\ell n\, n} = \left(\dfrac{b_{n+1} - b_n}{-\frac{1}{6}\ell n\, n} + \dfrac{\beta_n}{-\frac{1}{6}\ell n\, n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, de plus, $b_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.

Donc $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{18}\ell n\, n$; or $u_n = b_n + \frac{2}{3}n$, donc :

$$u_n = \frac{2}{3}n - \frac{1}{18}\ell n\, n + o(\ell n\, n).$$

2 Produits infinis

Pour toute suite réelle ou complexe, le symbole :

$$\prod_{n=q}^{+\infty} u_n,$$

où q est un entier naturel donné, désigne la limite, *si elle existe*, de la suite p définie par :

$$n \mapsto \prod_{k=q}^{k=n} u_k = u_q \cdot u_{q+1} \cdot \cdots \cdot u_n, \quad (n \geqslant q).$$

Partie A

1) Démontrer l'existence et calculer les valeurs de :

$$\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right), \prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right), \prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right).$$

2) Soit u une suite réelle vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1.$$

a) Montrer que $\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe. Démontrer que $\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$ est non nul si et seulement si la série de terme général $\ln u_n$ est convergente.

b) Montrer que $\prod_{n=0}^{+\infty} (1+u_n)$ existe si et seulement si la série de terme général u_n est convergente.

c) Montrer que $\prod_{n=0}^{+\infty} (1+u_n)$ existe si et seulement si $\prod_{n=0}^{+\infty} (1-u_n)$ existe et est non nul.

Partie B

1) Démontrer l'existence et calculer les valeurs de :

$$\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right), \prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right).$$

2) Soit u une suite réelle vérifiant les deux conditions :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| < 1 \\ \text{la série de terme général } u_n \text{ est convergente} \end{cases}$$

a) Montrer que $\prod_{n=0}^{+\infty} (1+u_n)$ existe.

b) Montrer que $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)=0$ si et seulement si la série de terme général $(u_n)^2$ est divergente.

Partie C

1) Soit a la suite réelle définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}\ ,\ a_{2n-1}=-\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

a) Étudier la nature des séries de termes généraux a_n et $(a_n)^2$.

b) Montrer l'existence et calculer la valeur de $\prod_{n=3}^{+\infty}(1+a_n)$.

2) Soit u une suite réelle vérifiant les deux conditions :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, |u_n|<1 \\ \prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n) \text{ existe et est non nul} \end{cases}$$

a) Montrer que la série de terme général u_n est convergente si et seulement si la série de terme général $(u_n)^2$ est convergente.

b) Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}u_k=+\infty$$

si et seulement si la série de terme général $(u_n)^2$ est divergente.

Partie D

Soit u une suite complexe vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq -1$.

Montrer que si $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ existe et vaut 0, alors la série de terme général $\ln|1+u_n|$ est divergente ; de quelle manière ?

Partie E

Soit u une suite complexe vérifiant les deux conditions :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, |u_n|<1 \\ \text{la série de terme général } u_n \text{ est absolument convergente} \end{cases}$$

Pour tout nombre complexe non nul z, on note $\operatorname{Arg} z$ l'unique réel tel que :

$$-\pi<\operatorname{Arg} z\leqslant\pi \quad \text{et} \quad z=|z|\,e^{i\operatorname{Arg} z}.$$

1) Montrer que $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+|u_n|)$ existe. Montrer que ce réel est strictement supérieur à 1 à une condition que l'on précisera.

2) Montrer que la suite p définie par :

$$n \mapsto \prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$$

est une suite de Cauchy. On pourra démontrer et utiliser :

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)-1\right| \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+|a_k|)-1.$$

En déduire que $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ existe.

3) Montrer que la série de terme général $\ln|1+u_n|$ est absolument convergente.

4) Montrer $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n) \neq 0$.

5) Montrer que la série de terme général $\operatorname{Arg}(1+u_n)$ est absolument convergente.

Partie F

Soit u une suite complexe vérifiant $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ existe et est non nul.

1) Montrer que la suite u ne prend pas la valeur -1 et qu'elle admet 0 pour limite.

2) Montrer que la série de terme général $\ln|1+u_n|$ est convergente.

Solution

Partie A

1) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}}$ la suite définie par :

$$p_n = \prod_{k=2}^{n} u_k \quad \text{pour tout } n \geqslant 2,$$

alors :

(i) si $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 2$:

$$p_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

donc $(p_n)_{n\geqslant 2}$ converge et $\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$; donc :

$$\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 0$$

(ii) si $u_n = 1 - \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geqslant 2$:

$$p_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{(n-1)!(n+1)!}{2(n!)^2} = \frac{n+1}{2n}$$

donc $(p_n)_{n\geqslant 2}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}$; donc :

$$\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

(iii) si $u_n = 1 - \frac{2}{n(n+1)}$ pour tout $n \geqslant 2$:

$$p_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k-2}{k(k+1)} = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$$

$$= \frac{(n-1)!(n+2)!}{3n!(n+1)!} = \frac{n+2}{3n}$$

donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{3}$; donc :

$$\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3}.$$

> On peut remarquer que dans les cas (i), (ii), (iii), $u_1 = 0$ et que bien sûr :
>
> $$\prod_{k=1}^{n} u_k = 0 \quad \text{d'où l'étude de} \quad \prod_{k=2}^{n} u_k.$$

2) Soit $(p_n)_n$ la suite définie par $p_n = \prod\limits_{k=0}^{n} u_k$.

a) • $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \neq 0$ et $\frac{p_{n+1}}{p_n} = u_{n+1} < 1$; or $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n > 0$; donc la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par 0, donc convergente, d'où l'existence de :

$$\prod_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

• Comme u_n est strictement positif, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut associer la suite $(\ln p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\ln p_n = \sum_{k=0}^{n} \ln u_k, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} ;$$

$(\ln p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles de $\sum \ln u_n$, série à termes réels tous négatifs car $u_n \in \left]0, 1\right[$:

– si $\sum \ln u_n$ diverge alors $(\ln p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge en tendant vers $-\infty$ et, en écrivant $p_n = e^{\ln p_n}$, sachant que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, on obtient que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est nulle ; donc :

$$\prod_{n=0}^{+\infty} u_n = 0 ;$$

– si $\sum \ell n\, u_n$ converge alors $\left(\ell n\, p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, soit P sa limite. Par continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction exponentielle, on en déduit que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge avec $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = e^P > 0$.

Ainsi :

$$\prod_{n=0}^{+\infty} u_n = e^P.$$

En conséquence, $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \neq 0$ équivaut à $\sum \ell n\, u_n$ converge.

b) En remarquant ici que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < 1 + u_n$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ell n\left(1+u_n\right) > 0.$$

Alors :

- si $\sum \ell n(1+u_n)$ diverge, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \ell n\left(1+u_k\right) = +\infty$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} \left(1+u_k\right) = +\infty$.

En effet, avec :

$$\sum_{k=0}^{n} \ell n\left(1+u_k\right) = \ell n\, p_n\,,$$

on voit que $\left(\ell n\, p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles d'une série à termes strictement positifs divergente, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell n\, p_n = +\infty$ et, avec $p_n = e^{\ell n\, p_n}$, il vient $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = +\infty$.

- si $\sum \ell n\left(1+u_n\right)$ converge, soit S sa somme. On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ell n\left(1+u_k\right) = S \in \mathbb{R} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{n\to+\infty} \ell n\, p_n = S.$$

Par continuité en S de la fonction exponentielle, on en déduit que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge avec $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = e^S$, et donc :

$$\prod_{n=0}^{+\infty} \left(1+u_k\right) = e^S.$$

En conséquence, $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} \left(1+u_n\right)$ existe si et seulement si $\sum \ell n\left(1+u_n\right)$ converge.

Or si $\sum \ell n\left(1+u_n\right)$ converge, alors la suite $\left(\ell n\left(1+u_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et, toujours par continuité de la fonction exponentielle, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est nulle. On en déduit alors :

$$\ell n\left(1+u_n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n\,,$$

puis avec la règle des équivalents pour les séries à termes positifs, on obtient que $\sum u_n$ converge. Réciproquement, si $\sum u_n$ converge alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle, donc $\ell n\left(1+u_n\right) \sim u_n$ et toujours par la règle des équivalents des séries à termes positifs $\sum \ell n\left(1+u_n\right)$ converge. Ainsi :

$$\prod_{n=0}^{+\infty} \left(1+u_n\right) \text{ existe si et seulement si } \sum u_n \text{ converge.}$$

c) La règle des équivalents pour les séries à termes positifs donne les équivalences successives suivantes :

$$\begin{array}{lcl} \sum \ln\left(1+u_n\right) \text{ converge} & \Longleftrightarrow & \sum u_n \text{ converge} \\ \sum \ln\left(1-u_n\right) \text{ converge} & \Longleftrightarrow & \sum u_n \text{ converge} \end{array}$$

puis, d'après b) :

$$\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1+u_n\right) \text{ existe si et seulement si } \sum u_n \text{ converge}$$

et, d'après a) :

$$\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1-u_n\right) \text{ existe et est non nul si et seulement si } \sum u_n \text{ converge.}$$

D'où le résultat :

$$\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1+u_n\right) \text{ existe si et seulement si } \prod_{n=0}^{+\infty}\left(1-u_n\right) \text{ existe et est non nul.}$$

> On peut remarquer qu'avec l'hypothèse $u_n \in \left]0,1\right[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:
>
> $$\forall n \in \mathbb{N},\ \prod_{k=0}^{n}\left(1+u_n\right) > 1 \quad \text{et} \quad 0 < \prod_{k=0}^{n}\left(1-u_n\right) < 1.$$

Partie B

1) • $\displaystyle\prod_{k=2}^{2n+1}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2k}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right).$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Posons :

$$p_n = \prod_{k=2}^{n} u_k \quad \text{où } u_k = 1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

et étudions la suite extraite de rang impair $\left(p_{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

$$p_{2n+1} = \prod_{k=2}^{2n+1}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+2}{2k+1} = \frac{2n+2}{2}\times\frac{1}{2n+1} \to \frac{1}{2}.$$

Donc la suite extraite de rang impair converge et sa limite est $1/2$.

La suite extraite de rang pair $\left(p_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$p_{2n} = p_{2n-1}\times u_{2n}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{2n} = p_{2n-1}\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)$ alors $\left(p_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_{2n} = \frac{1}{2}$.

(p_n) ayant ses suites extraites de rang impair et de rang pair convergentes et de même limite, converge donc avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n = 1/2$ et on en conclut :

$$\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) = \frac{1}{2}.$$

• Posons $u_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$, $v_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ et $w_n = u_n - v_n$.

La série $\sum v_n$ converge d'après le critère des séries alternées.

De $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, on déduit que $w_n \sim -\dfrac{1}{2n}$ donc la série $\sum w_n$ diverge par application de la règle des équivalents, avec de plus :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} w_k = -\infty$$

car il s'agit d'une série à termes négatifs à partir d'un certain rang.

On en déduit que $\sum u_n$ diverge avec :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} u_k = -\infty$$

donc :

$$\prod_{k=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) = 0.$$

En effet, en posant à nouveau :

$$p_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right), \text{ donc } \ell n\, p_n = \sum_{k=2}^{n} u_k\,,$$

puisque $\left(\ell n\, p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge en tendant vers $-\infty$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est 0 (car $p_n = e^{\ell n\, p_n}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$).

2) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| < 1$, $\sum u_n$ converge donc $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et on a :

$$\ell n\left(1 + u_n\right) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o\left(u_n^2\right).$$

- Si $\sum u_n^2$ converge, comme $\sum u_n$ converge, alors $\sum \ell n\left(1 + u_n\right)$ converge de somme S, or :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ell n\, p_n = \sum_{k=0}^{n} \ell n\left(1 + u_k\right)$$

donc la suite $\left(\ell n\, p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puis $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $P = e^S > 0$ par continuité de la fonction exponentielle, donc :

$$\prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 + u_n\right) = P.$$

- Si $\sum u_n^2$ diverge, alors puisque $v_n = -\frac{1}{2}u_n^2 + o\left(u_n^2\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2}u_n^2$, d'après la règle des équivalents, la série $\sum v_n$ est également divergente, à termes négatifs à partir d'un certain rang.

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} v_k = -\infty$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\ell n\left(1 + u_k\right) - u_k\right) = -\infty$.

Or $\sum u_n$ est convergente, donc $\sum \ell n\left(1 + u_n\right)$ est divergente et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ell n\left(1 + u_k\right) = -\infty,$$

d'où il résulte que $\left(\ln p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge en tendant vers $-\infty$ puis que $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$ c'est-à-dire :

$$\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1+u_n\right)=0.$$

b) D'après a) (avec les hypothèses : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| < 1$ et $\sum u_n$ converge) :

$$\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1+u_n\right)$$

existe dans tous les cas et est nul si et seulement si $\sum u_n^2$ diverge.

Partie C

1) $a_{2n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$. $a_{2n-1} = -\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

a) $\sum a_n$: $a_{2n} + a_{2n-1} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{n}$, donc $\sum\left(a_{2n}+a_{2n-1}\right)$ diverge d'après la règle des équivalents pour les séries à termes positifs.

$\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant la suite des sommes partielles de la série $\sum a_n$, on a pour tout $n \geqslant 1$, $S_{2n} = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(a_{2k}+a_{2k-1}\right)$, donc $\left(S_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge en tendant vers $+\infty$, et $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi, c'est-à-dire que $\sum a_n$ diverge.

$\sum a_n^2$: $a_{2n}^2 \geqslant \dfrac{1}{n}$, $a_{2n+1}^2 = \dfrac{1}{n}$ donc $a_n^2 \geqslant \dfrac{1}{n}$ et $\sum a_n^2$ diverge d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs avec $\sum(1/n)$ série divergente.

b) Posons $p_n = \prod\limits_{k=3}^{n}\left(1+a_k\right)$.

On peut remarquer que :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \left(1+a_{2n-1}\right)\left(1+a_{2n}\right) &= \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\\ &= \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1-\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

donc :

$$p_{2n} = \prod_{k=2}^{n}\left(1+a_{2k-1}\right)\left(1+a_{2k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \quad \text{d'après A.1)a).}$$

Or :

$$p_{2n+1} = p_{2n} \times \left(1+a_{2n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

donc $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1,2\}}$ converge et :

$$\prod_{n=3}^{+\infty}(1+u_n)=\frac{1}{2}$$

(en effet, les suites extraites de rang pair et de rang impair convergent et ont la même limite $1/2$, donc (p_n) converge).

2) a) On suppose que $|u_n|<1$, et que :

$$\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$$

existe et est $\neq 0$, donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $\ln(1+u_n)$ a un sens et en posant :

$$p_n=\prod_{k=0}^{n}(1+u_k),\ \text{on a}\ \ln p_n=\sum_{k=0}^{n}\ln(1+u_k).$$

Comme $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite p est positive (car $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $1+u_k>0$ donc $p_n>0$) et non nulle par hypothèse, on obtient que la suite $(\ln p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est $\ln p$ (continuité de la fonction $\ln$). Donc $\sum\ln(1+u_n)$ est convergente, ce qui entraine que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est 0, donc :

$$\ln(1+u_n)=u_n-\frac{u_n^2}{2}+o(u_n^2)$$

et les séries :

$$\sum u_n\ \text{et}\ \sum\left(-\frac{u_n^2}{2}+o(u_n^2)\right)$$

sont de même nature. Or par la règle des équivalents des séries de termes de signe constant les séries :

$$-\frac{u_n^2}{2}\quad\text{et}\quad-\frac{u_n^2}{2}+o(u_n^2)$$

sont de même nature, de plus $\sum-\frac{u_n^2}{2}$ et $\sum u_n^2$ sont de même nature, donc $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ sont de même nature.

Ainsi $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum u_n^2$ converge.

b) On a aussi $u_n-\ln(1+u_n)\sim\frac{u_n^2}{2}$.

$\sum u_n^2$ diverge si et seulement si $\sum(1/2)u_n^2$ est divergente et on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}u_k^2=+\infty$$

donc, d'après la règle des équivalents pour les séries à termes positifs divergentes, il vient :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(u_k-\ln(1+u_k)\right)=+\infty.$$

Enfin, puisque $\sum\ln(1+u_n)$ converge, on en déduit que :

$$\sum u_n\ \text{diverge}\quad\text{et}\quad\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}u_k=+\infty.$$

La réciproque est évidente.

Partie D

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 1$. On suppose que :

$$\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)=0$$

ce qui signifie que la suite (p_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n=\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$$

converge et a pour limite 0 donc $(|p_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite 0 ; or :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |p_n|=\prod_{k=0}^{n}|1+u_k|$$

donc la série de terme général $\ln|1+u_n|$ diverge et on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\ln|1+u_k|=-\infty.$$

Partie E

1) Comme $\sum|u_n|$ est absolument convergente et $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n|<1$, d'après B.a) :

$$\prod_{n=0}^{+\infty}(1+|u_n|) \text{ existe.}$$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite 0 car $\sum|u_n|$ est absolument convergente, on a :

$$\ln(1+|u_n|)\underset{n\to\infty}{\sim}|u_n|.$$

D'après la règle des équivalents des séries à termes positifs : $\sum\ln(1+|u_n|)$ est une série convergente et, en posant :

$$S=\sum_{n=0}^{+\infty}\ln(1+|u_n|),$$

on a :

$$\prod_{n=0}^{+\infty}(1+|u_n|)=e^S\geq 1$$

(car $S\in\mathbb{R}^+$ et la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$), donc :

$$\begin{aligned} e^S>1 &\iff S\in\mathbb{R}_+^* \iff \exists n_0\in\mathbb{N}, \ln(1+|u_{n_0}|)>0 \\ &\iff \exists n_0\in\mathbb{N}, |u_{n_0}|\neq 0 \end{aligned}$$

2) On développe :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n}(1+a_k) &= 1+\sum a_{k_1}+\sum a_{k_1}a_{k_2}+\sum a_{k_1}a_{k_2}a_{k_3}+\cdots+\prod a_{k_i} \\ &= 1+P(a_1,\ldots,a_n) \\ \prod_{k=1}^{n}(1+|a_k|) &= 1+\sum|a_{k_1}|+\sum|a_{k_1}a_{k_2}|+\sum|a_{k_1}a_{k_2}a_{k_3}|+\cdots+\prod|a_{k_i}| \\ &= 1+P(|a_1|,\ldots,|a_n|) \end{aligned}$$

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)-1\right| = \left|P(a_1,\dots,a_n)\right| \leqslant P(|a_1|,\dots,|a_n|) = \prod_{k=1}^{n}(1+|a_k|)-1.$$

En conséquence $n \mapsto \prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$ est de Cauchy, en effet :

$$\prod_{k=0}^{n+p}(1+u_k) - \prod_{k=0}^{n-1}(1+u_k) = \left(\prod_{k=n}^{n+p}(1+u_k)-1\right)\prod_{k=0}^{n-1}(1+u_k)$$

donc :

$$\begin{aligned}\left|\prod_{k=0}^{n+p}(1+u_k) - \prod_{k=0}^{n-1}(1+u_k)\right| &\leqslant \left(\prod_{k=0}^{n-1}(1+|u_k|)\right)\left(\prod_{k=n}^{n+p}(1+|u_k|)-1\right)\\ &= \prod_{k=0}^{n+p}(1+|u_k|) - \prod_{k=0}^{n-1}(1+|u_k|)\end{aligned}$$

et, puisque la suite $n \mapsto \prod_{k=0}^{n}(1+|u_k|)$ est de Cauchy, il en est de même pour $n \mapsto \prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$.

Donc la suite $\left(\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et on en déduit que $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ existe.

3) Montrons que $\sum \ell n\,|1+u_n|$ est absolument convergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u_n = x_n + iy_n$, alors :

$$\begin{aligned}|1+u_n|^2 = (1+u_n)(1+\overline{u_n}) &= 1 + 2\operatorname{Re} u_n + |u_n|^2\\ &= 1 + 2x_n + |u_n|^2.\end{aligned}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| < 1$ donne $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n|^2 \leqslant |u_n|$, et d'autre part : $|x_n| = |\operatorname{Re} u_n| \leqslant |u_n|$, donc d'après les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs, comme $\sum u_n$ est absolument convergente, les séries :

$$\sum |u_n|^2 \quad \text{et} \quad \sum |x_n| \quad \text{sont convergentes.}$$

On peut donc faire un développement limité (car les suites (x_n) et $(|u_n|)^2$ convergent vers 0) :

$$\ell n\,|1+u_n| = \frac{1}{2}\,\ell n\left(1+2x_n+|u_n|^2\right) = \frac{1}{2}\Big(2x_n + o(|u_n|)\Big) = x_n + o(|u_n|)$$

car $|u_n|^2 = o(|u_n|)$ et $|x_n| \leqslant |u_n|$.

On en déduit que la série de terme général $\ell n\,|1+u_n|$ est absolument convergente.

4) $$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n}(1+u_k) &= \prod_{k=0}^{n}\left(|1+u_k|\,e^{i(\operatorname{Arg}(1+u_n))}\right)\\ &= \left(\prod_{k=0}^{n}|1+u_k|\right)\prod_{k=0}^{n}\left(e^{i(\operatorname{Arg}(1+u_n))}\right)\\ &= \left(\prod_{k=0}^{n}|1+u_k|\right)e^{i\sum_{k=0}^{n}\operatorname{Arg}(1+u_n)}\end{aligned}$$

donc :

$$\left|\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)\right| = \prod_{k=0}^{n}|1+u_k| = p_n.$$

Or $\ln p_n = \sum_{k=0}^{n} \ln|1+u_k|$ (par hypotèse $|u_k| < 1$ donc $|1+u_k| \neq 0$) donc :

$$p_n = e^{\sum_{k=0}^{n} \ln|1+u_n|}.$$

La série $\sum \ln|1+u_n|$ étant absolument convergente, soit S sa somme, alors $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (continuité de la fonction exponentielle) et :

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = e^S > 0,$$

donc $\left(\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est $e^S > 0$ ainsi :

$$\left|\prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_n)\right| \neq 0 \quad \text{donc} \quad \prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_n) \neq 0.$$

5) Soit (v_n) définie par $v_n = |u_n|\, e^{i|\operatorname{Arg} u_n|}$ alors $\operatorname{Arg}(1+v_n) = |\operatorname{Arg}(1+u_n)|$, et on a $|v_n| = |u_n|$, donc d'après 2) :

$$\prod_{n=0}^{+\infty}(1+v_n) \text{ existe.}$$

Or $\operatorname{Arg}\prod_{k=0}^{n}(1+v_k) = \sum_{k=0}^{n}\operatorname{Arg}(1+v_k) = \sum_{k=0}^{n}|\operatorname{Arg}(1+u_k)|$ tend vers $\operatorname{Arg}\prod_{n=0}^{+\infty}(1+v_n)$ donc $\sum \operatorname{Arg}(1+u_n)$ est absolument convergente.

Partie F

1) u ne prend pas la valeur -1 ; en effet supposons qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = -1$ alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, supérieur à n_0, $p_n = 0$ et la suite constante $(p_n)_{n\geq n_0}$ est convergente de limite 0, ce qui est contraire à :

$$\prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_n) \text{ est } \neq 0.$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $p_n \neq 0$, par suite :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \frac{p_n}{p_{n-1}} = 1+u_n \quad \text{donc} \quad u_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} - 1$$

or $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite P est $\neq 0$ donc :

$$\left(\frac{p_n}{p_{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

converge et sa limite est $\frac{P}{P} = 1$, ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2) La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$p_n = \prod_{k=0}^{n}(1+u_k) \text{ pour tout } n\in\mathbb{N},$$

converge, et sa limite est $P \neq 0$; donc la suite réelle $(|p_n|)_n$ converge et sa limite est $|P|$, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |p_n| = \prod_{k=0}^{n} |1 + u_k|.$$

Alors, la fonction ℓn étant continue, la suite $\left(\ell n\,|p_n| \right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est $\ell n\,|P|$; c'est-à-dire que la série de terme général $\ell n\,|1 + u_n|$ converge et que sa somme est $\ell n\,|P|$.

Avec $\ell n\,|P| = \ell n \left(\prod_{n=0}^{+\infty} |1 + u_n| \right)$, on obtient donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \ell n\,|1 + u_n| = \ell n \left(\prod_{n=0}^{+\infty} |1 + u_n| \right).$$

CHAPITRE 4

Espaces préhilbertiens
Espaces euclidiens
Coniques – Quadriques

Sujets d'oraux

(A) Produit scalaire

Ex. 1

Soit E un espace préhilbertien réel, $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in E^n$, $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in E^n$ deux familles de vecteurs telles que :

$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ \langle x_i \mid x_j\rangle = \langle y_i \mid y_j\rangle.$$

On pose $X=\operatorname{Vect}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $Y=\operatorname{Vect}(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

1) Comparer $\dim X$ et $\dim Y$.

2) Montrer qu'il existe une application linéaire unique f telle que :

$$\forall i\in [\![1,n]\!],\ f(x_i)=y_i$$

et que cette application est un isomorphisme de X sur Y.

1) La matrice $G(X)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de terme général $\langle x_i \mid y_i\rangle$, n'est autre que la matrice de Gram du système $(x_1,\dots,x_n)$. Une première solution consiste donc à démontrer que :

$$\operatorname{rg} G(X)=\operatorname{rg}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}.$$

- Première solution

Posons $G(X)=\left[\langle x_i \mid x_j\rangle\right]$: $G(X)\in S_n(\mathbb{R})$.

Si $(x_1\dots x_n)$ est libre, c'est une base de X et $G(X)$ est la matrice sur cette base du produit scalaire $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ de l'espace X. Dans ce cas, on a donc $G(X)\in GL_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire $\operatorname{rg} G(X)=n=\dim X$.

Remarquons maintenant que si l'on fait subir aux vecteurs x_i, $1\leqslant i\leqslant n$, une permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, la matrice de Gram :

$$G(X_\sigma)=\left[\langle x_{\sigma(i)} \mid x_{\sigma(j)}\rangle\right]$$

du système $(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})$ se déduit de $G(X)$ en effectuant cette permutation σ sur les colonnes et sur les lignes, et on a donc :

$$\operatorname{rg} G(X)=\operatorname{rg} G(X_\sigma).$$

Supposons $\operatorname{rg}(x_1,\dots,x_n)=r$ avec $1\leqslant r<n$. À une permutation près, on peut se ramener au cas où $(x_1,\dots,x_r)$ est libre avec :

$$\forall i\in [\![r+1,n]\!],\ x_i\in\operatorname{Vect}(x_1,\dots,x_n).$$

Alors pour tout $i\in [\![r+1,n]\!]$, il existe $(\lambda_{i,1},\dots,\lambda_{i,r})\in\mathbb{R}^r$ tel que :

$$x_i=\sum_{k=1}^{r}\lambda_{i,k}x_k$$

d'où :

$$\forall j\in [\![1,n]\!],\ \langle x_i \mid x_j\rangle=\sum_{k=1}^{r}\lambda_{i,k}\langle x_k \mid x_j\rangle$$

soit aussi :

$$L_i = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{i,k} L_k \quad \text{et} \quad C_i = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{i,k} C_k$$

en notant $L_1, \ldots, L_n$ et $C_1, \ldots, C_n$ les lignes et colonnes de $G(X)$. On en déduit :

$$\operatorname{rg}\left[\left\langle x_i \mid x_j \right\rangle\right]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = \operatorname{rg}\left[\left\langle x_i \mid x_j \right\rangle\right]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = \operatorname{rg}\left[\left\langle x_i \mid x_j \right\rangle\right]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant j \leqslant r}}$$

et, puisque $(x_1, \ldots, x_r)$ est libre, $\operatorname{rg} G(X) = r$ c'est-à-dire $\operatorname{rg} G(X) = \dim X$.

Notons enfin que si $G(X) = 0$, alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0$ donc $X = \{0\}$ et on a encore :

$$\operatorname{rg} G(X) = \dim X.$$

Cette propriété est donc vraie dans les tous les cas.

Conséquence : avec $G(X) = G(Y)$, il vient $\dim X = \dim Y$.

- Deuxième solution

Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est réduit au vecteur nul, il en est de même pour $(y_1, \ldots, y_n)$ et on a :

$$\dim X = \dim Y = 0.$$

On suppose maintenant que $(x_1, \ldots, x_n)$ est non réduit à 0, il en est donc de même pour $(y_1, \ldots, y_n)$ et on a :

$$\dim X \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \dim Y \geqslant 1.$$

Posons $p = \dim X$ et soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une base orthonormale de X. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, il existe $\left(\alpha_{ij}\right)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ tel que :

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j$$

et on pose :

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_j.$$

Il vient alors pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$:

$$\begin{aligned} \left\langle v_i \mid v_j \right\rangle &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{ik}\, \alpha_{j\ell} \left\langle y_k \mid y_\ell \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{ik}\, \alpha_{j\ell} \left\langle x_k \mid x_\ell \right\rangle \\ &= \left\langle u_i \mid u_j \right\rangle = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Ainsi $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est un système orthonormal, donc libre, de Y et $p \leqslant \dim Y$, c'est-à-dire :

$$\dim X \leqslant \dim Y.$$

Symétriquement, on a aussi $\dim Y \leqslant \dim X$, d'où finalement $\dim X = \dim Y$.

2) Posons $p = \dim X = \dim Y$ et écartons le cas trivial où $p = 0$. À une permutation près, on peut se ramener au cas où $(x_1, \ldots, x_p)$ est une base de X et $(y_1, \ldots, y_p)$ une base de Y. Alors on sait qu'il existe une application linéaire f et une seule de X dans Y telle que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ f(x_i) = y_i$$

et cette application est un isomorphisme de X sur Y. Il reste donc à démontrer que l'on a encore $f(x_i) = y_i$ pour $i \in [\![p+1, n]\!]$.

Remarquons d'abord que f conserve le produit scalaire. En effet, pour $(x, x') \in X^2$, il existe $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{R}^p$ et $(\alpha'_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{R}^p$, uniques, tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i \quad \text{et} \quad x' = \sum_{i=1}^{p} \alpha'_i x_i$$

et, par définition de f, on obtient :

$$\begin{aligned}\langle f(x) \mid f(x') \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(x_i) \,\middle|\, \sum_{j=1}^{p} \alpha'_j f(x_j) \right\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{p} \alpha'_j y_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \alpha_i \alpha'_j \langle y_i \mid y_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \alpha_i \alpha'_j \langle x_i \mid x_j \rangle = \langle x \mid x' \rangle\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \forall j \in [\![p+1, n]\!] \quad \left\langle f(x_i) \,\middle|\, f(x_j) \right\rangle = \langle x_i \mid x_j \rangle$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad \langle y_i \mid f(x_j) \rangle = \langle y_i \mid y_j \rangle$$

$$\text{ou encore} \quad \langle y_i \mid f(x_j) - y_j \rangle = 0.$$

Puisque $(y_1, \dots, y_p)$ est une base Y, ces relations (vraies pour $i = 1, \dots, p$) donnent que $f(x_j) - y_j \in Y^\perp$ et comme d'autre part $f(x_j) - y_j \in Y$, il vient :

$$f(x_j) - y_j \in Y \cap Y^\perp \quad \text{soit} \quad f(x_j) - y_j = 0.$$

On a ainsi prouvé que $f(x_j) = y_j$ pour tout $y \in [\![1, n]\!]$.

(B) Projections orthogonales – Distances

Ex. 2

Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}, (P, Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{1-t^2}\,dt.$

1) Montrer que φ est un produit scalaire.

2) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes réels $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in \mathbb{R}, \sin(n+1)u = \sin u \, Q_n(\cos u).$$

Donner le degré et le coefficient dominant de Q_n .

3) Montrer que les Q_n sont deux à deux orthogonaux.

4) On considère l'application :

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto \int_{-1}^{1} \left(t^3 + xt^2 + yt + z\right)^2 \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

Montrer que g admet un minimum et dire en quel(s) point(s) il est atteint.

1) C'est presque du cours. Il faut simplement montrer à l'examinateur que l'on connaît parfaitement les définitions usuelles et ceci sans s'étendre exagérément sur le sujet.

Il est clair que φ est une application symétrique, et la linéarité de l'intégrale nous donne que φ est bilinéaire symétrique.

Pour $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$, la fonction $t \mapsto P(t)^2\sqrt{1-t^2}$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0,1]$, donc :

$$\varphi(P,P) = \int_{-1}^{1} P(t)^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t > 0.$$

On a ainsi vérifié que φ est un produit scalaire.

2) Là aussi la question est classique : les Q_n sont les polynômes de Tchebichev de deuxième espèce.

Avec :

$$\begin{aligned}\sin(n+1)u &= \operatorname{Im}\left(\cos u + i\sin u\right)^{n+1} = \operatorname{Im}\sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^{k}\, i^k \sin^k u \cos^{n+1-k} u \\ &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \mathrm{C}_{n+1}^{2k+1}(-1)^k \sin^{2k+1} u \cos^{n-2k} u \\ &= \sin u \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \mathrm{C}_{n+1}^{2k+1}(-1)^k\left(1-\cos^2 u\right)^k \cos^{n-2k} u.\end{aligned}$$

on voit que les polynômes :

$$Q_n(X) = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \mathrm{C}_{n+1}^{2k+1}(-1)^k\left(1-X^2\right)^k X^{n-2k}$$

conviennent.

Compte tenu de $\deg\left(1-X^2\right)^k X^{n-2k} = n$, on obtient $\deg Q_n \leqslant n$ et, puisque le coefficient de X^n est :

$$\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \mathrm{C}_{n+1}^{2k+1} > 0$$

on a $\deg Q_n = n$.

En développant par la formule du binôme :

$$\begin{aligned} (1+1)^{n+1} &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n+1} \mathrm{C}_{n+1}^{2k} + \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \mathrm{C}_{n+1}^{2k+1} \\ \text{et}\quad (1-1)^{n+1} &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n+1} \mathrm{C}_{n+1}^{2k} + \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \mathrm{C}_{n+1}^{2k+1}\end{aligned}$$

on obtient :

$$\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n+1} \mathrm{C}_{n+1}^{2k} = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \mathrm{C}_{n+1}^{2k+1} = 2^n$$

ce qui donne le coefficient dominant de Q_n.

Notons enfin que l'unicité est évidente. En effet, si un polynôme R_n vérifie également :

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \sin(n+1)u = \sin u\, R_n(\cos u)$$

on voit que le polynôme $Q_n - R_n$ a une infinité de racines et qu'il est donc nul.

3) La définition des Q_n doit inciter à calculer les intégrales :

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)Q_p(x)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

au moyen du changement de variable défini par $x = \cos u$.

On a :

$$\left\langle Q_n \,\middle|\, Q_p \right\rangle = \int_0^\pi Q_n(\cos u) Q_p(\cos u) \sin^2 u \, \mathrm{d}u$$
$$= \int_0^\pi \sin(n+1)u \sin(p+1)u \, \mathrm{d}u$$
$$= -\frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\cos(n+p+2)u - \cos(n-p)u \right) \mathrm{d}u$$

donc, pour $n \neq p$:

$$\left\langle Q_n \,\middle|\, Q_p \right\rangle = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-p)u}{n-p} \right]_0^\pi - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n+p+2)u}{n+p+2} \right]_0^\pi = 0.$$

On a ainsi vérifié que la famille $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale et on peut aussi remarquer que ce calcul donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|Q_n\|^2 = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(1 - \cos 2(n+1)u\right) \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} \text{ donc } \|Q_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous notons X^n la fonction polynôme $x \mapsto x^n$, le problème revient ici à minimiser $\|X^3 - P\|^2$ lorsque P décrit $\mathbb{R}_2[X]$. C'est du cours : on sait que ce minimum est atteint en un point P et un seul qui est le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

D'après le 3), une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ est (Q_0, Q_1, Q_2), donc le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ est :

$$P = \frac{\left\langle X^3 \,\middle|\, Q_0 \right\rangle Q_0}{\|Q_0\|^2} + \frac{\left\langle X^3 \,\middle|\, Q_1 \right\rangle Q_1}{\|Q_1\|^2} + \frac{\left\langle X^3 \,\middle|\, Q_2 \right\rangle Q_2}{\|Q_2\|^2}$$

$$\text{soit} \qquad P = \frac{2}{\pi} \left(\left\langle X^3 \,\middle|\, 1 \right\rangle + 4 \left\langle X^3 \,\middle|\, X \right\rangle X + \left\langle X^3 \,\middle|\, 4X^2 - 1 \right\rangle (4X^2 - 1) \right).$$

Pour tout n, p entiers naturels, on a :

$$\left\langle X^n \,\middle|\, X^p \right\rangle = \int_{-1}^1 t^{n+p} \sqrt{1 + t^2} \mathrm{d}t = \int_0^\pi \cos^{n+p} u \sin^2 u \, \mathrm{d}u$$

donc, si $n + p$ est impair, la fonction $\varphi \; : \; u \mapsto \cos^{n+p} u \sin^2 u$ vérifie $\varphi(\pi - u) = -\varphi(u)$ et :

$$\left\langle X^n \,\middle|\, X^p \right\rangle = \int_0^\pi \varphi(u) \mathrm{d}u = 0.$$

D'autre part, on obtient :

$$\left\langle X^3 \,\middle|\, X \right\rangle = \int_0^\pi \cos^4 u \sin^2 u \, \mathrm{d}u$$

et par linéarisation :

$$\cos^4 u \sin^2 u = \frac{1}{32} (2 + \cos 2u - 2 \cos 4u - \cos 6u)$$

d'où $\left\langle X^3 \,\middle|\, X \right\rangle = \dfrac{\pi}{16}$ et finalement $P = \dfrac{X}{2}$.

Ainsi la fonction g atteint son minimum au point :

$$(x, y, z) = \left(0, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

et, d'après le théorème de Pythagore, ce minimum est égal à :

$$\|X^3 - P\|^2 = \|X^3\|^2 - \|P\|^2 = \|X^3\|^2 - \frac{1}{4} \|X\|^2.$$

Le calcul fournit :

$$\left\|X^3\right\|^2 = \int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^2 x \mathrm{d}x = \frac{5\pi}{128}$$

$$\|X\|^2 = \int_0^{\pi} \cos^2 x \sin^2 x \mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$$

d'où :

$$\left\|X^3 - P\right\|^2 = \min_{\mathbb{R}_2[X]} g = \frac{5\pi}{128} - \frac{\pi}{32} = \frac{\pi}{128}.$$

Ex. 3

Trouver $\inf_{(a_i)_{1\leq i\leq n}\in\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \left(1 + a_1 x + \dots + a_n x^n\right)^2 e^{-x}\mathrm{d}x.$

La question est classique. En considérant un espace préhilbertien bien choisi, on interprète le minimum demandé, au moyen de la distance d'un point, à un sous-espace de dimension finie.

Introduisons sur l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}_n[X]$ le produit scalaire :

$$E^2 \to \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \left\langle f \mid g\right\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x}\mathrm{d}x.$$

Les vérifications d'usage pour un produit scalaire sont aisées et laissées au lecteur.
Néammoins, il faut prendre garde à ne pas omettre de prouver que, quels que soient f et g dans E, la fonction $x \mapsto f(x)g(x)e^{-x}$ est intégrable sur $\left[0, +\infty\right[$, ce qui résulte de sa continuité et, par exemple, de $f(x)g(x)e^{-x} \underset{+\infty}{=} O\left(x^{2n}e^{-x}\right)$ donc :

$$f(x)g(x)e^{-x} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Si H désigne l'hyperplan $\operatorname{Vect}\left(X, X^2, \dots, X^n\right)$, il s'agit d'évaluer :

$$\mathrm{d}^2(1, H) = \inf_{P\in H} \| 1 - P \|^2.$$

Soit Q le projeté orthogonal de 1 sur H, alors :

$$d^2(1, H) = \| 1 - Q \|^2 = \| 1 \|^2 - \| Q \|^2.$$

Nous utiliserons le résultat suivant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\mathrm{d}x = k!.$$

En notant $Q = \sum_{j=1}^{n} a_j X^j$ le vecteur $1 - Q$ est caractérisé par :

$$\forall k \in \left\{1, 2, \dots, n\right\}, \left\langle 1 - Q \mid X^k\right\rangle = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], k! - \sum_{j=1}^{n} (j+k)! a_j = 0.$$

Nous sommes maintenant ramené, comme il est usuel, à la résolution d'un système linéaire. Or, il est difficilement envisageable d'utiliser la méthode traditionnelle du pivot de Gauss, ce qui fait que la question est ici bien moins classique. Une idée intéressante est d'observer que l'on sait que ce système admet une solution et une seule donc, si on peut en exhiber une, par exemple, grâce à une identité algébrique bien choisie, ce sera la bonne.

Uitlisons alors le calcul auxiliaire suivant :

$$(1-X)^n X^k = X^k + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \mathrm{C}_n^j X^{j+k}$$

$$\left[(1-X)^n X^k\right]^{(k+1)} = k!X + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \mathrm{C}_n^j (j+k)! \frac{X^{j+1}}{(j+1)!}$$

et, pour $X = 1$:

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ 0 = k! - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \mathrm{C}_n^j \frac{(j+k)!}{(j+1)!}.$$

L'unicité de Q donne alors :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ a_j = \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!} \mathrm{C}_n^j \quad \text{et} \quad Q = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!} \mathrm{C}_n^j X^j$$

Formons alors :

$$d^2(1, H) = \| 1 \|^2 - \| Q \|^2 = \| 1 \|^2 - \langle 1 \mid Q \rangle$$

$$d^2(1, H) = 1 - \int_0^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!} \mathrm{C}_n^j x^j \right) e^{-x} \mathrm{d}x$$

$$d^2(1, H) = 1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j+1}}{j+1} \mathrm{C}_n^j = 1 - \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \mathrm{C}_{n+1}^{j+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \sum_{j=2}^{n} (-1)^j \mathrm{C}_{n+1}^j$$

Or $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \mathrm{C}_{n+1}^j = (1-1)^{n+1} = 0$ donc :

$$\sum_{j=2}^{n} (-1)^j \mathrm{C}_{n+1}^j = -1 + (n+1) + \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \mathrm{C}_{n+1}^j = n$$

et :

$$d^2(1, H) = 1 - \frac{n}{n+1}.$$

En conclusion :

$$\inf_{(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \left(1 + a_1 x + \dots + a_n x^n\right)^2 e^{-x} \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

Ex. 4

Trouver $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que :

$$\int_0^1 f(x) h''(x) \mathrm{d}x = 0 \ \text{ pour tout } h \in F$$

où $F = \{h \in C^2([0,1], \mathbb{R}) \ / \ h(0) = h(1) = h'(0) = h'(1) = 0\}$.

Étant donné $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$, on sait que l'application :

$$E^2 \to \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \int_0^1 fg$$

est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

D'autre part, il est clair que F est un sous-espace vectoriel de E et, puisque l'opérateur de dérivation est linéaire, lorsque h décrit F, h'' décrit le sous-espace vectoriel $H = D^2(F)$. Le problème revient donc à déterminer l'orthogonal $H^\perp$ de D^2F et la question est évidemment compliquée par le fait que H n'est pas de dimension finie.

Remarquons d'abord que, lorsque f est de classe $\mathcal{C}^2$, deux intégrations par parties successives donnent pour tout $h \in F$:

$$\int_0^1 f(x)h''(x)\mathrm{d}x = \left[f(x)h'(x)\right]_0^1 - \int_0^1 f'(x)h'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 f'(x)h'(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 f(x)h''(x)\mathrm{d}x = \left[-f'(x)h(x)\right]_0^1 + \int_0^1 f''(x)h(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f''(x)h(x)\mathrm{d}x$$

donc :

$$\langle f \mid h''\rangle = \langle f'' \mid h\rangle.$$

De ce calcul il résulte que toute fonction affine appartient à $H^\perp$ puisque l'on a alors $f'' = 0$. En notant A le plan vectoriel de E constitué des fonctions affines, cela s'écrit $A \subset H^\perp$.

A est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto \alpha x + \beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire le plan vectoriel engendré par $\mathrm{Id} : x \mapsto x$ et $1 : x \mapsto 1$.

Nous nous proposons maintenant de prouver que $H^\perp \subset A$, c'est-à-dire que tout f de $H^\perp$ est égal à son projeté orthogonal g sur A.

A étant de dimension finie, on a $E = A \oplus A^\perp$, ce qui permet de définir la projection orthogonale sur A.

Avec cette définition de g, on a $f - g \in A^\perp$. Montrons que l'on a aussi $f - g \in H$, c'est-à-dire qu'il existe $h \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ vérifiant :

$$f - g = h'' \quad \text{et} \quad h(0) = h(1) = h'(0) = h'(1) = 0.$$

Si une telle fonction h existe, on a nécessairement :

$$\forall x \in [0,1],\ h'(x) = \int_0^x \big(f(t) - g(t)\big)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad h(x) = \int_0^x h'(t)\mathrm{d}t$$

donc :

$$h(x) = \int_0^x \left(\int_0^t \big(f(u) - g(u)\big)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$$

soit, d'après Fubini :

$$h(x) = \int_0^x \left(\int_u^x \big(f(u) - g(u)\big)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u = \int_0^x (x-u)\big(f(u) - g(u)\big)\,\mathrm{d}u.$$

La continuité de f et g donne celle de $(u,t) \mapsto f(u) - g(u)$ et justifie l'application du théorème de Fubini.

Réciproquement, puisque f et g sont continues sur $[0,1]$, la fonction :

$$x \mapsto \int_0^x \big(f(t) - g(t)\big)\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, puis :

$$h : x \mapsto \int_0^x \left(\int_0^t \big(f(u) - g(u)\big)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ avec :

$$h'(x) = \int_0^x \big(f(t) - g(t)\big)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad h''(x) = f(x) - g(x)$$

et on a évidemment :

$$h'(0) = h(0) = 0.$$

D'autre part, $f - g \in A^\perp$ donne $\langle f - g \mid 1 \rangle = 0$ et $\langle f - g \mid \mathrm{Id} \rangle = 0$, c'est-à-dire :

$$\int_0^1 \big(f(t) - g(t)\big)\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 t\big(f(t) - g(t)\big)\mathrm{d}t = 0$$

donc aussi :

$$h'(1) = 0 \quad \text{et} \quad h(1) = \int_0^1 (1-t)\big(f(t) - g(t)\big)\mathrm{d}t = \int_0^1 \big(f(t) - g(t)\big)\mathrm{d}t - \int_0^1 t\big(f(t) - g(t)\big)\mathrm{d}t = 0.$$

On a ainsi montré qu'il existe h unique dans $C^2\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ vérifiant :

$$f - g = h'' \text{ et } h(0) = h(1) = h'(0) = h'(1) = 0, \text{ donc que } f - g \in H.$$

Avec $f \in H^\perp$ et $f - g \in H$, on obtient $\langle f \mid f - g \rangle = 0$ et, avec $g \in A$ et $f - g \in A^\perp$, il vient :

$$\langle g \mid f - g \rangle = 0 \quad \text{d'où} \quad \|f - g\|^2 = \langle f - g \mid f - g \rangle = 0 \quad \text{et enfin} \quad f = g,$$

ce qui prouve que $f \in A$ et donc $H^\perp \subset A$.

En conclusion, on a $H^\perp = A$ c'est-à-dire que les fonctions f recherchées sont les fonctions affines :

$$x \mapsto ax + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

C Adjoint Réduction des endomorphismes symétriques

Ex. 5

On note $S_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,/\, {}^tM = M\}$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $A \in S_2(\mathbb{R})$ à coefficients positifs et semblable à D.

> On sait que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable, en conséquence, pour que $A \in S_2(\mathbb{R})$ soit semblable à $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, il faut et il suffit que le spectre de A soit $\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

- Condition nécessaire

Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ sont semblables, on a :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + b = \operatorname{Tr} A$$

donc en supposant de plus $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, il vient $\lambda_1 + \lambda_2 \geqslant 0$.

- Condition suffisante

D'après la remarque préliminaire, montrer que $\lambda_1 + \lambda_2 \geqslant 0$ assure l'existence de $A \in S_2(\mathbb{R}^+)$ telle que A soit semblable à D revient à prouver que, sous cette condition, on peut trouver a, b, c réels positifs tels que λ_1 et λ_2 soient les racines de $X^2 - (a+b)X + ab - c^2$, c'est-à-dire tels que $a + b = \lambda_1 + \lambda_2$, $ab - c^2 = \lambda_1\lambda_2$.

• Analyse

Si a, b, c existent, a et b sont racines positives de l'équation :

$$(E): \quad X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_1 \lambda_2 + c^2 = 0$$

on a donc $\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 4c^2 \geqslant 0$ et $\lambda_1 \lambda_2 + c^2 \geqslant 0$, soit :

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \geqslant 4c^2 \geqslant -4\lambda_1 \lambda_2$$

• Synthèse

Avec $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\lambda_1\lambda_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2$, on obtient $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \geqslant -4\lambda_1\lambda_2$ donc, puisque $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \geqslant 0$, il existe $c \geqslant 0$ tel que $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \geqslant 4c^2 \geqslant -4\lambda_1\lambda_2$ (il suffit, par exemple, de prendre $c = 1/2\,|\lambda_1 - \lambda_2|$). Alors l'équation (E) admet des racines réelles a et b positives, car $\Delta \geqslant 0$, $a + b \geqslant 0$ et $ab \geqslant 0$, et la matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ symétrique réelle, à coefficients dans $\mathbb{R}^+$, admet pour valeurs propres λ_1 et λ_2, donc est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

En conclusion, il existe $A \in S_2(\mathbb{R}^+)$ semblable à D si et seulement si $\lambda_1 + \lambda_2 \geqslant 0$.

Ex. 6

On note $S_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, {}^tM = M\}$.

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, à coefficients positifs et $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A. Montrer que $\lambda_1 \geqslant |\lambda_n|$.

> Pour établir un lien simple entre les coefficients a_{ij} d'une matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ et ses valeurs propres, on peut penser à introduire l'application $q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :
> $$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ q_A(X) = {}^tXAX$$
> ($\mathbb{R}^n$ est canoniquement identifiée à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

Si X_n est vecteur propre de A associé à λ_n, il vient $AX_n = \lambda_n X_n$ donc :

$$q_A(X_n) = \lambda_n\, {}^tX_nX_n = \lambda_n \|X_n\|^2 \quad \text{et} \quad |q_A(X_n)| = |\lambda_n|\, \|X_n\|^2 \tag{1}$$

> ${}^tXX = \|X\|^2$ est le carré de la norme euclidienne canonique de X.

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, nous posons $\overline{X} = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}$, on obtient :

$$q_A(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

donc, compte tenu de la positivité des a_{ij} :

$$|q_A(X)| \leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} |x_i|\, |x_j| \quad \text{c'est-à-dire} \quad |q_A(x)| \leqslant q_A(\overline{X}) \tag{2}$$

A étant symétrique réelle, on sait qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (matrice orthogonale) telle que :

$${}^tPAP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, en posant $X = PY$, on a $\|X\|^2 = \|Y\|^2$ et :

$$q_A(X) = {}^tY\,{}^tPAPY = {}^tYDY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \quad \text{où l'on a posé } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Il en résulte $q_A(X) \leqslant \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ c'est-à-dire $q_A(X) \leqslant \lambda_1 \| Y \|^2$ ou encore :

$$q_A(X) \leqslant \lambda_1 \| X \|^2. \tag{3}$$

Avec les relations (1), (2) et (3), on obtient :

$$|\lambda_n| \| X_n \|^2 \leqslant q_A(\overline{X}_n) \leqslant \lambda_1 \| \overline{X_n} \|^2 = \lambda_1 \| X_n \|^2$$

donc, puisque $X_n \neq 0$, $|\lambda_n| \leqslant \lambda_1$.

Ex. 7

Soit E un espace euclidien de dimension n. On munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme subordonnée à la norme euclidienne de E.

Pour $r \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{V}_r$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension r. Enfin, on note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints (ou symétriques) de E.

1) Soit $A \in \mathcal{S}(E)$, de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ avec $\lambda_i \leqslant \lambda_{i+1}$. Montrer que :

$$\forall r \in [\![1, n]\!],\ \lambda_r = \min_{V \in \mathcal{V}_r} \max_{\substack{x \in V \\ \| x \| = 1}} \langle x \mid Ax \rangle.$$

2) Soit $B \in \mathcal{S}(E)$, de valeurs propres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ avec $\mu_i \leqslant \mu_{i+1}$. Montrer que :

$$\forall r \in [\![1, n]\!],\ |\lambda_r - \mu_r| \leqslant |\!|\!| A - B |\!|\!|.$$

1) La première chose à faire est évidemment d'utiliser que A est diagonalisable dans une base orthonormale.

Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de A :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ Ae_i = \lambda_i e_i.$$

Pour tout $x \in E$, on pose :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

et il vient :

$$\langle x \mid Ax \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$$

Pour tout $x \in [\![1, n]\!]$ et tout $V \in \mathcal{V}_r$, l'ensemble :

$$S_V = \{ x \in V \ / \ \| x \| = 1 \}$$

est un compact en tant que fermé-borné d'un espace de dimension finie et l'application :

$$q \ : \ x \mapsto \langle x \mid Ax \rangle$$

est continue car A est continue en tant qu'application linéaire sur un espace de dimension finie et le produit scalaire est continu sur E^2. Il en résulte que q est bornée sur S_V et qu'elle atteint ses bornes, ce qui justifie l'existence de :

$$M_V = \max \{ \langle x \mid Ax \rangle \ / \ x \in S_V \}.$$

De :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

on déduit :

$$\forall x \in E,\ \| x \| = 1 \ \Rightarrow \ q(x) \geqslant \lambda_1$$

donc l'ensemble $\{M_V \,/\, V \in \mathcal{V}_r\} \subset \mathbb{R}$ est non vide et minoré par λ_1 ce qui assure l'existence de :

$$m = \inf_{V \in \mathcal{V}_r} M_V .$$

> On notera cependant que, d'après l'énoncé, cette borne inférieure doit être un minimum. Pour le justifier, il va donc falloir prouver qu'elle est atteinte.

Le sous-espace $V_r = \mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_r)$ est de dimension r et pour $x \in V_r$ tel que $\|x\| = 1$, on a :

$$\langle x \mid Ax \rangle = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_r \sum_{i=1}^{r} x_i^2 = \lambda_r ,$$

donc :

$$\max_{x \in S_{V_r}} \langle x \mid Ax \rangle \leqslant \lambda_r .$$

D'autre part, $\langle e_r \mid Ae_r \rangle = \lambda_r$ avec $e_r \in V_r$ et $\|e_r\| = 1$, donc :

$$\lambda_r = \max_{x \in S_{V_r}} \langle x \mid Ax \rangle$$

et il en résulte :

$$m = \inf_{V \in \mathcal{V}_r} M_V \leqslant \lambda_r. \qquad (i)$$

Soit maintenant $V \in \mathcal{V}_r$: V est quelconque de dimension r. Posons :

$$W = \mathrm{Vect}\,(e_r, e_{r+1}, \dots, e_n).$$

Pour $x \in W$ tel que $\|x\| = 1$, on a :

$$\langle x \mid Ax \rangle \geqslant \lambda_r .$$

Puisque $\dim V + \dim W = n + 1$, on a $\dim V \cap W \geqslant 1$ donc il existe $z \in V \cap W$ tel que $\|z\| = 1$ et alors $\langle z \mid Az \rangle \geqslant \lambda_r$ montre que :

$$M_V = \max_{x \in S_V} \langle x \mid Ax \rangle \geqslant \lambda_r .$$

Ceci étant vrai pour tout $V \in \mathcal{V}_r$ on en déduit :

$$m = \inf_{V \in \mathcal{V}_r} M_V \geqslant \lambda_r . \qquad (ii)$$

Enfin les inégalités (i) et (ii) donnent $m = \lambda_r$ et la valeur λ_r étant atteinte $(q(e_r) = \lambda_r)$, cette borne inférieure est un minimum.

2) Au besoin en échangeant A et B, on peut supposer que $\mu_r \leqslant \lambda_r$ et alors :

$$|\lambda_r - \mu_r| = \lambda_r - \mu_r = \min_{V \in \mathcal{V}_r} \max_{x \in S_V} \langle x \mid Ax \rangle - \min_{V \in \mathcal{V}_r} \max_{x \in S_V} \langle x \mid Bx \rangle .$$

Il existe $V_0 \in \mathcal{V}_r$ tel que :

$$\min_{V \in \mathcal{V}_r} \max_{x \in S_V} \langle x \mid Bx \rangle = \max_{x \in S_{V_0}} \langle x \mid Bx \rangle ,$$

d'où :

$$|\lambda_r - \mu_r| = \min_{V \in \mathcal{V}_r} \max_{x \in S_V} \langle x \mid Ax \rangle - \max_{x \in S_{V_0}} \langle x \mid Bx \rangle \leqslant \max_{x \in S_{V_0}} \langle x \mid Ax \rangle - \max_{x \in S_{V_0}} \langle x \mid Bx \rangle .$$

Il existe $x_0 \in S_{V_0}$ tel que :

$$\max_{x \in S_{V_0}} \langle x \mid Ax \rangle = \langle x_0 \mid Ax_0 \rangle ,$$

d'où :

$$|\lambda_r - \mu_r| = \langle x_0 \mid Ax_0 \rangle - \max_{x \in S_{V_0}} \langle x \mid Bx \rangle \leqslant \langle x_0 \mid Ax_0 \rangle - \langle x_0 \mid Bx_0 \rangle ,$$

soit :

$$|\lambda_r - \mu_r| \leqslant \langle x_0 \mid (A - B)x_0 \rangle$$

et, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la définition de $|||A - B|||$:

$$|\lambda_r - \mu_r| \leqslant \|x_0\| \, \|(A - B)x_0\| \leqslant |||A - B||| \, \|x_0\|^2 = |||A - B||| .$$

Ex. 8

L'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est identifié à $\mathbb{R}^n$ par isomorphisme canonique, on le suppose muni de sa structure euclidienne canonique et S désigne sa sphère unité :

$$S = \left\{X \in \mathbb{R}^n \, / \, \| X \| = 1\right\}.$$

Une matrice A symétrique réelle d'ordre n étant donnée, calculer :

$$\inf\left\{\operatorname{Tr}\left[\left(A - \lambda X\,{}^tX\right)^2\right] \, / \, \lambda \in \mathbb{R}, X \in S\right\}.$$

Il est visible que $\lambda \mapsto \operatorname{Tr}\left[\left(A - \lambda X\,{}^tX\right)^2\right]$ est une fonction polynôme. La première chose à faire semble être de développer cette expression.

Posons $F(X, \lambda) = \operatorname{Tr}\left[\left(A - \lambda X\,{}^tX\right)^2\right]$. En développant le carré et sachant que Tr est linéaire, il vient :

$$F(X, \lambda) = \lambda^2 \operatorname{Tr}\left(X\,{}^tXX\,{}^tX\right) - \lambda \operatorname{Tr}\left(AX\,{}^tX\right) - \lambda \operatorname{Tr}\left(X\,{}^tXA\right) + \operatorname{Tr}\left(A^2\right)$$

puis avec la propriété fondamentale $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\operatorname{Tr}(MN) = \operatorname{Tr}(NM)$:

$$F(X, \lambda) = \lambda^2 \operatorname{Tr}\left({}^tXX\,{}^tXX\right) - 2\lambda \operatorname{Tr}\left({}^tXAX\right) + \operatorname{Tr}\left(A^2\right).$$

On remarque alors que ${}^tXX = \| X \|^2 = 1$ lorsque $X \in S$, et que ${}^tXAX$ est sur $\mathbb{R}^n$, l'expression matricielle de $q_A(X)$ où q_A est la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ associée à A dans la base canonique, pour obtenir finalement :

$$F(X, \lambda) = \lambda^2 - 2\lambda\, q_A(X) + \operatorname{Tr}\left(A^2\right).$$

Pour tout $X \in S$ fixé, la fonction polynôme $\lambda \mapsto F(X, \lambda)$ atteint son minimum au point $\lambda_0 = q_A(X)$, la valeur de ce minimum est :

$$m(X) = \operatorname{Tr}\left(A^2\right) - q_A(X)^2.$$

Pour simplifier cette expression, il faut maintenant penser à réduire A dans le groupe orthogonal.

On sait qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP = \operatorname{diag}\left(\mu_1, \ldots, \mu_n\right)$ où les μ_i sont les valeurs propres de A et on peut supposer que cette réduction a été effectuée de façon que :

$$|\mu_1| \leqslant |\mu_2| \leqslant \ldots \leqslant |\mu_n|.$$

En posant $X = PY$ c'est-à-dire $Y = {}^tPX$, on obtient alors avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$:

$$\forall X \in S,\ m(X) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i^2\right)^2$$

et comme d'autre part ${}^tYY = {}^tXX = 1$, il vient :

$$q(X)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |\mu_n|\, y_i^2\right)^2 = \mu_n^2$$

donc :

$$\forall X \in S,\ m(X) \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^2.$$

En conséquence, on obtient :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall X \in S,\ F(X, \lambda) \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^2$$

ce qui prouve l'existence de :

$$\inf\left\{F(X,\lambda)\ /\ \lambda\in\mathbb{R}, X\in S\right\}\geqslant\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i^2.$$

Considérons X_0 vecteur propre de A, associé à la valeur propre μ_n tel que $\|X_0\| = 1$, et $\lambda_0 = q_A(X_0)$; on a alors :

$$F(X_0,\lambda_0)=\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i^2$$

donc cette borne inférieure est atteinte : c'est un minimum.

En conclusion :

$$\min\left\{\operatorname{Tr}\left[\left(A-\lambda X\,{}^tX\right)^2\right]\ /\ \lambda\in\mathbb{R}, X\in S\right\}=\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i^2=\operatorname{Tr}A^2-\max_{\mu\in\operatorname{Sp}A}\mu^2.$$

Ex. 9

Soit E un espace euclidien et $u\in\mathcal{L}(E)$ dont on note $N(u)$ la norme subordonnée.

1) Montrer que $N(u)=\sup\left\{\langle u(x)\,|\,y\rangle\ /\ (x,y)\in E^2, \|x\|\leqslant 1, \|y\|\leqslant 1\right\}$.

En déduire $N(u)=N(u^*)$.

2) On suppose $N(u)\leqslant 1$. Montrer que $\operatorname{Ker}\left(u^*-\operatorname{Id}_E\right)=\operatorname{Ker}\left(u-\operatorname{Id}_E\right)$.

1) Remarquons d'abord que, par définition d'un espace euclidien, E est de dimension finie donc tout endomorphisme u de E est continu et on peut effectivement définir sa norme subordonnée $N(u)$ par :

$$N(u)=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|u(x)\|=\sup_{\|x\|=1}\|u(x)\|=\sup_{x\in E\setminus\{0\}}\frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

D'autre part, la boule unité fermée :

$$B=\left\{x\in E\ /\ \|x\|\leqslant 1\right\}$$

et la sphère unité :

$$S=\left\{x\in E\ /\ \|x\|=1\right\}$$

sont des compacts en tant que fermés-bornés dans un espace de dimension finie.

Pour tout $(x,y)\in B^2$, on obtient d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\langle u(x)\,|\,y\rangle=\|u(x)\|\,\|y\|\leqslant N(u)\|x\|\,\|y\|\leqslant N(u).$$

L'ensemble $\left\{\langle u(x)\,|\,y\rangle\ /\ (x,y)\in B^2\right\}\subset\mathbb{R}$, qui est évidemment non vide, est donc majoré par $N(u)$ ce qui assure l'existence de sa borne supérieure avec :

$$\sup_{(x,y)\in B^2}\langle u(x)\,|\,y\rangle\leqslant N(u). \qquad (i)$$

Pour $u=0$, la formule annoncée est évidente. On suppose donc maintenant $u\neq 0$ c'est-à-dire $N(u)>0$.

La fonction $x\mapsto\|u(x)\|$ est continue sur E en tant que composée de fonctions continues, elle atteint donc sa borne supérieure sur le compact B : il existe $x_0\in B$ tel que $N(u)=\left\|u(x_0)\right\|$.

Puisque $N(u)\neq 0$, on obtient alors :

$$N(u)=\left\langle u(x_0)\ \middle|\ \frac{u(x_0)}{\left\|u(x_0)\right\|}\right\rangle$$

et, en remarquant que $y_0 = \dfrac{u(x_0)}{\|u(x_0)\|}$ appartient à B, on en déduit :

$$N(u) \leqslant \sup_{(x,y)\in B^2} \langle u(x) \mid y \rangle. \qquad (ii)$$

Les inégalités (i) et (ii) donnent enfin :

$$N(u) = \sup_{(x,y)\in B^2} \langle u(x) \mid y \rangle.$$

Par définition de u^* on a $\langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid u^*(y) \rangle$ donc :

$$N(u) = \sup_{(x,y)\in B^2} \left\langle u^*(y) \,\middle|\, x \right\rangle = N\left(u^*\right).$$

2) Si $N(u) < 1$, on sait que $u - \mathrm{Id}_E$ est inversible avec :

$$\left(\mathrm{Id}_E - u\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} u^k$$

(c'est encore du cours). De même, puisque $N\left(u^*\right) = N(u)$, $u^* - \mathrm{Id}_E$ est inversible et on a donc, dans ce cas :

$$\mathrm{Ker}\left(u - \mathrm{Id}_E\right) = \mathrm{Ker}\left(u^* - \mathrm{Id}_E\right) = \left\{0_E\right\}.$$

Supposons maintenant $N(u) = 1$.

Le cas $\mathrm{Ker}\left(u - \mathrm{Id}_E\right) = \left\{0_E\right\}$ est immédiat. En effet, scachant que :

$$\mathrm{rg}\left(u^* - \mathrm{Id}_E\right) = \mathrm{rg}\left(u - \mathrm{Id}_E\right)$$

on obtient aussi, avec le théorème du rang :

$$\mathrm{Ker}\left(u^* - \mathrm{Id}_E\right) = \left\{0_E\right\}$$

et donc :

$$\mathrm{Ker}\left(u^* - \mathrm{Id}_E\right) = \mathrm{Ker}\left(u - \mathrm{Id}_E\right).$$

> On peut remarquer que le cas $N(u) = 1$ avec $\mathrm{Ker}\left(u - \mathrm{Id}_E\right) = \left\{0_E\right\}$ est parfaitement possible : considérer, par exemple, une rotation de $\mathbb{R}^2$.

Il reste ainsi à étudier le cas $\mathrm{Ker}\left(u - \mathrm{Id}_E\right) \neq \left\{0_E\right\}$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}\left(u - \mathrm{Id}_E\right)$ avec $\|x\| = 1$. Alors $u(x) = x$ donne :

$$\langle u(x) \mid x \rangle = \|x\|^2 = 1 \quad \text{donc} \quad \langle u^*(x) \mid x \rangle = 1$$

et, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la définition de la norme N :

$$1 = \langle u^*(x) \mid x \rangle \leqslant \|x\|\,\|u^*(x)\| \leqslant N\left(u^*\right) = 1.$$

On obtient donc :

$$\langle u^*(x) \mid x \rangle = \|x\|\,\|u^*(x)\|$$

ce qui, d'après l'étude du cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, montre que $(u^*(x), x)$ est positivement lié : il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $u^*(x) = \lambda x$ (car $x \neq 0$). Alors l'égalité :

$$\langle u^*(x) \mid x \rangle = 1$$

donne $\lambda\|x\|^2 = 1$, c'est-à-dire $\lambda = 1$, d'où finalement :

$$u^*(x) = x, \quad \text{soit aussi} \quad x \in \mathrm{Ker}\left(u^* - \mathrm{Id}_E\right).$$

On a ainsi montré que :

$$\mathrm{Ker}\left(u - \mathrm{Id}_E\right) \subset \mathrm{Ker}\left(u^* - \mathrm{Id}_E\right)$$

et, en remarquant de nouveau que $\mathrm{rg}\left(u^* - \mathrm{Id}_E\right) = \mathrm{rg}\left(u - \mathrm{Id}_E\right)$ donne :

$$\dim \mathrm{Ker}\left(u - \mathrm{Id}_E\right) = \dim \mathrm{Ker}\left(u^* - \mathrm{Id}_E\right),$$

il vient :

$$\mathrm{Ker}\left(u - \mathrm{Id}_E\right) = \mathrm{Ker}\left(u^* - \mathrm{Id}_E\right).$$

Ex. 10

1) Soit E un espace euclidien, montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$:

a) $\operatorname{Ker}\left(f^* \circ f\right) = \operatorname{Ker} f$;

b) $\operatorname{Im}\left(f \circ f^*\right) = \operatorname{Im} f$.

2) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité.

1) Les inclusions $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} u \circ v$ et $\operatorname{Im} u \circ v \subset \operatorname{Im} u$ sont des propriétés universelles bien connues. Dans le contexte de cette question, seules les inclusions :

$$\operatorname{Ker}\left(f^* \circ f\right) \subset \operatorname{Ker} f \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im}\left(f \circ f^*\right)$$

sont donc utiles pour conclure. D'autre part, il est bon d'avoir à l'esprit, qu'en dimension finie, l'égalité de deux sous-espaces peut se prouver au moyen d'une inclusion et de la comparaison des dimensions.

a) Soit $x \in \operatorname{Ker}\left(f^* \circ f\right)$. On a alors :

$$\|f(x)\|^2 = \left\langle f(x) \,\middle|\, f(x)\right\rangle = \left\langle x \,\middle|\, f^* \circ f(x)\right\rangle = 0 \quad \text{donc} \quad f(x) = 0 \text{ et } x \in \operatorname{Ker} f.$$

On a ainsi prouvé que $\operatorname{Ker}\left(f^* \circ f\right) \subset \operatorname{Ker} f$ et compte tenu de la propriété bien connue $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}\left(f^* \circ f\right)$, il vient :

$$\operatorname{Ker}\left(f^* \circ f\right) = \operatorname{Ker} f.$$

b) ▪ Première solution

L'égalité du a) nous donne aussi $\operatorname{Ker}\left(f \circ f^*\right) = \operatorname{Ker} f^*$ donc, avec le théorème du rang et $\operatorname{rg} f^* = \operatorname{rg} f$, il vient :

$$\begin{aligned}
\dim \operatorname{Im}\left(f \circ f^*\right) &= \dim E - \dim \operatorname{Ker}\left(f \circ f^*\right) \\
&= \dim E - \dim \operatorname{Ker} f^* \\
&= \operatorname{rg} f^* \\
&= \operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f.
\end{aligned}$$

Compte tenu de $\operatorname{Im}\left(f \circ f^*\right) \subset \operatorname{Im} f$, l'égalité des dimensions donne alors :

$$\operatorname{Im}\left(f \circ f^*\right) = \operatorname{Im} f.$$

▪ Deuxième solution

On démontre en cours que :

$$\operatorname{Ker} f^* = \left(\operatorname{Im} f\right)^{\perp} \quad \text{et donc} \quad \operatorname{Im} f = \left(\operatorname{Ker} f^*\right)^{\perp}.$$

Ainsi à partir de $\operatorname{Ker}\left(f \circ f^*\right) = \operatorname{Ker} f^*$ on obtient, en prenant les orthogonaux des deux membres :

$$\operatorname{Im}\left(f \circ f^*\right)^* = \operatorname{Im} f^{**} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \operatorname{Im}\left(f \circ f^*\right) = \operatorname{Im} f.$$

2) Il s'agit ici de retrouver, dans un cas particulier, le résultat classique qui donne que, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, AB et BA ont même polynôme caractéristique. La solution doit évidemment être adaptée au contexte particulier où $B = {}^tA$.

On suppose maintenant que E est l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique : la base canonique $\mathcal{B}$ est orthonormale. Étant donné $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} f = A$ et on a alors :

$$^t AA = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f^* \circ f \quad , \quad A\,^t A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f \circ f^*.$$

Puisque ces endomorphismes sont symétriques, ils sont diagonalisables : leurs polynômes caractéristiques sont scindés dans $\mathbb{R}[X]$ et l'ordre de multiplicité de toute valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre correspondant. Le problème revient donc à prouver que :

$$\text{pour tout réel } \lambda, \dim \operatorname{Ker}\left(f \circ f^* - \lambda\, \mathrm{Id}_E\right) = \dim \operatorname{Ker}\left(f^* \circ f - \lambda\, \mathrm{Id}_E\right).$$

Notons d'abord que, d'après le 1), $\operatorname{rg}\left(f^* \circ f\right) = \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^* = \operatorname{rg}\left(f \circ f^*\right)$ donc :

$$\dim \operatorname{Ker}\left(f^* \circ f\right) = \dim \operatorname{Ker}\left(f \circ f^*\right)$$

la propriété annoncée est vraie pour $\lambda = 0$.

Supposons maintenant $\lambda \neq 0$, puisque $f^* \circ f$ et $f \circ f^*$ sont symétriques, on a alors :

$$\operatorname{Ker}\left(f^* \circ f - \lambda\, \mathrm{Id}_E\right) \subset \left[\operatorname{Ker} f^* \circ f\right]^{\perp} = \left[\operatorname{Ker} f\right]^{\perp}$$

$$\text{et} \qquad \operatorname{Ker}\left(f \circ f^* - \lambda\, \mathrm{Id}_E\right) \subset \left[\operatorname{Ker} f \circ f^*\right]^{\perp} = \left[\operatorname{Ker} f^*\right]^{\perp} = \operatorname{Im} f$$

Or on sait que f induit un isomorphisme Φ de $\left[\operatorname{Ker} f\right]^{\perp}$, supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$, sur $\operatorname{Im} f$, on obtient donc pour tout $x \in \left[\operatorname{Ker} f\right]^{\perp}$:

$$\begin{aligned}
x \in \operatorname{Ker}\left(f^* \circ f - \lambda\, \mathrm{Id}_E\right) &\iff f^* \circ f(x) = \lambda x \\
&\iff \Phi\left(f^* \circ f(x)\right) = \lambda\, \Phi(x) \\
&\iff f \circ f^*\left(\Phi(x)\right) = \lambda\, \Phi(x) \quad \text{car } \forall y \in \left(\operatorname{Ker} f\right)^{\perp}, \Phi(y) = f(y)) \\
&\iff \Phi(x) \in \operatorname{Ker}\left(f \circ f^* - \lambda\, \mathrm{Id}_E\right).
\end{aligned}$$

Il en résulte que : $\Phi\left(\operatorname{Ker}\left(f^* \circ f - \lambda\, \mathrm{Id}_E\right)\right) = \operatorname{Ker}\left(f \circ f^* - \lambda\, \mathrm{Id}_E\right)$ et, puisque Φ est un isomorphisme :

$$\dim \operatorname{Ker}\left(f^* \circ f - \lambda\, \mathrm{Id}_E\right) = \dim \operatorname{Ker}\left(f \circ f^* - \lambda\, \mathrm{Id}_E\right).$$

Finalement, la propriété annoncée est vraie quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ex. 11

Soit A une matrice réelle symétrique positive dont les éléments non diagonaux sont strictement négatifs.

À $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on associe la matrice $|X| = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $^t|X|\, A\, |X| \leqslant {}^tXAX$.

2) On suppose qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$ telle que $AX = 0$.

a) Montrer que tout $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $^tZA\,|X| = 0$.

b) Montrer que $x_i \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

c) Montrer que $\operatorname{rg} A \geqslant n - 1$.

3) Soit $\lambda_1 = \min \operatorname{Sp} A$.

a) Montrer que $\operatorname{rg}\left(A - \lambda_1 I_n\right) = n - 1$.

b) Montrer qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$ telle que $AX = \lambda_1 X$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i > 0$.

1) Posons $A = [a_{ij}]$, on obtient pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$^tXAX = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

donc $$^t|X|\ A|X| = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} |x_i|\ |x_j|$$

et $$^tXAX - {}^t|X|\ A|X| = 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}\left(x_i x_j - |x_i|\ |x_j|\right)$$

Puisque chaque a_{ij}, $i \neq j$, est négatif, on en déduit :

$$^tXAX - {}^t|X|\ A|X| \geqslant 0.$$

2) a) Dès que l'on dispose d'une forme bilinéaire symétrique ou d'une forme quadratique positive, il est bon de se souvenir que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est valable.

A étant positive, l'inégalité précédente s'écrit :

$$0 \leqslant {}^t|X|\ A|X| \leqslant {}^tXAX$$

donc $AX = 0$ donne $^t|X|\ A|X| = 0$.

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \left({}^tZA|X|\right)^2 \leqslant \left({}^tZAZ\right)\left({}^t|X|\ A|X|\right)$$

donc :

$$^tZA|X| = 0.$$

b) La relation précédente étant vraie quelle que soit $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on en déduit $A|X| = 0$, ce qui s'écrit :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_{ii}|x_i| = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} a_{ij}\left|x_j\right|.$$

Donc, s'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i = 0$, on obtient :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} a_{ij}\left|x_j\right| = 0$$

et, puisque les a_{ij}, $i \neq j$, sont < 0, il en résulte :

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\},\ a_{ij}\left|x_j\right| = 0 \ \text{ puis } \ x_j = 0$$

et finalement $X = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

En conséquence, on a $x_i \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

c) $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est identifié à $\mathbb{R}^n$ par isomorphisme canonique et on note encore A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice, dans la base canonique, est A.

Soit H l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ d'équation $x_1 = 0$. D'après le b), on a $\operatorname{Ker} A \cap H = \{0\}$, donc :

$$\dim \operatorname{Ker} A \leqslant 1 \text{ c'est-à-dire } \operatorname{rg} A \geqslant n-1.$$

3) a) Si on se laisse guider par l'énoncé, il est vraisemblable qu'il faut ici appliquer le résultat du 2) à la matrice $B = A - \lambda_1 I_n$ ce qui nécessite de commencer par prouver que B est positive.

On sait que A est diagonalisable dans le groupe orthogonal, c'est-à-dire qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$^tPAP = D = \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right).$$

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, posons $X = PY$ donc $Y = {}^tPX$. On obtient alors :

$$ {}^tXX = {}^tYY \quad \text{et} \quad {}^tXAX = {}^tYDY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, y_i^2 $$

donc ${}^tXAX \geqslant \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ c'est-à-dire ${}^tXAX \geqslant \lambda_1 \, {}^tYY$ soit aussi ${}^tXAX \geqslant \lambda_1 \, {}^tXX$.

Ceci s'écrit :

$$ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \; {}^tX\left(A - \lambda_1 I_n\right)X \geqslant 0 $$

et on a donc vérifié que la matrice symétrique réelle $B = A - \lambda I_n$ est positive.

En posant $B = \left[b_{i,j}\right]$, pour $i \neq j$ on a $b_{i,j} = a_{i,j} < 0$, le résultat du 2) s'applique à la matrice B : on a $\operatorname{rg} B \geqslant n - 1$.

Or, puisque λ_1 est valeur propre de A, on a aussi $\operatorname{rg} B \leqslant n - 1$ d'où finalement $\operatorname{rg} B = n - 1$. Le sous-espace propre $\operatorname{Ker}\left(A - \lambda_1 I_n\right)$ est donc de dimension 1.

b) Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 : $Y \in \operatorname{Ker} B \setminus \{0\}$.

D'après le 2) on a $\forall i \in [\![1, n]\!], \; y_i \neq 0$ et $BY = B|Y| = 0$.

Ainsi, en posant :

$$ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = |Y|, $$

c'est-à-dire :

$$ \forall i \in [\![1, n]\!], \; x_i = |y_i|, $$

on a $X \neq 0$ et $\left(A - \lambda_1 I_n\right)X = 0$, donc X est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 et vérifie de plus :

$$ \forall i \in [\![1, n]\!], \; x_i = |y_i| > 0. $$

D Endomorphismes symétriques positifs

Ex. 12

Soit $M = \begin{pmatrix} M_0 & {}^tM_1 \\ M_1 & M_2 \end{pmatrix}$ une matrice symétrique réelle positive, les blocs M_0 et M_2 étant carrés d'ordres respectifs k_0 et k_1.

Montrer que, pour $X \in \mathbb{R}^{k_0}$, $M_0X = 0 \;\Rightarrow\; M_1X = 0$.

Comment traduire la positivité ? au moyen des valeurs propres ou avec la forme quadratique associée ?

Il n'y a pas de lien simple entre les valeurs propres de M et les blocs M_0, M_1, M_2, il est donc plus judicieux de s'intéresser à la forme quadratique associée.

Avec $n = k_0 + k_1$, on a $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et tout $V \in \mathbb{R}^n$ s'écrit :

$$ V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \text{avec } X \in \mathbb{R}^{k_0}, \; Y \in \mathbb{R}^{k_1}. $$

Soit Φ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à M, le calcul donne :

$$\Phi(V) = \begin{pmatrix} {}^tX & {}^tY \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 & {}^tM_1 \\ M_1 & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = {}^tXM_0X + {}^tYM_2Y + {}^tYM_1X + {}^tX\,{}^tM_1Y$$

$$= {}^tXM_0X + {}^tYM_2Y + 2\,{}^tYM_1X$$

Les matrices M_0 et M_2 représentent chacune une restriction de la forme quadratique Φ, elles sont donc également symétriques positives.

Supposons $M_0X = 0$, alors la positivité de Φ donne :

$$\forall Y \in \mathbb{R}^{k_1}, \quad 2\,{}^tYM_1X + {}^tYM_2Y \geqslant 0$$

donc $\forall U \in \mathbb{R}^{k_1}$, tel que $\| U \| \neq 0$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$2t\,{}^tUM_1X + t^2\,{}^tUM_2U \geqslant 0 \quad \text{(où on a posé } Y = tU\text{)}$$

La matrice M_2 étant positive, on a soit ${}^tUM_2U = 0$ soit ${}^tUM_2U > 0$:

- pour ${}^tUM_2U = 0$, la condition $\forall t \in \mathbb{R}$, $2t\,{}^tUM_1X \geqslant 0$ donne ${}^tUM_1X = 0$;
- pour ${}^tUM_2U > 0$, la condition $\forall t \in \mathbb{R}$, $2t\,{}^tUM_1X + t^2\,{}^tUM_2U \geqslant 0$ donne encore ${}^tUM_1X = 0$ sinon le polynôme $t \mapsto t^2\,{}^tUM_2U + 2t\,{}^tUM_1X$ aurait deux racines distinctes et prendrait donc des valeurs strictement négatives.

Finalement, on a $\forall U \in \mathbb{R}^{k_1} \setminus \{0\}$, ${}^tUM_1X = 0$ d'où $M_1X = 0$.

Ex. 13

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A symétrique définie positive : $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, et B symétrique : $B \in S_n(\mathbb{R})$.

Montrer que AB est diagonalisable.

> A étant définie positive, c'est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ d'un produit scalaire φ. On peut alors chercher à réduire dans le groupe orthogonal de $(\mathbb{R}^n, \varphi)$ la forme quadratique de matrice B dans la base canonique.

Classiquement, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est identifié à $\mathbb{R}^n$ par isomorphisme canonique.

Puisque $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, l'application $\varphi : (X, Y) \mapsto {}^tXAY$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{B}_n$ désignant la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_n} \varphi.$$

Soit alors Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, Q(X) = {}^tXBX$$

on a :

$$B = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_n} Q.$$

Notons E l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, \varphi)$, on sait qu'il existe $\mathcal{V}$ base orthonormale de E formée de vecteurs propres de l'endomorphisme symétrique de la forme quadratique Q. En notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}_n$ à $\mathcal{V}$:

$$P = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_n} \mathcal{V} \in GL_n(\mathbb{R})$$

on a alors :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{V}}\, Q = {}^tPBP = D \quad \text{où } D \text{ est diagonale}$$

$$\text{et} \quad \mathrm{mat}_{\mathcal{V}}\, \varphi = {}^tPAP = I_n \quad \text{car } \mathcal{V} \text{ est orthonormale pour le produit scalaire } \varphi.$$

On obtient ainsi :

$$A = {}^tP^{-1}P^{-1} \;,\; A^{-1} = P\,{}^tP \;,\; B = {}^tP^{-1}DP^{-1}$$

donc $A^{-1}B = PDP^{-1}$ ce qui montre que $A^{-1}B$ est diagonalisable.
Il reste alors à remarquer que A^{-1} est également symétrique définie positive, et appliquer le résultat ci-dessus au couple (A^{-1}, B) pour obtenir que $(A^{-1})^{-1}B = AB$ est diagonalisable.

Ex. 14

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et G un groupe fini d'automorphismes de E. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel stable par tous les éléments de G, il existe un supplémentaire H de F qui est également stable par tous les éléments de G.

> Dans un espace euclidien si un sous-espace vectoriel F est stable par un automorphisme orthogonal u, alors $F^{\perp}$ est également stable par u et $F^{\perp}$ est bien sûr un supplémentaire de F. La question sera donc résolue si nous définissons sur E une structure euclidienne telle que $G \subset O(E)$.

E étant muni d'un produit scalaire $(x, y) \mapsto x \cdot y$ choisi arbitrairement, on obtient un autre produit scalaire en posant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \langle x \mid y \rangle = \sum_{g \in G} g(x) \cdot g(y).$$

En effet, cette application $(x, y) \mapsto \langle x \mid y \rangle$ est visiblement bilinéaire symétrique de par les propriétés de bilinéarité et symétrie du premier produit scalaire, et la linéarité des éléments g de G ; et, de plus, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a :

$$\langle x \mid x \rangle = x \cdot x + \sum_{g \in G \setminus \{\mathrm{Id}_E\}} g(x) \cdot g(x) \quad \text{donc} \quad \langle x \mid x \rangle \geqslant x \cdot x > 0.$$

> On a utilisé qu'en tant que sous-groupe de $GL(E)$, G contient Id_E.

Puisque $(G, \circ)$ est un groupe, pour tout $u \in G$, l'application $g \mapsto g \circ u$ est une bijection de G sur lui-même dont la bijection réciproque est $h \mapsto h \circ u^{-1}$. En conséquence, on obtient :

$$\begin{aligned}\forall (x, y) \in E^2, \ \langle u(x) \mid u(y) \rangle &= \sum_{g \in G} g \circ u(x) \cdot g \circ u(y) \\ &= \sum_{h \in G} h(x) \cdot h(y) \\ &= \langle x \mid y \rangle.\end{aligned}$$

Ainsi u est un automorphisme orthogonal de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ et, puisque F est stable par u, $H = F^{\perp}$ l'est également.
Finalement, H est un supplémentaire de F, stable par tous les éléments de G.

Ex. 15

Soit E un espace vectoriel euclidien, $\dim E = n \geqslant 1$, f et g deux endomorphismes de E. On note $O(E)$ le groupe orthogonal de E.

1) Montrer que $f \circ f^* = g \circ g^*$ équivaut à l'existence de $u \in O(E)$ tel que $g = f \circ u$.

2) On suppose $f \circ f^* = g \circ g^*$. À quelle condition nécessaire et suffisante, portant sur $\mathrm{rg} f$, existe-t-il $u \in O(E)$, unique, tel que $g = f \circ u$?

1) a) Si $g = f \circ u$ avec $u \in O(E)$, alors $u^* = u^{-1}$ donc :

$$g \circ g^* = f \circ u \circ u^* f^* = f \circ f^*.$$

b) Pour la réciproque, il faut construire $u \in \mathcal{O}(E)$ tel que $g = f \circ u$. Or un endomorphisme u de E est orthogonal si et seulement si il transforme une base orthonormale en une base orthonormale. Il parait donc plus judicieux d'introduire une base orthonormale formée de vecteurs propres de l'endomorphisme symétrique $f \circ f^* = g \circ g^*$.

$\varphi = f \circ f^* = g \circ g^*$ est un endomorphisme symétrique positif. Il existe donc $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ base orthonormale de E telle que :

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} \varphi = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \quad \text{avec} \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i \geqslant 0.$$

La base $\mathcal{B}$ étant orthonormale, on a :

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} \varphi = \left[\langle e_i \mid \varphi(e_j) \rangle\right].$$

Or :

$$\langle e_i \mid \varphi(e_j) \rangle = \langle e_i \mid f \circ f^*(e_j) \rangle = \langle f^*(e_i) \mid f^*(e_j) \rangle$$

et de même :

$$\langle e_i \mid \varphi(e_j) \rangle = \langle g^*(e_i) \mid g^*(e_j) \rangle$$

donc :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \langle f^*(e_i) \mid f^*(e_j) \rangle = \langle g^*(e_i) \mid g^*(e_j) \rangle = \lambda_i \delta_{ij}.$$

On en déduit que les deux familles $(f^*(e_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(g^*(e_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont orthogonales avec :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \|f^*(e_i)\| = \|g^*(e_i)\| = \sqrt{\lambda_i}$$

et il existe donc $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(e''_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ bases orthonormales de E telles que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], f^*(e_i) = \sqrt{\lambda_i}\, e'_i \quad \text{et} \quad g^*(e_i) = \sqrt{\lambda_i}\, e''_i.$$

Soit alors $u \in \mathcal{O}(E)$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!], u(e''_i) = e'_i$, on obtient :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], g^*(e_i) = \sqrt{\lambda_i}\, u^{-1}(e'_i) = u^*\left(\sqrt{\lambda_i}\, e'_i\right) = u^* \circ f^*(e_i)$$

donc $g^* = u^* \circ f^*$ puis $g = f \circ u$.

2) a) Si $\operatorname{rg} f = n$ alors f est inversible et $f \circ u = f \circ v$ donne $u = v$. Dans ce cas, le problème admet donc une solution et une seule.

b) Si $\operatorname{rg} f < n$, on a $\operatorname{rg} f \circ f^* \leqslant n - 1$ donc l'un au moins des λ_i est nul, par exemple $\lambda_n = 0$.

Alors si $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}, (e''_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un couple de bases orthonormales telles que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], f^*(e_i) = \sqrt{\lambda_i}\, e'_i \ , \ g^*(e_i) = \sqrt{\lambda_i}\, e''_i$$

en introduisant la base $(e'''_1)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ telle que $\forall i \in [\![1, n-1]\!], e'''_i = e''_i$ et $e'''_n = -e''_n$, on a encore :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], g^*(e_i) = \sqrt{\lambda_i}\, e'''_i \quad \text{car } \lambda_n = 0.$$

Donc l'endomorphisme orthogonal v tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], v(e'''_i) = e'_i$$

vérifie également $g = f \circ v$. Ainsi le problème admet, dans ce cas, au moins deux solutions distinctes.

En conclusion, le problème admet une solution unique si et seulement si $\operatorname{rg} f = n$.

Noter que, moyennant l'hypothèse $f \circ f^* = g \circ g^*$, la condition $\operatorname{rg} f = n$ équivaut à $\operatorname{rg} g = n$.

Ex. 16

Soit $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{S}^{+*}_{n-1}(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre $n-1$, définies-positives), $A = \begin{pmatrix} 1 & -{}^tC \\ C & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = {}^tAA$.

Montrer que S est symétrique, définie-positive.

Quelle que soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice ${}^tMM$ est symétrique, positive. C'est là un résultat bien connu et très élémentaire puisque sa justification tient à :

$${}^t\left({}^tMM\right) = {}^tMM$$

et :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX\,{}^tMMX = \| MX \|^2 \geqslant 0$$

(on utilise la norme euclienne canonique sur $\mathbb{R}^n$ identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

Le seul vrai problème, dans l'exercice proposé, est donc de prouver le caractère défini de la matrice S.

Montrons en premier que $S = {}^tAA$ est symétrique, définie-positive si et seulement si A est inversible.

- En supposant S définie-positive, on obtient :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX = 0 \Rightarrow X = 0$$

donc, puisque ${}^tXSX = \| AX \|^2$, cela s'écrit :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX = 0 \Rightarrow X = 0.$$

Donc A est inversible.

- En supposant A inversible, on sait déjà que S est symétrique positive, et pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, on a $AX \neq 0$, donc :

$${}^tXSX = \| AX \|^2 > 0.$$

Ainsi S est symétrique, définie-positive.

Pour la suite, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est identifié à $\mathbb{R}^n$ par isomorphisme canonique et nous convenons d'utiliser la même notation pour représenter une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé.

Le problème est ainsi ramené à prouver que $\operatorname{Ker} A$ est réduit à $\{0\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $x_1 \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathbb{R}^{n-1}$, on a alors :

$$X \in \operatorname{Ker} A \iff \begin{cases} x_1 - {}^tCY = 0 \\ x_1C + BY = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = {}^tCY & (1) \\ C\,{}^tCY + BY = 0 & (2) \end{cases}$$

De (2), on déduit ${}^tYC\,{}^tCY + {}^tYBY = 0$, c'est-à-dire avec ${}^tCY = {}^tYC = \langle C \mid Y \rangle$ (produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^{n-1}$) :

$$\langle C \mid Y \rangle^2 + {}^tYBY = 0 \tag{3}$$

sachant que B est positive, on a ${}^tYBY \geqslant 0$ donc (3) nous donne :

$$\langle C \mid Y \rangle = {}^tYBY = 0$$

puis, sachant que B est définie-positive, ${}^tYBY = 0$ fournit $Y = 0$ et avec (1), il vient $x_1 = 0$ donc $X = 0$.

On a ainsi prouvé que $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ donc que $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et que $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Ex. 17

Racine carrée d'un endomorphisme symétrique positif

Soit $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs d'un espace vectoriel euclidien E.

Montrer que pour tout $f \in S^+(E)$, il existe $g \in S^+(E)$, unique, tel que $g^2 = f$.

L'espace E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres $F_1, \ldots, F_p$ de f.

Si g est solution du problème, chaque F_i est stable par g et, en notant g_i et f_i les endomorphismes de F_i induits par g et f respectivement, l'équation $g^2 = f$ se ramène aux p équations $g_i^2 = f_i$ où f_i est une homothétie.

- Envisageons d'abord le cas où f est une homothétie $x \mapsto \lambda x$.

La positivité de f se traduit par $\lambda \geqslant 0$.

Tout endomorphisme symétrique, positif, g de E est diagonalisable et ses valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_p$ sont positives :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \mu_i \geqslant 0.$$

• Analyse

Supposons que $g^2 = f$. Alors pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, soit x_i vecteur propre de g associé à la valeur propre μ_i, l'égalité $g^2(x_i) = f(x_i)$ devient $\mu_i^2 x_i = \lambda x_i$ d'où on déduit successivement $\mu_i^2 = \lambda$ (car $x_i \neq 0$), puis $\mu_i = \sqrt{\lambda}$ (car $\mu_i \geqslant 0$ et $\lambda \geqslant 0$). Ainsi l'endomorphisme diagonalisable g admet une seule valeur propre : $\sqrt{\lambda}$, c'est donc l'homothétie $x \mapsto \sqrt{\lambda}\, x$.

On vient de montrer que l'équation $g^2 = f$ admet au plus une solution dans $S^+(E)$.

• Synthèse

L'homothétie $g \;:\; x \mapsto \sqrt{\lambda} x$ est un endomorphisme symétrique, positif, car $\sqrt{\lambda} \geqslant 0$ et il est évident que $g^2 = f$. C'est donc l'unique solution du problème.

- Cas général : $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, $\quad F_i = \operatorname{Ker}\left(f - \lambda_i \operatorname{Id}_E\right)$.

La positivité de f se traduit par :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \lambda_i \geqslant 0.$$

• Analyse

Supposons que $g^2 = f$ avec $g \in S^+(E)$.

On a alors $g \circ f = f \circ g = g^3$ donc chaque F_i est stable par g. Notons f_i et g_i les endomorphismes de F_i induits par f et g respectivement :

* f_i est l'homothétie $x \mapsto \lambda_i x$;
* g_i est un endomorphisme symétrique positif de F car $\forall (x, y) \in F_i$:

$$\langle g_i(x) \,|\, y \rangle = \langle g(x) \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, g(y) \rangle = \langle x \,|\, g_i(y) \rangle$$
$$\text{et} \quad \langle g_i(x) \,|\, x \rangle = \langle g(x) \,|\, x \rangle \geqslant 0 \;;$$

* $g_i^2 = f_i$ car $\forall x \in E$, $g_i^2(x) = g^2(x) = f(x) = f_i(x)$.

D'après l'étude du premier cas, g_i est l'homothétie $x \mapsto \sqrt{\lambda_i}\, x$.

On sait qu'un endomorphisme de E est entièrement défini par ses restrictions aux sous-espaces supplémentaires $F_1, \ldots, F_p$, donc l'équation $g^2 = f$ admet au plus une solution dans $S^+(E)$, il s'agit de l'endomorphisme g de E dont la restriction à chaque F_i est l'homothétie $x \mapsto \sqrt{\lambda_i}\, x$.

• Synthèse

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], g_{|F_i} \;:\; x \mapsto \sqrt{\lambda_i}\, x.$$

Dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe orthogonale :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$$

la matrice de g est :

$$G = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1}\, I_{m_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_p}\, I_{m_p} \end{pmatrix}$$

G est symétrique (car diagonale) positive, donc il en est de même pour g et $G^2 = \text{mat}_{\mathcal{B}} f$ donne $g^2 = f$.

En conclusion, l'équation proposée admet une solution et une seule.

Ex. 18

Soit E un espace vectoriel euclidien et $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E.

Pour tout x de E, on pose :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid x \rangle e_k.$$

1) Montrer que f est un endomorphisme, symétrique, défini-positif de E.

2) Montrer l'existence d'un endomorphisme g de E, symétrique, défini-positif, et tel que :

$$g^2 = f^{-1}.$$

3) Montrer que $\big(g(e_i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base orthonormale de E.

1) ▪ La linéarité de $x \mapsto \langle e_k \mid x \rangle$ donne celle de l'application f.

▪ La symétrie correspond à l'égalité des applications :

$$\varphi : (x, y) \mapsto \langle f(x) \mid y \rangle \quad \text{et} \quad \psi : (x, y) \mapsto \langle f(y) \mid x \rangle$$

et, puisque celles-ci sont évidemment des formes bilinéaires sur E^2, leur égalité équivaut à :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \varphi(e_i, e_j) = \psi(e_i, e_j).$$

Formons :

$$\varphi(e_i, e_j) = \langle f(e_i) \mid e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid e_i \rangle \langle e_k \mid e_j \rangle$$

$$\psi(e_i, e_j) = \langle f(e_j) \mid e_i \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid e_j \rangle \langle e_k \mid e_i \rangle$$

l'égalité est claire et on a donc $\varphi = \psi$ c'est-à-dire que f est symétrique.

▪ La positivité est évidente puisque :

$$\forall x \in E, \langle f(x) \mid x \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid x \rangle^2.$$

▪ En supposant $\langle f(x) \mid x \rangle = 0$, l'expression précédente montre que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \langle e_k \mid x \rangle = 0 \quad \text{donc} \quad x \in E^{\perp}$$

et, puisque $E^{\perp} = \{0\}$, il vient $x = 0$. L'endomorphisme symétrique f est donc défini-positif.

2) f^{-1} est également symétrique défini-positif, ce qui assure l'existence et l'unicité de $g \in \mathcal{L}(E)$, symétrique, défini-positif tel que $g^2 = f^{-1}$ (voir l'exercice précédent).

3) Pour faire le lien avec les données dont on dispose, on peut penser à observer qu'une base $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ de E est orthonormale si et seulement si :

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} \langle u_i \mid x \rangle u_i .$$

Par définition de f, on obtient :

$$\forall x \in E, f\left(f^{-1}(x)\right) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid f^{-1}(x) \rangle e_k = \sum_{i=1}^{n} \langle e_k \mid g^2(x) \rangle e_k$$

donc, puisque g est symétrique :

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} \langle g(e_k) \mid g(x) \rangle e_k$$

puis, par linéarité de g :

$$\forall x \in E, g(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle g(e_k) \mid g(x) \rangle g(e_k).$$

g étant un automorphisme de E, $y = g(x)$ décrit E et la dernière proposition se lit :

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} \langle g(e_k) \mid x \rangle g(e_k).$$

Posons :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], g(e_k) = u_k$$

puisque $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ est une base de E et g un automorphisme, $(u_k)_{1\leq k\leq n}$ est également une base, et en écrivant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], u_i = \sum_{j=1}^{n} \langle u_i \mid u_j \rangle u_j$$

on obtient :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \langle u_i \mid u_j \rangle = \delta_{ij}$$

donc cette base est orthonormale.

Ex. 19

Soit $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique, définie-positive : $A \in S_n^{+*}(\mathbb{R})$, et σ une permutation de $[\![1, n]\!]$: $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

1) Montrer que $\left|\sum_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$. Déterminer les cas d'égalités.

2) Montrer que $\left|\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}\right| \leq \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$. Déterminer les cas d'égalités.

1) Pour aborder ce genre de question, on peut chercher à interpréter vectoriellement les sommes :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

en utilisant que A est la matrice d'un produit scalaire.

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$ sont identifiés par isomorphisme canonique.

Puisqu'elle est symétrique, définie-positive, la matrice A définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle X \mid Y \rangle = {}^t XAY.$$

En notant $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on obtient :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], a_{ii} = \|e_i\|^2, a_{i\sigma(i)} = \langle e_i \mid e_{\sigma(i)} \rangle.$$

Puisque σ est une permutation de $[\![1, n]\!]$, il vient :

$$\sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|e_{\sigma(i)}\|^2$$

donc :

$$\sum_{i=1}^n a_{ii} - \sum_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\|e_i\|^2 + \|e_{\sigma(i)}\|^2 - 2\langle e_i \mid e_{\sigma(i)} \rangle \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|e_i - e_{\sigma(i)}\|^2 \geqslant 0 \qquad (i)$$

et de même :

$$\sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|e_i + e_{\sigma(i)}\|^2 \geqslant 0 \qquad (ii)$$

On a ainsi :

$$-\sum_{i=1}^n a_{ii} \leqslant \sum_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \leqslant \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

c'est-à-dire :

$$\left| \sum_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \right| \leqslant \sum_{i=1}^n a_{ii}. \qquad (1)$$

D'après (i) et (ii), l'égalité a lieu si et seulement si :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], e_{\sigma(i)} = e_i \quad \text{ou} \quad \forall i \in [\![1, n]\!], e_{\sigma(i)} = -e_i.$$

La deuxième éventualité étant évidemment à rejeter, le seul cas d'égalité correspond à :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], e_{\sigma(i)} = e_i \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sigma = \mathrm{Id}.$$

2) L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], |a_{i\sigma(i)}| = |\langle e_i \mid e_{\sigma(i)} \rangle| \leqslant \|e_i\| \, \|e_{\sigma(i)}\|$$

donc :

$$\prod_{i=1}^n |a_{i\sigma(i)}| \leqslant \prod_{i=1}^n \|e_i\| \prod_{i=1}^n \|e_{\sigma(i)}\|.$$

Or $\displaystyle\prod_{i=1}^n \|e_{\sigma(i)}\| = \prod_{i=1}^n \|e_i\|$ (car σ est une permutation de $[\![1, n]\!]$) et il vient donc :

$$\prod_{i=1}^n |a_{i\sigma(i)}| \leqslant \prod_{i=1}^n \|e_i\|^2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left| \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \right| \leqslant \prod_{i=1}^n a_{ii}. \qquad (2)$$

On peut supposer que, comme dans la première question, l'égalité n'a lieu que pour $\sigma = \mathrm{Id}$ et cela revient à montrer que l'inégalité (2) est stricte pour toute permutation $\sigma \neq \mathrm{Id}$.

Supposons $\sigma \neq \mathrm{Id}$. Alors il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(k) \neq k$ ce qui donne $(e_k, e_{\sigma(k)})$ libre et donc, d'après l'étude du cas d'égalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\left\langle e_k \middle| e_{\sigma(k)} \right\rangle\right| < \|e_k\| \left\|e_{\sigma(k)}\right\|$$

Envisageons alors deux possibilités :

- L'un (au moins) des $a_{i\,\sigma(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, est nul. Dans ce cas il vient évidemment :

$$\left|\prod_{i=1}^{n} a_{i\,\sigma(i)}\right| = 0$$

et, puisque pour tout i on a $a_{ii} = \|e_i\|^2 > 0$, cela nous donne :

$$\left|\prod_{i=1}^{n} a_{i\,\sigma(i)}\right| < \prod_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$

- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i\,\sigma(i)}$ est non nul. On dispose alors des inégalités :

$$0 < \left|a_{k\,\sigma(k)}\right| < \|e_k\| \left\|e_{\sigma(k)}\right\|$$

et $$\forall i \in [\![1, n]\!] \setminus \{k\},\ 0 < \left|a_{i\,\sigma(i)}\right| \leqslant \|e_i\| \left\|e_{\sigma(i)}\right\|$$

ce qui donne donc :

$$0 < \left|\prod_{i=1}^{n} a_{i\,\sigma(i)}\right| < \prod_{i=1}^{n} \|e_i\| \prod_{i=1}^{n} \left\|e_{\sigma(i)}\right\|$$

soit aussi :

$$0 < \left|\prod_{i=1}^{n} a_{i\,\sigma(i)}\right| < \prod_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$

En conséquence, pour $\sigma \neq \mathrm{Id}$, l'inégalité (2) est stricte, et donc (2) se réduit à une égalité si et seulement si $\sigma = \mathrm{Id}$.

Ex. 20

1) Montrer que la forme quadratique Q définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$Q(x, y, z) = y^2 + 3x^2 - 2zx + 3z^2$$

est définie-positive.

2) Déterminer les bornes de l'application :

$$F\ :\ \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto \frac{2y^2 - x^2 + zx}{y^2 + 3x^2 - 2zx + 3z^2}\,.$$

1) Étant donné un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$ et une forme quadratique Q sur E, sachant que la forme polaire d'une forme quadratique définie-positive est un produit scalaire et que, pour tout produit scalaire, il existe des bases de E orthonormales, on retrouve le résultat usuel suivant.

Q est définie-positive si et seulement si il existe $e_1, \ldots, e_n$ formes linéaires sur E, indépendantes, et telles que :

$$Q = \sum_{i=1}^{n} e_i^2\,.$$

En observant la symétrie en (x, z), on obtient facilement :

$$3x^2 - 2zx + 3z^2 = (x+z)^2 + 2(x-z)^2$$

donc :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ Q(x, y, z) = y^2 + (x+z)^2 + 2(x-z)^2.$$

Il est alors clair que Q est positive et définie car :

$$Q(x, y, z) = 0 \text{ donne } y = 0,\ x + z = 0,\ x - z = 0 \text{ donc } x = y = z = 0.$$

2) Il semble impératif de simplifier le dénominateur.

Le seul fait de se placer dans une base de $\mathbb{R}^3$ orthonormale par rapport à Q va nous donner une telle simplification.

Soit Φ la forme polaire de Q. On munit $\mathbb{R}^3$ de la structure euclidienne associée à ce produit scalaire :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,\ \langle u \mid v \rangle = \Phi(u, v),\ \| u \|^2 = Q(u).$$

Une base (e'_1, e'_2, e'_3) de $\mathbb{R}^3$ est orthonormale (pour cette structure) si et seulement si pour tout $u = x'e_1 + y'e_2 + z'e_3$, $\| u \|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$, donc en posant :

$$x' = x + z \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = \sqrt{2}(x - z),$$

c'est-à-dire :

$$x = \frac{1}{2}\left(x' + z'\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad , \quad y = y' \quad , \quad z = \frac{1}{2}\left(x' - z'\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

on obtient les formules de passage de la base canonique (e_1, e_2, e_3) à une base orthonormale (e'_1, e'_2, e'_3). Dans cette base, on a :

$$F(u) = \frac{2y'^2 - \dfrac{z'^2}{4} - x'z'\dfrac{\sqrt{2}}{4}}{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Alors on sait qu'il existe une base orthonormale (e''_1, e''_2, e''_3) dans laquelle la forme quadratique :

$$N \ : \ u \mapsto 2y'^2 - \frac{z'^2}{4} - x'z'\frac{\sqrt{2}}{4}$$

s'écrit :

$$\forall u \in \mathbb{R}^3,\ N(u) = \lambda x''^2 + \mu y''^2 + \nu z''^2$$

où on a posé $u = x''e''_1 + y''e''_2 + z''e''_3$.

Les scalaires λ, μ, ν sont les valeurs propres de :

$$A = \underset{(e'_1, e'_2, e'_3)}{\mathrm{mat}} N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{\sqrt{2}}{8} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{8} & 0 & -\dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$$

et, avec $\det(A - XI_3) = (2 - X)\left(X + \dfrac{1+\sqrt{3}}{8}\right)\left(X + \dfrac{1-\sqrt{3}}{8}\right)$, on peut choisir :

$$\lambda = -\frac{\sqrt{3}+1}{8} \quad , \quad \mu = 2 \quad , \quad \nu = \frac{\sqrt{3}-1}{8}.$$

Dans la base $(e''_i)_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ on a donc :

$$F(u) = \frac{-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}x''^2 + 2y''^2 + \dfrac{\sqrt{3}-1}{8}z''^2}{x''^2 + y''^2 + z''^2}.$$

Avec $-\dfrac{\sqrt{3}+1}{8} < \dfrac{\sqrt{3}-1}{8} < 2$, on obtient :

$$-\frac{\sqrt{3}+1}{8}\left(x''^2+y''^2+z''^2\right) \leqslant -\frac{\sqrt{3}+1}{8}x''^2+2y''^2+\frac{\sqrt{3}-1}{8}z''^2 \leqslant 2\left(x''^2+y''^2+z''^2\right)$$

donc pour tout $u \neq 0$:

$$-\frac{\sqrt{3}+1}{8} \leqslant F(u) \leqslant 2.$$

En remarquant que $F\left(e_1''\right) = -\dfrac{\sqrt{3}+1}{8}$ et $F\left(e_2''\right) = 2$, on en conclut que :

$$\max_{u\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}} F(u) = 2 \quad \text{et} \quad \min_{u\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}} F(u) = -\frac{\sqrt{3}+1}{8}.$$

Ex. 21

Soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ {}^tB & A_2 \end{pmatrix}$ une matrice symétrique réelle, définie-positive écrite par blocs, les blocs A_1 et A_2 étant carrés. Montrer que :

$$\det A \leqslant \det A_1 \det A_2 .$$

Pour obtenir des informations sur le déterminant de A en fonction de ceux de A_1 et A_2, il paraît nécessaire de réduire A par blocs. En particulier, si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, définie-positive, c'est la matrice d'un produit scalaire, donc il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$${}^tPAP = I_n .$$

Par hypothèse, on a $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices symétriques réelles définies-positives), $A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $A_2 \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ avec $p+q=n$.

Vérifions d'abord que A_1 et A_2 sont symétriques, définies-positives.

Il est clair que ${}^tA = A$ donne ${}^tA_1 = A_1$ et ${}^tA_2 = A_2$.

$A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donne :

$$\forall X_1 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ X_1 \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} {}^tX_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & B \\ {}^tB & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix} > 0$$

c'est-à-dire ${}^tX_1A_1X_1 > 0$. Donc :

$$A_1 \in S_p^{++}(\mathbb{R}).$$

De même :

$$\forall X_2 \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R}),\ X_2 \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & {}^tX_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & B \\ {}^tB & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ X_2 \end{pmatrix} > 0$$

c'est-à-dire ${}^tX_2A_2X_2 > 0$. Donc :

$$A_2 \in S_p^{++}(\mathbb{R}).$$

En conséquence, il existe $P_1 \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ et $P_2 \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$ telles que :

$${}^tP_1A_1P_1 = I_p \quad \text{et} \quad {}^tP_2A_2P_2 = I_q .$$

On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} {}^tP_1 & 0 \\ 0 & {}^tP_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & B \\ {}^tB & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tP_1A_1P_1 & {}^tP_1BP_2 \\ {}^tP_2\,{}^tBP_1 & {}^tP_2A_2P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & B_1 \\ {}^tB_1 & I_q \end{pmatrix}$$

où on a posé :

$$B_1 = {}^tP_1BP_2 .$$

Avec $P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$ on a :

$$P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \quad (\text{avec } P^{-1} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{pmatrix})$$

et l'identité $A' = \begin{pmatrix} I_p & B_1 \\ {}^tB_1 & I_q \end{pmatrix} = {}^tPAP$ montre que A' est également symétrique définie-positive :

$$A' \in S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

En effet, il est évident que ${}^tA' = A'$ et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$${}^tXA'X = {}^t(PX)A(PX) > 0.$$

Posons alors $V = \begin{pmatrix} I_p & -B_1 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$, on a $V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (avec $V^{-1} = \begin{pmatrix} I_p & B_1 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$, et on obtient :

$$A'' = {}^tVA'V = \begin{pmatrix} I_p & B_1 \\ 0 & I_q - {}^tB_1B_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_p & -B_1 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q - {}^tB_1B_1 \end{pmatrix}.$$

Comme précédemment, de $A'' = {}^tVA'V$ on déduit que $A'' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, puis que :

$$I_q - {}^tB_1B_1 \in S_q^{++}(\mathbb{R}).$$

Il est bien connu que ${}^tB_1B_1 \in S_q^{+}(\mathbb{R})$ (en effet, en utilisant la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^q$ identifié à $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$, on a $\forall X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX\,{}^tB_1B_1X = \| B_1X \|^2 \geqslant 0$), donc ${}^tB_1B_1$ est orthogonalement semblable à :

$$\operatorname{diag}\left(\lambda_1, \dots, \lambda_q\right) \quad \text{avec} \quad \forall i \in [\![1, q]\!], \lambda_i \geqslant 0.$$

Alors $I_q - {}^tB_1B_1$ est orthogonalement semblable à $\operatorname{diag}\left(1-\lambda_1, \dots, 1-\lambda_q\right)$ et puisque cette matrice $I_q - {}^tB_1B_1$ est définie-positive, on a $\forall i \in [\![1, q]\!]$, $1 - \lambda_i > 0$ d'où finalement :

$$\forall i \in [\![1, q]\!], 0 \leqslant \lambda_i < 1 \;\text{ et }\; 0 < 1 - \lambda_i \leqslant 1.$$

On en déduit :

$$\det A'' = \prod_{i=1}^{q} 1 - \lambda_i \in \left]0, 1\right]$$

or $\det A'' = \det A' = \det A \cdot (\det P)^2$, c'est-à-dire :

$$\det A'' = \det A \cdot \left(\det P_1\right)^2 \left(\det P_2\right)^2 = \frac{\det A}{\det A_1 \ \det A_2},$$

donc $\det A'' \leqslant 1$ donne :

$$\det A \leqslant \det A_1 \ \det A_2 .$$

Ex. 22

Soit $A = \left[a_{ij}\right]_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ et $B = \left[b_{ij}\right]_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ deux matrices symétriques réelles, définies-positives.

On pose $A_1 = \left[a_{ij}\right]_{2 \leqslant i, j \leqslant n}$ et $B_1 = \left[b_{ij}\right]_{2 \leqslant i, j \leqslant n}$.

1) Montrer que :

$$\frac{\det(A+B)}{\det\left(A_1 + B_1\right)} \geqslant \frac{\det A}{\det A_1} + \frac{\det B}{\det B_1}.$$

2) Déterminer les cas d'égalité.

1) Dans $\mathbb{R}^n$ rapporté à sa base canonique $e = \left(e_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, les matrices A et B sont associées à des formes quadratiques q_A et q_B définies-positives. On a alors :

$$A + B = \operatorname{mat}_e\left(q_A + q_B\right)$$

et comme il est clair que la forme quadratique $q_A + q_B$ est définie-positive, il en est de même pour la matrice $A + B$. Ainsi :

$$A, B, A + B \in S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

De même, les restrictions $q_{A,1}$ et $q_{B,1}$ de q_A et q_B à $F = \mathrm{Vect}\left(e_2, \ldots, e_n\right)$ sont des formes quadratiques définies-positives ainsi que leur somme $q_{A,1}+q_{B,1}$, leurs matrices A_1, B_1 et A_1+B_1 par rapport à la base $\left(e_i\right)_{2\leq i\leq n}$ sont donc également définies-positives, c'est-à-dire que :

$$A_1, B_1, A_1 + B_1 \in S_{n-1}^{++}(\mathbb{R}).$$

▪ Remarquons d'abord qu'une réduction par congruence de A_1 permet d'effectuer une réduction par blocs de A.

En considérant une matrice $P \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPA_1P = D$, avec D diagonale, et en écrivant :

$$A = \begin{bmatrix} a & L_A \\ {}^tL_A & A_1 \end{bmatrix},$$

$a \in \mathbb{R}$, $L_A \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$, on obtient :

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tP \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & L_A \\ {}^tL_A & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & L'_A \\ {}^tL'_A & D \end{bmatrix}$$

où on a posé $L'_A = L_AP$, puis en utilisant que D est inversible (tout comme A_1), et que ${}^tD^{-1} = D^{-1}$:

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & -L'_AD^{-1} \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & L'_A \\ {}^tL'_A & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -D^{-1}\,{}^tL'_A & I_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - L'_AD^{-1}\,{}^tL'_A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

Ainsi avec $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -D^{-1}\,{}^tL'_A & I_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $W = UV$, on a :

$${}^tWAW = A'' : A \text{ est congruente à la diagonale } A''.$$

Avec $\det U = \det P$ et $\det V = 1$, il en résulte en particulier :

$$\det A'' = (\det P)^2 \det A$$

c'est-à-dire :

$$\det A = \left(a - L'_AD^{-1}\,{}^tL'_A\right) \frac{\det D}{(\det P)^2} = \left(a - L'_AD^{-1}\,{}^tL'_A\right) \det A_1$$

ou encore :

$$\frac{\det A}{\det A_1} = a - L'_AD^{-1}\,{}^tL'_A.$$

▪ En second lieu, remarquons que puisque A_1 est définie-positive, A_1 et B_1 sont simultanément congruentes à I_{n-1} et à une diagonale D c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$${}^tPA_1P = I_{n-1} \quad \text{et} \quad {}^tPB_1P = D = \mathrm{diag}\left(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\right)$$

donc :

$${}^tP\left(A_1 + B_1\right)P = \Delta = \mathrm{diag}\left(1 + \beta_1, 1 + \beta_2, \ldots, 1 + \beta_n\right).$$

On pose $A = \begin{bmatrix} a & L_A \\ {}^tL_A & A_1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b & L_B \\ {}^tL_B & B_1 \end{bmatrix}$, ce qui donne :

$$A + B = \begin{bmatrix} a + b & L_A + L_B \\ {}^tL_A + {}^tL_B & A_1 + B_1 \end{bmatrix}$$

puis, avec $L'_A = L_AP$, $L'_B = L_BP$ et $L'_A + L'_B = \left(L_A + L_B\right)P$, le calcul du premier point donne :

$$\frac{\det A}{\det A_1} = a - L'_A\,{}^tL'_A$$

$$\frac{\det B}{\det B_1} = b - L'_BD^{-1}L'_B$$

$$\frac{\det(A + B)}{\det\left(A_1 + B_1\right)} = a + b - \left(L'_A + L'_B\right)\Delta^{-1}\,{}^t\left(L'_A + L'_B\right).$$

Posons maintenant $L'_A = (x_1, \dots, x_{n-1})$ et $L'_B = (y_1, \dots, y_{n-1})$, on obtient :

$$\frac{\det(A+B)}{\det(A_1+B_1)} - \frac{\det A}{\det A_1} - \frac{\det B}{\det B_1} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{\beta_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i+y_i)^2}{1+\beta_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{1+\beta_i} x_i^2 + \frac{1}{\beta_i(1+\beta_i)} y_i^2 - \frac{2x_iy_i}{1+\beta_i} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\beta_i} \left(x_i\sqrt{\beta_i} - \frac{y_i}{\sqrt{\beta_i}} \right)^2$$

> Remarquer que les β_i sont strictement positifs puisque, par hypothèse, B_1 est définie-positive.

La conclusion en résulte :

$$\frac{\det(A+B)}{\det(A_1+B_1)} - \frac{\det A}{\det A_1} - \frac{\det B}{\det B_1} \geqslant 0.$$

2) Le calcul précédent montre que les cas d'égalités correspondent à :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ y_i = \beta_i x_i \quad \text{c'est-à-dire à} \quad {}^tL'_B = D\,{}^tL'_A.$$

Avec $L'_A = L_A P$, $L'_B = L_B P$ et $D = {}^tPB_1P$, cette condition équivaut à :

$${}^tL_B = B_1 P\,{}^tP\,{}^tL_A$$

soit encore, puisque $A_1^{-1} = P\,{}^tP$, à :

$$B_1^{-1}\,{}^tL_B = A_1^{-1}\,{}^tL_A.$$

Ex. 23

Soit A et B des matrices symétriques réelles définies-positives :

$$(A, B) \in S_n^{++}(\mathbb{R})^2,$$

α et β des réels positifs tels que $\alpha + \beta = 1$.

Montrer que $\det(\alpha A + \beta B) \geqslant (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$.

> Lorsque l'on dispose de deux matrices symétriques réelles, l'une étant définie-positive, il est souvent intéressant d'observer qu'elles sont simultanément congruentes à I_n et à une diagonale.

Notons $e = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Puisqu'elle est symétrique, réelle, définie-positive, A est la matrice par rapport à e d'un produit scalaire φ sur $\mathbb{R}^n$ et nous notons E l'espace euclidien ainsi défini : $E = (\mathbb{R}^n, \varphi)$.

Dans un tel espace, il existe au moins une base orthonormale $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ donc, en posant $U = \operatorname{mat}_e \varepsilon$ on a :

$$\operatorname{mat}_\varepsilon \varphi = I_n = {}^tUAU \quad \text{avec} \quad U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Posons alors $B_1 = {}^tUBU$. Il est immédiat que B_1 est encore symétrique réelle (${}^tB_1 = B_1$) définie-positive car $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ donne $UX \neq 0$ et donc :

$${}^tXB_1X = {}^t(UX)B(UX) > 0.$$

Alors on sait qu'il existe $V \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$V^{-1}B_1V = {}^tVB_1V = D$$

où $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ étant les valeurs propres de B_1.

Remarquer que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ne sont pas les valeurs propres de B sauf si U est orthogonale, c'est-à-dire si $A = I_n$.

On obtient donc :

$$^t(UV)A(UV) = I_n \quad \text{et} \quad ^t(UV)B(UV) = D$$

soit aussi :

$$A = {}^tPP \text{ et } B = {}^tPDP \quad \text{avec} \quad P = (UV)^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

En conséquence :

$$\det A = (\det P)^2, \ \det B = (\det P)^2 \cdot \det D$$

et, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$:

$$\det(\alpha A + \beta B) = (\det P)^2 \det\left(\alpha I_n + \beta D\right) = (\det P)^2 \prod_{i=1}^{n} (\alpha + \beta\lambda_i).$$

La fonction ℓn étant concave sur $\mathbb{R}_+^*$, sachant que les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont strictement positifs (car B_1 est définie-positive), pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha + \beta = 1$, on a :

$$\ell n(\alpha + \beta\lambda_i) \geqslant \alpha \, \ell n \, 1 + \beta \, \ell n \, \lambda_i$$

donc :

$$\alpha + \beta \, \lambda_i \geqslant \lambda_i^\beta$$

puis :

$$\det(\alpha A + \beta B) \geqslant (\det P)^2 \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^\beta.$$

Avec $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det D = \frac{\det B}{(\det P)^2} = \frac{\det B}{\det A}$, il vient finalement :

$$\det(\alpha A + \beta B) \geqslant (\det A)^{1-\beta} (\det B)^\beta$$

c'est-à-dire

$$\det(\alpha A + \beta B) \geqslant (\det A)^\alpha (\det B)^\beta.$$

(E) Coniques

Ex. 24

Déterminer l'ensemble des centres des triangles équilatéraux dont les sommets décrivent une parabole $\mathcal{P}$.

Le centre du triangle équilatéral est le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à ce triangle et les sommets apparaissent alors comme les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$.

De façon à respecter la symétrie des rôles joués par ces trois sommets, on peut donc procéder comme suit :

1) écrire un paramétrage rationnel d'un cercle $\mathcal{C}$;

2) écrire l'équation aux paramètres des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$;

3) écrire la condition pour que les racines de cette équation représentent les sommets d'un triangle équilatéral.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ tel que $\mathcal{P}$ ait pour équation :

$$y^2 - 2px = 0.$$

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega = (a, b)$ et de rayon R est paramétré par :

$$x = a + R\cos\theta, \quad y = b + R\sin\theta, \quad \theta \in \left[0, 2\pi\right],$$

soit aussi, en posant $u = e^{i\theta}$ et $c = \dfrac{R}{2}$, par :

$$x = a + c\left(u + \frac{1}{u}\right), \quad y = b - ic\left(u - \frac{1}{u}\right), \quad u \in \mathbb{U}.$$

> Rappelons que $\mathbb{U}$ est la notation usuelle du cercle unité de $\mathbb{C}$.

Écrivons l'équation aux paramètres de l'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$:

$$2p\left[a + c\left(u + \frac{1}{u}\right)\right] - \left[b - ic\left(u - \frac{1}{u}\right)\right]^2 = 0$$

c'est-à-dire $Q(u) = 0$ où on a posé :

$$Q(u) = c^2u^4 + 2c(p + ib)u^3 + \left(2pa - b^2 - 2c^2\right)u^2 + 2c(p - ib)u + c^2.$$

Pour que $\mathcal{P} \cap \mathcal{C}$ contienne les sommets d'un triangle équilatéral, il faut et il suffit que Q admette trois racines de la forme $\alpha, j\alpha, j^2\alpha$, donc que Q soit divisible par $u^3 - \alpha^3$, avec $\alpha \in \mathbb{U}$.

La division euclidienne de Q par $u^3 - \alpha^3$ s'écrit :

$$Q(u) = \left(u^3 - \alpha^3\right)\left(c^2u + 2ibc + 2pc\right) + R(u)$$

où $R(u) = \left(2pa - b^2 - 2c^2\right) + \left[\alpha^3 c^2 + 2c(p - ib)\right]u + c^2 + 2\alpha^3 c(p + ib)$.

La condition $u^3 - \alpha^3$ divise $Q(u)$ s'écrit donc :

$$\begin{cases} 2pa - b^2 - 2c^2 = 0 \\ \alpha^3 c + 2(p - ib) = 0 \\ c + 2\alpha^3(p + ib) = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 2pa - b^2 - 2c^2 = 0 & (1) \\ c^2 - 4\left(p^2 + b^2\right) = 0 & (2) \\ \alpha^3 c + 2(p - ib) = 0 & (3) \end{cases}$$

Une condition nécessaire apparait alors clairement avec (1) et (2) :

$$2pa - b^2 - 8\left(p^2 + b^2\right) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad b^2 = \frac{2p}{9}(a - 4p) \qquad (4)$$

Réciproquement, on suppose (4) vérifiée.

Soit alors $c \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$c = 2|p - ib| \quad \text{donc} \quad c^2 = 4\left(p^2 + b^2\right)$$

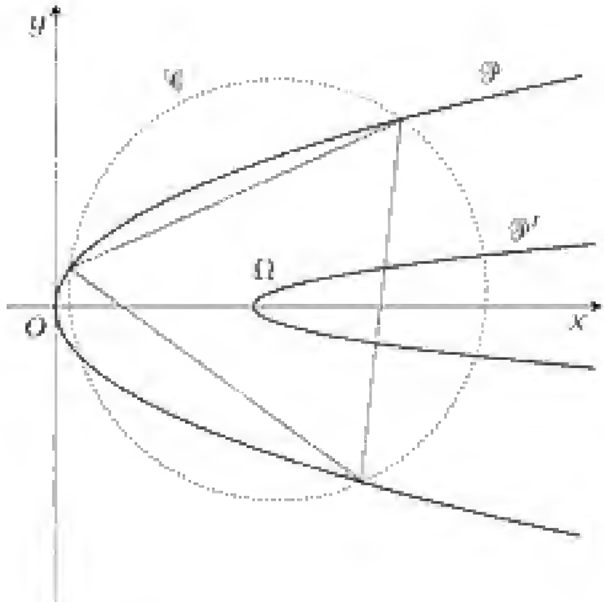
puis $\alpha \in \mathbb{U}$ tel que :

$$\alpha^3 c = -2(p - ib).$$

On a ainsi retrouvé (2) et (3) et, compte tenu de (4), avec (2), on obtient (1).

En conclusion, l'ensemble cherché est la parabole $\mathcal{P}'$ d'équation :

$$y^2 = \frac{2p}{9}(x - 4p).$$



Ex. 25

Discuter, suivant la valeur du paramètre réel λ, la nature de la courbe $\mathscr{C}_\lambda$ donnée, dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, par l'équation :

$$(1+\lambda)(x^2+y^2) + 2(1-\lambda)xy - 4\lambda y + 1 = 0.$$

On précisera, quand il y a lieu, les foyer(s), centre et asymptote(s).

Notons q_λ la partie quadratique de l'équation :

$$\forall \overrightarrow{V} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j},\ q_\lambda(\overrightarrow{V}) = (1+\lambda)(x^2+y^2) + 2(1-\lambda)xy$$

et soit A_λ la matrice de q_λ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$:

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 1+\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1+\lambda \end{bmatrix}.$$

On obtient :

$$\det A_\lambda = (1+\lambda)^2 - (1-\lambda)^2 = 4\lambda$$

donc, pour $\lambda = 0$, on a affaire à une courbe du genre parabole, tandis que pour $\lambda \neq 0$, il s'agit d'une conique à centre.

- Premier cas : $\lambda = 0$

L'équation de $\mathscr{C}_0$ s'écrit :

$$x^2 + y^2 + 2xy + 1 = 0$$

c'est-à-dire $(x+y)^2 + 1 = 0$, et, en fait, $\mathscr{C}_0 = \varnothing$.

- Deuxième cas : $\lambda \neq 0$

En posant :

$$f_\lambda(x, y) = (1+\lambda)(x^2+y^2) + 2(1-\lambda)xy - 4\lambda y + 1,$$

le centre de symétrie $\Omega(x_0, y_0)$ est défini par $\operatorname{grad} f_\lambda(x_0, y_0) = 0$, c'est-à-dire par :

$$A_\lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\lambda \end{pmatrix}$$

et on en déduit :

$$x_0 = \frac{\lambda - 1}{2} \quad , \quad y_0 = \frac{\lambda + 1}{2}.$$

Par translation des axes :

$$x = x_0 + x' \quad , \quad y = y_0 + y'$$

on obtient l'équation dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, appelée équation au centre :

$$\mathscr{C}_\lambda : (1+\lambda)(x'^2 + y'^2) + 2(1-\lambda)x'y' = \lambda^2 + \lambda - 1.$$

Observons alors que $q(x', y') = q(y', x')$. Il en résulte que les bissectrices du repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ sont axes de symétrie de $\mathscr{C}_\lambda$ et nous opérons donc une rotation de la base, d'angle $\pi/4$. Soit :

$$\vec{I} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} \quad , \quad \vec{J} = \frac{-\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$$

dans le repère $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$, $\mathscr{C}_\lambda$ a pour équation :

$$(1+\lambda)(X^2 + Y^2) + (1-\lambda)(X^2 - Y^2) = \lambda^2 + \lambda - 1$$

c'est-à-dire :

$$2X^2 + 2\lambda Y^2 = \lambda^2 + \lambda - 1.$$

On a en effet :

$$x'^2 + y'^2 = \overrightarrow{\Omega M}^2 = X^2 + Y^2$$

et les formules de changement de base qui s'écrivent :

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y), \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)$$

donnent :

$$2x'y' = X^2 - Y^2.$$

> On remarquera que le fait d'observer la symétrie de q_λ donne les axes de symétrie de $\mathscr{C}_\lambda$ et dispense donc d'avoir à les rechercher en réduisant la matrice A_λ.

On peut maintenant achever la discussion.

- Pour $0 < \lambda < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, on a $\lambda^2 + \lambda - 1 < 0$ donc $\mathscr{C}_\lambda = \varnothing$.
- Pour $\lambda = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, l'équation se réduit à $X^2 + \lambda Y^2 = 0$ et $\mathscr{C}_\lambda = \{\Omega\}$.
- Pour $\lambda > \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, on a $\lambda^2 + \lambda - 1 > 0$ et $\mathscr{C}_\lambda$ est une ellipse d'équation :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \text{avec} \quad a = \sqrt{\frac{\lambda^2 + \lambda - 1}{2}} \text{ et } b = \sqrt{\frac{\lambda^2 + \lambda - 1}{2\lambda}}.$$

Donc l'axe focal est $(\Omega, \vec{J})$ si $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} < \lambda < 1$, les foyers étant :

$$\Omega \pm \sqrt{\frac{(\lambda^2 + \lambda - 1)(1-\lambda)}{2\lambda}}\,\vec{J}$$

et lorsque $\lambda > 1$, cet axe focal devient $(\Omega, \vec{I})$ et les foyers :

$$\Omega \pm \sqrt{\frac{(\lambda^2 + \lambda - 1)(\lambda - 1)}{2\lambda}}\,\vec{I}.$$

Pour $\lambda = 1$, $\mathscr{C}_1$ est le cercle de centre $\Omega(x_0 = 0, y_0 = 1)$ et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

- Pour $-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} < \lambda < 0$, on a $\lambda^2 + \lambda - 1 < 0$ donc $\mathscr{C}_\lambda$ est une hyperbole d'équation :

$$-\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \text{avec} \quad a = \sqrt{\frac{1-\lambda-\lambda^2}{2}} \text{ et } b = \sqrt{\frac{\lambda^2+\lambda-1}{2\lambda}}.$$

L'axe focal est $(\Omega, \vec{j})$ et les foyers :

$$\Omega \pm \sqrt{\frac{(\lambda^2+\lambda-1)(1-\lambda)}{2\lambda}}\,\vec{j}.$$

Les asymptotes ont pour équations : $X = \pm\sqrt{-\lambda}\,Y$.

- Pour $\lambda = -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\mathscr{C}_\lambda$ se décompose en les deux droites d'équations :

$$X = \pm\sqrt{-\lambda}\,Y.$$

- Pour $\lambda < -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, on a $\lambda^2 + \lambda - 1 > 0$ donc $\mathscr{C}_\lambda$ est encore une hyperbole, mais l'équation réduite s'écrit maintenant :

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \text{avec} \quad a = \sqrt{\frac{\lambda^2+\lambda-1}{2}} \text{ et } b = \sqrt{\frac{1-\lambda-\lambda^2}{2\lambda}}.$$

L'axe focal est $(\Omega, \vec{i})$, les foyers :

$$\Omega \pm \sqrt{\frac{(\lambda^2+\lambda-1)(\lambda-1)}{2\lambda}}\,\vec{i}$$

et les asymptotes ont encore pour équations :

$$X = \pm\sqrt{-\lambda}\,Y.$$

Ex. 26

On donne deux points A et B, distincts, du plan euclidien.

Déterminer le lieu des points M tels que les bissectrices de $\left(\widehat{MA, MB}\right)$ aient des directions fixes.

L'essentiel est bien sûr de choisir un «bon» repère.

A et B jouent des rôles symétriques et l'énoncé introduit deux directions fixes orthogonales.

Choisissons donc pour repère orthonormal, $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ où $O = \dfrac{A+B}{2}$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ définissant ces deux directions fixes imposées.

Avec les identifications usuelles, on a alors :

$$A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} a-x \\ a-y \end{pmatrix}.$$

Pour que le vecteur $\vec{i}$ dirige l'une des deux bissectrices de $\left(\widehat{MA, MB}\right)$), il faut et il suffit que l'image de $\overrightarrow{MA}$ dans la réflexion d'axe $(O, \vec{i})$ soit colinéaire à $\overrightarrow{MB}$.

Ainsi une équation du lieu (Γ) cherché est :

$$\begin{vmatrix} a-x & x+a \\ y-b & y+b \end{vmatrix} = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad xy = ba.$$

Γ est donc une hyperbole équilatère passant par A et B, centrée au milieu de $[A, B]$, dont les asymptotes sont dirigées par les directions fixes définies par $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Ex. 27

Étant donné $a > 0$, dans le plan $\mathbb{R}^2$ rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la famille de coniques $(\Gamma_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ d'équations :

$$x^2 \sin^2 \theta - xy \sin 2\theta + y^2(1 + \cos^2 \theta) = a^2 \sin^2 \theta \qquad \Gamma_\theta$$

Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des sommets et l'ensemble $\mathcal{F}$ des foyers des Γ_θ, $\theta \in \mathbb{R}$.

> Comme dans tout exercice de géométrie, il est bon de restreindre le problème en tenant compte des symétries de la figure.

En remarquant que $\Gamma_{\theta+\pi} = \Gamma_\theta$ pour tout θ, on obtient que :

$$(\Gamma_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}} = (\Gamma_\theta)_{\theta \in [0, \pi[}.$$

D'autre part, on observe que Γ_θ et $\Gamma_{-\theta}$ sont images, l'une de l'autre, dans la réflexion d'axe $(O, \vec{i})$ (ou $(O, \vec{j})$). En conséquence, si $\mathcal{S}_1$ est l'ensemble des sommets, et $\mathcal{F}_1$ l'ensemble des foyers, des Γ_θ, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on aura :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$$

où $\mathcal{S}_2$ (resp. $\mathcal{F}_2$) est l'image de S_1 (resp. $\mathcal{F}_1$) dans la réflexion d'axe $(O, \vec{i})$ (ou $(O, \vec{j})$).

Remarquons enfin que l'équation de Γ_0 est $y^2 = 0$: Γ_0 se réduit à une droite (Ox) comptée deux fois. En conséquence, on se limite maintenant à $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

> Le point O est évidemment centre de symétrie de Γ_θ. Il nous suffit donc, pour préciser les sommets et foyers, de déterminer les directions propres de l'endomorphisme symétrique f_q de la partie quadratique de l'équation.

Posons :

$$\forall \vec{M} = x\,\vec{i} + y\,\vec{i},\ q(\vec{M}) = x^2 \sin^2 \theta - xy \sin 2\theta + y^2(1 + \cos^2 \theta).$$

La matrice de cette forme quadratique dans la base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j})$ est :

$$A = \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & -\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & 1 + \cos^2\theta \end{bmatrix}.$$

> Puisque la base est orthonormale, A est aussi la matrice, par rapport à $(\vec{i}, \vec{j})$, de f_q endomorphisme symétrique de la forme quadratique q.

On obtient $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + \sin^2\theta$ d'où les valeurs propres :

$$\lambda_1 = 1 - \cos\theta \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 1 + \cos\theta.$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, ces valeurs propres sont confondues. Mais l'équation devient :

$$\Gamma_{\frac{\pi}{2}} \ : \ x^2 + y^2 = a^2.$$

On reconnait alors un cercle dont tous les points sont des sommets et dont les foyers sont confondus avec O.

Supposons maintenant $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

On a alors $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et les sous-espaces propres sont deux droites orthogonales.

$\operatorname{Ker}(f_q - \lambda_1 \operatorname{Id})$, d'équation $-x_1 \sin\theta + (1+\cos\theta)x_2 = 0$ est dirigée par :

$$\overrightarrow{u} = \cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{i} + \sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{j},$$

donc $\operatorname{Ker}(f_q - \lambda_2 \operatorname{Id})$ est dirigée par :

$$\overrightarrow{v} = -\sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{i} + \cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{j},$$

image de $\overrightarrow{u}$ par la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Dans le repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, en posant pour tout M, $\overrightarrow{OM} = X\overrightarrow{u} + Y\overrightarrow{v}$, Γ_θ a pour équation :

$$(1-\cos\theta)X^2 + (1+\cos\theta)Y^2 = a^2\sin^2\theta$$

soit aussi :

$$\frac{X^2}{2a^2\cos^2\frac{\theta}{2}} + \frac{Y^2}{2a^2\sin^2\frac{\theta}{2}} = 1.$$

- Les sommets sont donc définis par :

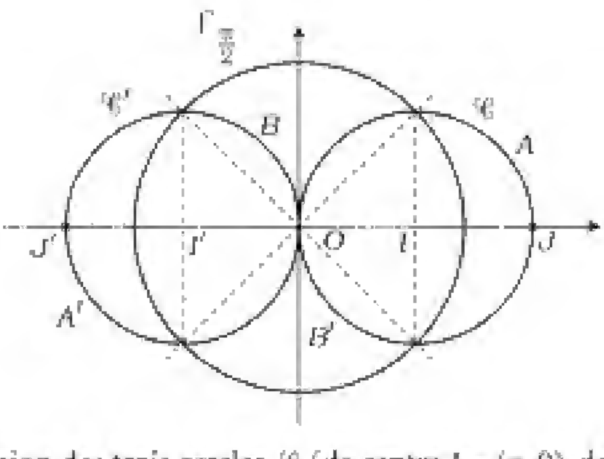
$$A = O + a\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{u}, \qquad A' = O - a\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{u},$$
$$B = O + a\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{v}, \qquad B' = O - a\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{v}.$$

soit, en coordonnées polaires d'axes $(O, \overrightarrow{i})$ par :

$$A\ :\ r = a\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2},\quad \omega = \frac{\theta}{2}, \qquad A'\ :\ r = a\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2},\quad \omega = \frac{\theta}{2} + \pi\,;$$
$$B\ :\ r = a\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2},\quad \omega = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}, \quad B'\ :\ r = a\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2},\quad \omega = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, chacun des points A et B' décrit un arc du cercle $\mathscr{C}$ d'équation polaire $r = a\sqrt{2}\cos\omega$: A décrit l'arc correspondant à $0 < \omega < \pi/4$ et B' l'arc correspondant à $-\pi/2 < \omega < -\pi/4$. De même, chacun des points A' et B décrit un arc du cercle $\mathscr{C}'$ d'équation polaire $r = -a\sqrt{2}\cos\omega$: A' décrit l'arc correspondant à $\pi < \omega < (3\pi)/4$ et B l'arc correspondant à $\pi/2 < \omega < (3\pi)/4$.

On obtient l'ensemble $\mathscr{S}$ en ajoutant à ces arcs leurs images par la réflexion d'axe $(O, \overrightarrow{i})$ et le cercle $\Gamma_{\frac{\pi}{2}}$.



Finalement, $\mathscr{S}$ est la réunion des trois cercles, $\mathscr{C}$ (de centre $I = (a, 0)$, de rayon a), $\mathscr{C}'$ (de centre $I' = (-a, 0)$, de rayon a) et $\Gamma_{\frac{\pi}{2}}$ (de centre O, de rayon $a\sqrt{2}$), privée des trois points :

$$O, J = (a\sqrt{2}, 0) \text{ et } J' = (-a\sqrt{2}, 0).$$

- Pour préciser les foyers, on remarque d'abord que, pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, on a $\frac{\theta}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et donc :

$$\cos\frac{\theta}{2} > \sin\frac{\theta}{2}$$

ce qui donne que l'axe focal de l'ellipse Γ_θ est $(O, \overrightarrow{u})$, ainsi les foyers sont :

$$F = O + a\sqrt{2}\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}\,\overrightarrow{u} \quad \text{et} \quad F' = -F,$$

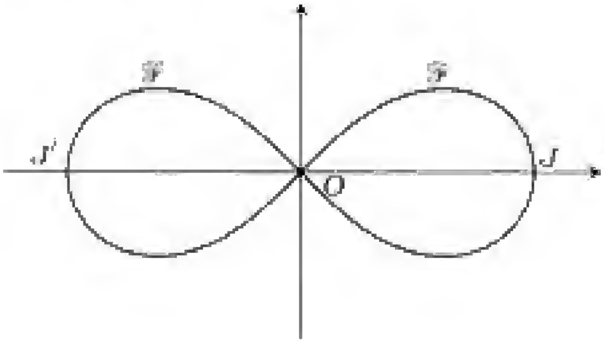
c'est-à-dire que F et F' ont pour coordonnées polaires respectives :

$$r = a\sqrt{2}\sqrt{\cos\theta},\ \omega = \frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad r = -a\sqrt{2}\sqrt{\cos\theta},\ \omega = \frac{\theta}{2} \quad \text{avec} \quad 0 < \omega < \frac{\pi}{4}.$$

En complétant avec la réflexion d'axe $(O, \overrightarrow{i})$, il vient finalement que $\mathcal{F}$ est la lemniscate de Bernoulli d'équation polaire :

$$r = a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\omega}$$

privée de ses points d'intersection avec $(O, \overrightarrow{i})$.



(F) Quadriques

Ex. 28

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation :

$$2x^2 + 2y^2 - z^2 - 8xy - 2yz - 2zx + 4x - 8y + 4z = 0.$$

1) Former une équation réduite et préciser la nature de $\mathcal{S}$.

2) Déterminer les génératrices de $\mathcal{S}$ dans le repère $\mathcal{R}$.

1) Introduisons la forme quadratique :

$$q \ :\ x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \mapsto 2x^2 + 2y^2 - z^2 - 8xy - 2yz - 2zx,$$

sa matrice A dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -4 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

et la forme linéaire :

$$\ell \ :\ x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \mapsto 4x - 8y + 4z.$$

Les valeurs propres de A sont -3, 0, 6 et ses sous-espaces propres :
$$\text{Ker}\,(A+3I) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \text{Ker}\,A = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\quad \text{Ker}\,(A-6I) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$
Dans le repère orthonormal $\mathcal{R}' = \left(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$, avec :
$$\overrightarrow{I} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{J} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{K} = \overrightarrow{I}\wedge\overrightarrow{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},$$
$\mathcal{S}$ a pour équation :
$$-3x'^2 + 6z'^2 + \ell\left(\overrightarrow{I}\right)x' + \ell\left(\overrightarrow{J}\right)y' + \ell\left(\overrightarrow{K}\right)z' = 0$$
c'est-à-dire :
$$-3x'^2 + 6z'^2 - 2\sqrt{6}y' - 6\sqrt{2}z' = 0.$$
Cette équation s'écrit aussi :
$$-3x'^2 + 6\left(z' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\sqrt{6}\left(y' + \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$
donc, dans le repère $\mathcal{R}'' = \left(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ tel que $\Omega = 0 - \frac{\sqrt{6}}{4}\overrightarrow{J} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{K}$, on obtient l'équation réduite :
$$6Z^2 - 3X^2 = 2\sqrt{6}Y.$$
En conséquence, $\mathcal{S}$ est un paraboloïde hyperbolique.

> Noter que la nature de $\mathcal{S}$ est connue dès que l'on sait que $\ell\left(\overrightarrow{J}\right) \neq 0$.
>
> Pour la préciser, il n'est donc pas utile de calculer $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{K}$.

2) Posons $\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k} = x'\,\overrightarrow{I} + y'\,\overrightarrow{J} + z'\,\overrightarrow{K}$.
L'expression :
$$q\left(\overrightarrow{u}\right) = 6z'^2 - 3x'^2$$
montre que q peut se décomposer en produit de deux formes linéaires indépendantes.
Écrivons donc :
$$q\left(\overrightarrow{u}\right) = 2x^2 + 2y^2 - 8xy - \left(z^2 + 2zx + 2zy\right),$$
avec $z^2 + 2zx + 2zy = (z+x+y)^2 - (x+y)^2$, on obtient :
$$q\left(\overrightarrow{u}\right) = 3x^2 + 3y^2 - 6xy - (x+y+z)^2 = 3(x-y)^2 - (x+y+z)^2$$
soit encore :
$$q\left(\overrightarrow{u}\right) = \left(x\left(\sqrt{3}-1\right) - y\left(\sqrt{3}+1\right) - z\right)\left(x\left(\sqrt{3}+1\right) - y\left(\sqrt{3}-1\right) + z\right).$$
Donc l'équation de $\mathcal{S}$ dans le repère $\mathcal{R}$ s'écrit :
$$\left(x\left(\sqrt{3}-1\right) - y\left(\sqrt{3}+1\right) - z\right)\left(x\left(\sqrt{3}+1\right) - y\left(\sqrt{3}-1\right) + z\right) = -4x + 8y - 4z$$
et les deux systèmes de génératrices sont définis par :
$$D_\lambda\ :\ \begin{cases} x\left(\sqrt{3}-1\right) - y\left(\sqrt{3}+1\right) - z = \lambda \\ \lambda\left[x\left(\sqrt{3}+1\right) - y\left(\sqrt{3}-1\right) + z\right] = -4x + 8y - 4z \end{cases}\qquad \lambda \in \mathbb{R}$$
$$D'_\mu\ :\ \begin{cases} x\left(\sqrt{3}+1\right) - y\left(\sqrt{3}-1\right) + z = \mu \\ \mu\left[x\left(\sqrt{3}-1\right) - y\left(\sqrt{3}+1\right) - z\right] = -4x + 8y - 4z \end{cases}\qquad \mu \in \mathbb{R}$$

Ex. 29

Soit $\mathscr{C}$ le cône d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

dans un repère orthonormal $\mathscr{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, et P le plan :

$$ux + vy + wz = 0.$$

Caractériser P pour que l'intersection $P \cap \mathscr{C}$ soit la réunion de deux droites orthogonales.

Introduisons la forme quadratique :

$$q\left(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}\right) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2},$$

sa forme polaire φ, le vecteur unitaire :

$$\overrightarrow{K} = \frac{u\overrightarrow{i} + v\overrightarrow{j} + w\overrightarrow{k}}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

et une base orthonormale $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ de E.

Dans le repère $\mathscr{R}' = \left(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$, l'intersection $P \cap \mathscr{C}$ a pour équation :

$$q\left(\overrightarrow{I}\right)X^2 + 2\varphi\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)XY + q\left(\overrightarrow{J}\right)Y^2 = 0, Z = 0,$$

elle est formée de deux droites orthogonales si et seulement si $q\left(\overrightarrow{I}\right) + q\left(\overrightarrow{J}\right) = 0$.

En effet, la courbe du second degré $\mathscr{P} \cap \mathscr{C}$ est du genre hyperbole équilatère si et seulement si elle a une équation de la forme :

$$X^2 - Y^2 = k$$

donc si et seulement si $\operatorname{Tr} A = 0$ avec :

$$A = \begin{bmatrix} q\left(\overrightarrow{I}\right) & \varphi\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right) \\ \varphi\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right) & q\left(\overrightarrow{J}\right) \end{bmatrix}.$$

> Une courbe du second degré décomposée en deux droites sécantes est du genre hyperbole et, lorsque ces droites sont orthogonales, on a affaire au genre hyperbole équilatère.

Or par invariance de la trace, on a $q\left(\overrightarrow{I}\right) + q\left(\overrightarrow{J}\right) + q\left(\overrightarrow{K}\right) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}$, d'où la condition nécessaire et suffisante :

$$q\left(u\overrightarrow{i} + v\overrightarrow{j} + w\overrightarrow{k}\right) = \left(u^2 + v^2 + w^2\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right).$$

Les plans $P : ux + vy + wz = 0$ solutions du problème sont donc caractérisés par :

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)u^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)v^2 + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)w^2 = 0,$$

c'est-à-dire que ce sont les plans passant par O et orthogonaux aux génératrices du cône $\mathscr{C}'$ d'équation :

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)y^2 + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)z^2 = 0.$$

Pour qu'un tel plan existe, il faut que $c^2 \leqslant \sup(a^2, b^2)$, (condition pour que $\mathscr{C}'$ ne soit pas réduit à $\{0\}$).

Ex. 30

L'espace $\mathbb{R}^3$ est rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Pour tout point M de coordonnées (x, y, z), on pose :

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

1) Soit $\mathcal{C}$ le cône du second degré d'équation ${}^tVAV = 0$.

Montrer que $\mathcal{C}$ a trois génératrices, deux à deux orthogonales, si et seulement si $\operatorname{Tr} A = 0$.

2) Soit l'ellipsoïde $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

Déterminer le lieu des points d'où l'on peut mener à $\mathcal{E}$ trois tangentes deux à deux orthogonales.

1) Notons q la forme quadratique de matrice A :

$$q(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = (x\ y\ z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- La condition est nécessaire.

Si $(O, \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ est un repère orthonormal construit sur trois génératrices, deux à deux orthogonales, du cône $\mathcal{C}$, on a :

$$q(\vec{i'}) = q(\vec{j'}) = q(\vec{k'}) = 0,$$

donc la matrice $A' = {}^tPAP$ de q dans la base $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ a une diagonale nulle et, dans le nouveau repère, $\mathcal{C}$ a pour équation :

$$\mathcal{C} \ : \ \lambda y'z' + \mu z'x' + \gamma x'y' = 0.$$

Or A est semblable à A' car la matrice de passage P est orthogonale, donc :

$$\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} A' = 0.$$

- La condition est suffisante.

Suivons la démarche inverse. Supposons que, dans le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, l'équation du cône est déjà réduite :

$$\mathcal{C} \ : \ \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0 \ , \quad A = \operatorname{diag}(\alpha, \beta, \gamma) \ \text{ et } \ \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Considérons un repère orthonormal $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ où $\vec{K} = \dfrac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}$ sans préciser $\vec{I}, \vec{J}$.

On a alors $q(\vec{K}) = \dfrac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) = 0$.

Puisque $P = \operatorname{mat}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}) \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$, la matrice de q dans $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est :

$$A' = {}^tPAP = \begin{pmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \operatorname{Tr} A' = \operatorname{Tr} A = a + a' = 0.$$

La section de $\mathcal{C}$ par le plan $(O, \vec{I}, \vec{J})$ a donc pour équation :

$$Z = 0 \ , \quad aX^2 + 2b''XY + a'Y^2 = 0$$

Il s'agit de la réunion de deux droites orthogonales, elles forment avec $(O, \overrightarrow{K})$ trois génératrices de $\mathscr{C}$, deux à deux orthogonales.

En fait, tout plan orthogonal à une génératrice recoupe $\mathscr{C}$ en deux droites orthogonales ou en une hyperbole équilatère.

2) Si $\Omega = (x_0, y_0, z_0)$ est un point de l'ensemble cherché, le cône $\mathscr{C}$ de sommet Ω circonscrit à $\mathscr{E}$ possède trois génératrices deux à deux orthogonales. La question 1) permet de conclure.

Soit $P \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, notons $\overrightarrow{\Omega P} = X\overrightarrow{i} + Y\overrightarrow{j} + Z\overrightarrow{k}$ et écrivons l'équation en λ de l'intersection $\mathscr{E} \cap (\Omega P)$. La droite (ΩP) étant paramétrée par :

$$\lambda \mapsto M = \Omega + \lambda\, \overrightarrow{\Omega P} : (x_0 + \lambda X, y_0 + \lambda y, z_0 + \lambda Z),$$

le point $M(\lambda)$ appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si :

$$\lambda^2\left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2}\right) + 2\lambda\left(\frac{x_0 X}{a^2} + \frac{y_0 Y}{b^2} + \frac{z_0 Z}{c^2}\right) + \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 = 0$$

La droite (ΩP) est tangente à $\mathscr{E}$ si et seulement si cette équation a une racine double :

$$\left(\frac{x_0 X}{a^2} + \frac{y_0 Y}{b^2} + \frac{z_0 Z}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2}\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1\right) = 0.$$

Il s'agit là de l'équation dans $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ du cône $\mathscr{C}$ de sommet Ω circonscrit à $\mathscr{E}$.

On reconnait une forme quadratique attachée à une matrice A :

$$\mathscr{C} : (X\ Y\ Z) A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0.$$

D'après le 1), l'ensemble des points Ω, d'où l'on peut mener à $\mathscr{E}$ trois tangentes deux à deux orthogonales, a pour équation :

$$\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right)\frac{y^2}{b^2} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\frac{z^2}{c^2} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = 0.$$

Il s'agit d'un ellipsoïde ayant les mêmes axes que $\mathscr{E}$.

Ex. 31

L'espace étant rapporté à un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, trouver les plans qui coupent l'ellipsoïde :

$$\mathscr{E} : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$$

suivant un cercle. Préciser l'ensemble des centres de ces cercles.

Remarquons que l'équation de $\mathscr{E}$ s'écrit :

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + (z^2 - x^2) - 1 = 0$$

> Il est alors immédiat que, pour obtenir une équation de cercle (réel ou non), il suffit de poser $z \pm x = \lambda$.

Soit P_λ le plan d'équation $z - x = \lambda$. Alors $\mathscr{E} \cap P_\lambda = \mathscr{S}_\lambda \cap P_\lambda$ où $\mathscr{S}_\lambda$ est la sphère d'équation :

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + \lambda(z + x) - 1 = 0.$$

Si l'intersection est réelle, c'est un cercle noté $\mathscr{C}_\lambda$, dont la projection sur xOy est :

$$E_\lambda : x^2 + 2y^2 + 3(x + \lambda)^2 = 1 \ \text{ ou } \ \left(2x + \frac{3\lambda}{2}\right)^2 + 2y^2 = 1 - \frac{3\lambda^2}{4}.$$

Ainsi le plan $P_\lambda : z - x = \lambda$ coupe $\mathscr{C}$ suivant un cercle lorsque $|\lambda| \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Le centre étant :

$$\Omega_\lambda = \left(-\frac{3\lambda}{4}, 0, \frac{\lambda}{4}\right),$$

il décrit un segment.

L'ellipsoïde $\mathscr{C}$ est invariant dans la réflexion de plan yOz, on a donc un résultat analogue pour les plans $P'_\lambda : z + x = \lambda$, les centres des cercles décrivant maintenant le segment image du précédent dans cette réflexion.

Montrons que nous avons ainsi épuisé toutes les possibilités.

Soit $P : ax + by + cz = d$ un plan coupant $\mathscr{C}$ suivant un cercle. Dans un nouveau repère orthonormal $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$, tel que $\overrightarrow{K}$ soit orthogonal à P, on obtient pour équation de $\mathscr{C}$:

$$\mathscr{C} \ : \ 2\left(X^2 + Y^2 + Z^2\right) + \left(\alpha X + \beta Y + \gamma Z\right)\left(\alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z\right) = 1.$$

où $\left(\alpha X + \beta Y + \gamma Z\right)\left(\alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z\right) = z^2 - x^2 = (z - x)(z + x)$ (produit de formes linéaires). De plus, avec :

$$\overrightarrow{K} = \frac{a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

P a maintenant pour équation $Z = \delta$ où on a posé $\delta = \dfrac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Pour que la section de $\mathscr{C}$ par le plan $P(Z = \delta)$ soit un cercle, il faut que l'on ait :

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' \ \text{ et } \ \alpha\beta' + \beta\alpha' = 0.$$

Supposons $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et regardons les équations précédentes comme un système linéaire homogène en (α', β'). Le déterminant de ce système est égal à $\alpha^2 + \beta^2$, il est donc différent de 0 et le système donne $\alpha' = \beta' = 0$.

Ainsi une condition nécessaire pour que $\mathscr{C} \cap P$ soit un cercle est $\alpha = \beta = 0$ ou $\alpha' = \beta' = 0$.

Géométriquement, cette condition s'interprète par le fait que $\overrightarrow{K}$ est orthogonal à l'un des deux plans de la famille d'équation $(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)(\alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z) = 0$ dans le nouveau repère, et $(z - x)(z + x)$ dans le repère initial.

Une condition nécessaire, pour avoir une section circulaire, est donc que la direction du plan P ait pour équation $z + x = 0$ ou $z - x = 0$

On a vu précédemment que cette cette condition est suffisante et que les plans d'équations $z \pm x = \lambda$ coupant $\mathscr{C}$ suivant un cercle réel sont ceux pour lesquels :

$$|\lambda| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Thèmes d'étude - Problèmes

1 Résolution approchée de systèmes linéaires Pseudo-solutions

Notations

- $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,p)$: ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{R}$;
- pour $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,p)$, $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$: $a_{i,j}$ est l'élément de A situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j ;
- à $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ élément de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,1)$ on associe $x = \left(x_1, \ldots, x_n\right) \in \mathbb{R}^n$;
- à $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,p)$, on associe Φ_A application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ dont la matrice par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ est A ;
- si $x = \left(x_1, \ldots, x_n\right)$ et $y = \left(y_1, \ldots, y_n\right)$, on note :

$$\left\langle x \,\middle|\, y \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

En remarquant que :

$${}^tX \cdot Y = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)$$

et en identifiant cette matrice $(1,1)$ avec son unique coefficient, on notera aussi :

$$\left\langle x \,\middle|\, y \right\rangle = {}^tX \cdot Y ;$$

- si $x = \left(x_1, \ldots, x_n\right)$, on note $\| x \| = \| X \| = \sqrt{\left\langle x \,\middle|\, x \right\rangle}$;
- à $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,p)$ on associe :

$$\|\Phi_A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^p \\ x \neq 0}} \frac{\|\Phi_A(x)\|}{\| x \|} ; \quad \left(\text{ou matriciellement : } |||A||| = \sup_{\substack{X \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(p,1) \\ X \neq 0}} \frac{\| AX \|}{\| X \|}\right).$$

Partie A

Dans cette partie, $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,n)$, A est inversible.

1) Soit X $\left(X \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,1)\right)$ l'unique solution de $AX = B$ $\left(B \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,1), B \neq 0\right)$.

Quand B devient $B + \Delta B$, alors X devient $X + \Delta X$, tel que $A(X + \Delta X) = B + \Delta B$. Montrer que :

$$\frac{\| \Delta X \|}{\| X \|} \leqslant |||A||| \; \left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right| \frac{\| \Delta B \|}{\| B \|} \quad \text{et que} \quad |||A||| \; \left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right| \geqslant 1. \qquad (1)$$

On notera dans toute la suite $\mu(A) = |||A||| \; \left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right|$.

2) On pose $A' = {}^tA \cdot A$.

a) Montrer que les valeurs propres de A' sont réelles, strictement positives, et qu'il existe P orthogonale et D diagonale tel que $D = P^{-1}A'P$.

b) Les valeurs propres de A' étant notées $(\lambda'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et rangées dans l'ordre croissant $(0 < \lambda'_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda'_n)$, montrer que pour tout Y dans $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,1)$:

$$\|AY\| \leqslant \sqrt{\lambda'_n}\|Y\|, \text{ et qu'il existe } Y_0 \text{ tel que } \|AY_0\| = \sqrt{\lambda'_n}\|Y_0\|.$$

En déduire : $|||A|||$.

c) Montrer que ${}^tA \cdot A$ et $A \cdot {}^tA$ ont le même polynôme caractéristique. En remplaçant A par A^{-1} dans b), en déduire $|||A^{-1}|||$, et enfin : $\mu(A) = \sqrt{\dfrac{\lambda'_n}{\lambda'_1}}$.

3) a) On suppose A orthogonale. Calculer $\mu(A)$.

b) On suppose A symétrique. Exprimer $\mu(A)$ en fonction des valeurs propres de A.

c) *Application numérique.*

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\mu(A)$, et déterminer ΔB (avec par exemple $\|\Delta B\| = 1$) de façon que :

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} = \mu(A)\frac{\|\Delta B\|}{\|B\|}$$

(ce qui prouve que l'inégalité (1) ne peut pas être améliorée dans le cas général).

Partie B

Notations : $\begin{cases} \text{si } X \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n,1) \quad \text{on pose } \|X\| = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \text{si } A \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n,n) \quad \text{on pose } |||A||| = \displaystyle\sup_{\substack{X \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n,1) \\ X \neq 0}} \frac{\|AX\|}{\|X\|} \end{cases}$

1) a) Soit $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n,n)$. On suppose que :

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad |m_{ii}| > \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} |m_{ij}|.$$

Montrer qu'il n'existe aucun $X \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n,1)$ tel que $X \neq 0$ et $MX = 0$. En déduire que M est inversible.

b) Soit $N \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,n)$. On pose :

$$\text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n, \; R_i = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} |n_{ij}|, \quad D(n_{ii}, R_i) = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z - n_{ii}| \leqslant R_i\}.$$

$$\text{et } G_N = \bigcup_{i=1}^{n} D(n_{ii}, R_i).$$

Montrer que les valeurs propres de N (réelles ou complexes) appartiennent toutes à G_N.

2) Soit $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n, n)$. On appelle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de M (réelles ou complexes), et on pose :

$$\rho(M) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i|.$$

a) Montrer que si $\lim\limits_{k \to +\infty} M^k = 0$, alors $\rho(M) < 1$.

b) Montrer que, si M est diagonalisable et $\rho(M) < 1$, alors $\lim\limits_{k \to +\infty} M^k = 0$.

c) On se propose de démontrer le résultat précédent sans l'hypothèse «M diagonalisable». Le polynôme caractéristique de M étant écrit sous la forme :

$$P_M(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} \left(\lambda - \lambda'_i \right)^{r_i}$$

(les λ'_i étant les valeurs propres distinctes de M et les r_i leurs ordres de multiplicité respectifs), *on admet* qu'il existe $M' \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n, n)$, $P \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n, n)$ vérifiant :

P inversible ;

$M' = P^{-1}MP$;

$$M' = \begin{pmatrix} M'_1 & & & \\ & M'_2 & & (0) \\ (0) & & \ddots & \\ & & & M'_p \end{pmatrix}$$

avec : $\forall i \in [\![1, p]\!]$: $M'_i \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(r_i, r_i)$, $M'_i = \left(\lambda'_i \right)$ si $r_i = 1$ et $M'_i = \lambda'_i I_{r_i} + J_{r_i}$ si $r_i \geqslant 2$

(où $I_{r_i} = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$ et $J_{r_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$,

c'est-à-dire $J_{r_i} = \left(a_{ij} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant r_i}$, avec $a_{i,i+1} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant r_i - 1$ et $a_{i,j} = 0$ si $j \neq i + 1$).

Calculer $J_{r_i}^{\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$, en déduire que :

$$J_{r_i}^{r_i} = 0, \ \|J_{r_i}\| \leqslant 1, \text{ et } \left\|M_i'^k\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{n} C_k^{\alpha} \left|\lambda'_i\right|^{k-\alpha} \text{ si } k \geqslant n.$$

Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} M_i'^k = 0$ et, en remarquant que :

$$\left\|M'^k\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \left\|M_i'^k\right\|,$$

en déduire $\lim\limits_{k \to +\infty} M'^k$ et enfin $\lim\limits_{k \to +\infty} M^k$.

3) Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n, n)$. On suppose que :

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad |a_{ii}| > \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} |a_{ij}|.$$

On pose $A = D + G$, où $d_{ii} = a_{ii}$ et $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$, et $G = A - D$.

a) Vérifier que A est inversible, que D est inversible, et que l'équation $AX = B$ est équivalente à :

$$X = A'X + B', \quad \text{où } A' = -D^{-1}G \text{ et } B' = D^{-1}B.$$

b) Montrer que $\rho(A') < 1$, en déduire $\lim\limits_{k \to +\infty} A'^k$.

c) Soit L l'unique solution de $AX = B$. On définit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par :

$$X_0 \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n, 1) \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} = A'X_k + B'$$

En étudiant $(X_k - L)_{k \in \mathbb{N}}$, montrer que $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers L.

Partie C

Dans cette partie : $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n, p)$, $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n, 1)$, et on suppose qu'il n'existe aucune matrice X ($X \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(p, 1)$) telle que :

$$AX = B. \qquad (2)$$

On appelle pseudo-solution de (2) toute matrice X_0 ($X_0 \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(p, 1)$) telle que :

$$\|AX_0 - B\| = \inf\left\{\| AX - B \|, X \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(p, 1)\right\}$$

(ce que l'on peut écrire également :

$$\left\|\Phi_A(x_0) - b\right\| = \mathrm{d}\left(b, \operatorname{Im}\Phi_A\right), \text{ en posant } \mathrm{d}\left(b, \operatorname{Im}\Phi_A\right) = \inf\left\{ \|\Phi_A(x) - b\|, x \in \mathbb{R}^p\right\}).$$

1) a) En étudiant la projection orthogonale de b sur $\operatorname{Im}\Phi_A$, démontrer l'existence de pseudo-solutions de (2).

b) On suppose de plus Φ_A injective. Montrer que (2) admet alors une pseudo-solution x_0 *unique*.

c) Montrer que :

$$\begin{aligned} x \text{ pseudo-solution de (2)} &\iff \left[\forall y \in \mathbb{R}^p, \left\langle \Phi_A(y) \middle| \Phi_A(x) - b \right\rangle = 0\right] \\ &\iff \left[{}^tAAX = {}^tAB\right]. \end{aligned}$$

2) *Application.*

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne n points $M_k(x_k, y_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$. On définit, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $H_k(x_k, ax_k + b)$ et on se propose de déterminer $\mathcal{D}$ de façon que :

$$\sum_{k=1}^{n} \left\|\overrightarrow{M_kH_k}\right\|^2 \text{ soit minimum.}$$

Montrer que ce problème revient à la recherche des pseudo-solutions d'une équation $AX = B$, où A, B, X sont trois matrices que l'on explicitera.

À quelle condition, sur $(M_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, Φ_A est-elle injective ? Déterminer alors *la* pseudo-solution de $AX = B$.

3) *Généralisation.*

Soit C une partie de $\mathbb{R}^p$. On suppose C non vide, $C \neq \mathbb{R}^p$, $\Phi_A(C)$ partie fermée et convexe de $\mathbb{R}^n$. On recherche les pseudo-solutions de : $\Phi_A(x) = b$, $x \in C$.

a) Montrer l'existence d'une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de C telle que :

$$\lim_{k \to +\infty} \left\|\Phi_A(x_k) - b\right\| = \mathrm{d}\left(b, \Phi_A(C)\right).$$

b) Montrer que $\left(\Phi_A(x_k)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

c) En déduire l'existence de pseudo-solutions de : $\Phi_A(x) = b$, $x \in C$.

Solution

Partie A

1) $AA^{-1} = I_n$ donne $1 = |||I_n||| \leqslant |||A|||\,|||A^{-1}|||$, et $AX = B$ donne $|||A|||\,\|X\| \geqslant |||B|||$, donc :

$$\frac{1}{|||A|||\,\|X\|} \leqslant \frac{1}{|||B|||} \quad (i) \quad (\text{on a } X = A^{-1}B \neq 0).$$

D'autre part, $A\,\Delta X = \Delta B$ donc :

$$\Delta X = A^{-1}\,\Delta B \quad \text{et} \quad \|\,\Delta X\| \leqslant |||A^{-1}|||\,\|\,\Delta B\| \qquad (ii).$$

En combinant (i) et (ii), il vient :

$$\frac{\|\,\Delta X\|}{\|X\|} \leqslant |||A|||\,|||A^{-1}|||\frac{\|\,\Delta B\|}{|||B|||}.$$

2) a) A' est symétrique réelle donc ses valeurs propres sont réelles et A' est diagonalisable dans le groupe orthogonal : il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, D diagonale : $D = P^{-1}A'P = {}^tPA'P$

Soit λ' une valeur propre de A' et X un vecteur propre associé : $A'X = \lambda' X$ et $X \neq 0$, alors :

$${}^tXA'X = \lambda'\|X\|^2 \quad \text{mais aussi} \quad {}^tXA'X = {}^tX\,{}^tAAX = \|AX\|^2$$

donc :

$$\lambda' = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} > 0.$$

(A étant inversible, $X \neq 0$ donne $AX \neq 0$).

b) • Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\|AY\|^2 = {}^t(AY)AY = {}^tYA'Y = {}^tYPD\,{}^tPY = {}^tZDZ \quad \text{avec} \quad Z = {}^tPY,$$

donc :

$$\|AY\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'^2 z_i^2 \leqslant \lambda_n'^2\|Z\|^2$$

or $\|Z\|^2 = {}^tZZ = {}^tYY = \|Y\|^2$, d'où finalement :

$$\|AY\| \leqslant \sqrt{\lambda_n'}\,\|Y\| \qquad (iii)$$

• Pour Y_0 vecteur propre de A' associé à λ_n', on a :

$$\|AY_0\|^2 = \lambda_n'\|Y_0\|^2 \qquad (iv)$$

• De (iii) et (iv), on déduit $|||A||| = \sqrt{\lambda_n'}$.

c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\det\left({}^tAA - \lambda I_n\right) = \det\left[\left({}^tA - \lambda A^{-1}\right)A\right] = \det\left[A\left({}^tA - \lambda A^{-1}\right)\right] = \det\left(A\,{}^tA - \lambda I_n\right).$$

On en déduit :

$$\operatorname{Sp}\left(A\,{}^tA\right)^{-1} = \operatorname{Sp} A'^{-1} = \left\{\frac{1}{\lambda_n'}, \frac{1}{\lambda_{n-1}'}, \dots, \frac{1}{\lambda_1'}\right\}$$

c'est-à-dire :

$$\operatorname{Sp}\left({}^tA^{-1}A^{-1}\right) = \left\{\frac{1}{\lambda_n'}, \dots, \frac{1}{\lambda_1'}\right\}$$

et d'après b) :

$$|||A^{-1}||| = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1'}}.$$

D'où :

$$\mu(A) = \sqrt{\frac{\lambda'_n}{\lambda'_1}}.$$

3) a) Si A est orthogonale, on a $A' = {}^tAA = I_n$ donc $\lambda'_1 = \lambda'_2 = \dots = \lambda'_n = 1$ et $\mu(A) = 1$.

b) Si A est symétrique, ses valeurs propres sont réelles. Posons $\operatorname{Sp} A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, l'indexation étant choisie telle que $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \dots \leqslant |\lambda_n|$.
On sait, de plus, qu'il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}AQ = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, d'où :

$$Q^{-1}A'Q = Q^{-1}A^2Q = (Q^{-1}AQ)^2 = \operatorname{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2).$$

Ainsi :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda'_i = \lambda_i^2 \quad \text{et} \quad \mu(A) = \left|\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right|.$$

c) $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ alors $A' = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$, $\operatorname{Sp} A' = \{1, 4\}$, $\mu(A) = 2$;

$$B = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} \; , \; X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \; , \; \|B\| = 2\sqrt{3} \; , \; \|X\| = \sqrt{3}.$$

Pour $\Delta B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $\|\Delta B\| = 1$ c'est-à-dire $x^2 + y^2 = 1$, on peut poser $x = \cos\theta, y = \sin\theta$.
La condition :

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} = \mu(A)\frac{\|\Delta B\|}{\|B\|}$$

se lit alors :

$$\|\Delta X\| = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \|A^{-1}\Delta B\| = 1$$

ou encore :

$$\frac{\cos^2\theta}{2} + \frac{3}{4}\sin^2\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\cos\theta = 1 \;\; \text{soit} \;\; 2\cos^2\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta = 0$$

soit enfin :

$$(\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta)^2 = 0 \quad \text{ce qui donne} \quad \theta = -\operatorname{Arctan}\sqrt{2} \pmod{\pi}$$

($\operatorname{Arctan}\sqrt{2} = 54,74^0$ à 5.10^{-3} près). D'où :

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad \sin\theta = -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Partie B

1) a) Supposons qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n, 1)$, $X \neq 0$, $MX = 0$.

$MX = 0$ donne $\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_j = 0$.

Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|$, $X \neq 0$ donne $|x_{i_0}| > 0$.

De $\sum_{j=1}^{n} m_{i_0j}x_j = 0$ on déduit $m_{i_0i_0} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^{n} m_{i_0j}\frac{x_j}{x_{i_0}}$ et donc $|m_{i_0i_0}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^{n} |m_{i_0j}|$ $\left(\text{car} \left|\frac{x_j}{x_{i_0}}\right| \leqslant 1\right)$

Ainsi, par contraposition, on obtient que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], |m_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |m_{ij}| \text{ implique qu'il n'existe aucun } X \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n, 1), \ X \neq 0 \ \text{ et } \ MX = 0.$$

En conséquence, on a $\operatorname{Ker} M = \{0\}$ et M est inversible.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de N, $N - \lambda I_n$ est alors non inversible donc, d'après a), il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que :

$$|n_{ii} - \lambda| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |n_{ij}|$$

c'est-à-dire qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda \in D(n_{ii}, R_i)$ ou encore $\lambda \in G_N$.

2) a) Soit $X \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n, 1)$ vecteur propre de M associé à $\lambda \in \mathbb{C}$ où λ est une valeur propre telle que $|\lambda| = \rho(M)$.

On a alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $M^k X = \lambda^k X$ donc $\lim\limits_{k \to +\infty} M^k = 0$ donne $\lim\limits_{k \to +\infty} \lambda^k X = 0$.

Puisque $X \neq 0$ (c'est un vecteur propre), il en résulte $|\lambda| < 1$ donc $\rho(M) < 1$.

b) M étant diagonalisable, il exite $P \in GL_n(\mathbb{C})$, $M = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$, donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad M^k = P \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) P^{-1}$$

$\rho(M) < 1$ donne $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|\lambda_i| < 1$ et donc $\lim\limits_{k \to +\infty} \lambda_i^k = 0$.

On en déduit $\lim\limits_{k \to +\infty} M^k = 0$

c) $1 \leqslant \alpha \leqslant r_i - 1$, $J_{r_i}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$, 1 en position $\alpha + 1$ sur la 1^{re} ligne.

$\alpha \geqslant r_i \quad J_{r_i}^{\alpha} = 0$.

Pour $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{r_i} \end{bmatrix}$, on a $J_{r_i} X = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_{r_i} \\ 0 \end{bmatrix}$ donc :

$$\| J_{r_i} X \|^2 = \sum_{j=2}^{r_i} |x_j|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{r_i} |x_j|^2 = \| X \|^2 \quad \text{et} \quad \| J_{r_i} \| \leqslant 1.$$

I_{r_i} et J_{r_i} étant permutables, on a :

$$M_i'^k = (\lambda_i I_{r_i} + J_{r_i})^k = \sum_{\alpha=0}^{k} C_k^{\alpha} \lambda_i^{(k-\alpha)} J_{r_i}^{\alpha}$$

donc, pour $k \geqslant n$:

$$M_i'^k = \sum_{\alpha=0}^{n-1} n\,\mathrm{C}_k^\alpha \lambda_i'^{k-\alpha} J_{r_i}^\alpha$$

(car pour $\alpha \geqslant n$, on a $\alpha \geqslant r_i$, donc $J_{r_i}^\alpha = 0$).

On en déduit :

$$|||M_i'^k||| \leqslant \sum_{\alpha=0}^{n-1} \mathrm{C}_k^\alpha \left|\lambda_i'\right|^{k-\alpha} |||J_{r_i}^\alpha||| \leqslant \sum_{\alpha=0}^{n-1} \mathrm{C}_k^\alpha \left|\lambda_i'\right|^{k-\alpha}$$

(car $\|J_{r_i}^\alpha\| \leqslant \|J_{r_i}\|^\alpha \leqslant 1$).

$\mathrm{C}_k^\alpha = \dfrac{k(k-1)\ldots(k-\alpha+1)}{\alpha!} \sim \dfrac{k^\alpha}{\alpha!}$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{C}_k^\alpha \left|\lambda_i'\right|^{k-\alpha} = 0$ (puissance et exponentielle).

Il en résulte immédiatement $\lim\limits_{k\to+\infty} M_i'^k = 0$ et puisque :

$$M'^k = \begin{pmatrix} M_1'^k & & & (0) \\ & M_2'^k & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & M_p'^k \end{pmatrix}$$

on a aussi :

$$\lim_{k\to+\infty} M'^k = 0 \quad \text{et donc} \quad \lim_{k\to+\infty} M_k = 0.$$

3) a) A est inversible d'après A.1)a). D diagonale a ses éléments diagonaux non nuls, elle est donc inversible.

$AX = B$ s'écrit $DX = -GX + B$ et équivaut donc à :

$$X = -D^{-1}GX + D^{-1}B.$$

b) Posons $A' = \left[a_{ij}'\right]$, on a $a_{ii}' = 0$ et pour $j \neq i$, $a_{ij}' = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$ donc, avec la notation du B.1)b), pour tout i, $R_i < 1$ et $G_{A'} \subset \left\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\right\}$. Il en résulte $\rho(A') < 1$.

D'après le B.2), on en déduit $\lim\limits_{k\to+\infty} A'^k = 0$.

c) $X_{k+1} = A'X_k + B'$ et $L = A'L + B'$ donnent :

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad X_{k+1} - L = A'(X_k - L).$$

Donc $X_k - L = A'^k(X_0 - L)$ et, d'après la question précédente :

$$\lim_{k\to+\infty} X_k - L = 0.$$

Partie C

1) a) Soit y_0 le projeté orthogonal de b sur $\mathrm{Im}\,\Phi_A$. On sait que pour $y \in A$, on a :

$$d\left(b, \mathrm{Im}\,\Phi_A\right) = \|b - y\|$$

si et seulement si $y = y_0$. En conséquence, x est pseudo-solution de (2) si et seulement si $x \in \Phi_A^{-1}\left(\left\{y_0\right\}\right)$.

b) Si Φ_A est injective, $\Phi_A^{-1}\left(\left\{y_0\right\}\right)$ est un singleton : $\left\{x_0\right\}$.

c) D'après ce qui précède, x est pseudo-solution de (2) si et seulement si $\Phi_A(x)$ est le projeté orthogonal de b sur $\operatorname{Im}\Phi_A$ donc si et seulement si :

$$\forall z \in \operatorname{Im}\Phi_A,\quad \langle z \mid \Phi_A(x) - b\rangle = 0$$

c'est-à-dire :

$$\forall y \in \mathbb{R}^p,\quad \langle \Phi_A(y) \mid \Phi_A(x) - b\rangle = 0.$$

Cette dernière condition s'écrit :

$$\forall y \in \mathbb{R}^p,\quad {}^t(AY)(AX - B) = 0 \quad \text{soit} \quad \forall y \in \mathbb{R}^p,\quad {}^tY\left({}^tAAX - {}^tAB\right) = 0$$

soit encore :

$${}^tAAX = {}^tAB.$$

2) On a $S = \sum_{k=1}^{n} \| \overrightarrow{M_kH_k} \|^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_k + b - y_k)^2$ donc $S = \| AX - B \|^2$ en posant :

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n, 2) \ ,\quad X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2, 1) \ \text{ et } \ B = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n, 1)$$

Φ_A est injective si et seulement si $\operatorname{rg} A = 2$ c'est-à-dire si $(x_1, \dots, x_n)$ est non colinéaire à $(1, 1, \dots, 1)$ ou encore s'il existe i, j tels que $x_i \neq x_j$.

La pseudo-solution de $AX = B$ est alors définie par ${}^tAAX = {}^tAB$, c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{bmatrix}$$

ou encore, en posant $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $u = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{bmatrix} \| x \|^2 & \langle x \mid u \rangle \\ \langle x \mid u \rangle & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x \mid y \rangle \\ \langle u \mid y \rangle \end{bmatrix}$$

d'où :

$$a = \frac{\langle x \mid y \rangle - \langle u \mid x \rangle \langle u \mid y \rangle}{\| x \|^2 - \langle u \mid x \rangle^2} \ ,\quad b = \frac{\langle u \mid y \rangle \| x \|^2 - \langle u \mid x \rangle \langle x \mid y \rangle}{\| x \|^2 - \langle u \mid x \rangle^2}.$$

3) a) Par définition de $d(b, \Phi_A(C))$, à tout $k \in \mathbb{N}$, on peut associer $y_k \in \Phi_A(C)$, donc $x_k \in C$ ($y_k = \Phi_A(x_k)$) tel que :

$$d^2\left(b, \Phi_A(C)\right) \leq \| \Phi_A(x_k) - b \|^2 \leq \frac{1}{k+1} + d^2\left(b, \Phi_A(C)\right)$$

d'où :

$$\lim_{k \to +\infty} \| \Phi_A(x_k) - b \| = d\left(b, \Phi_A(C)\right).$$

b) Soit k et ℓ entiers naturel tels que $k < \ell$, on a (formule de la médiane) :

$$\| y_k - b \|^2 + \| y_\ell - b \|^2 = 2 \left\| \frac{y_k + y_\ell}{2} - b \right\|^2 + \frac{1}{2} \| y_k - y_\ell \|^2$$

donc :

$$\begin{aligned} \| y_k - y_\ell \|^2 &= 2\| y_k - b \|^2 + 2\| y_\ell - b \|^2 - 4 \left\| \frac{y_k - y_\ell}{2} - b \right\|^2 \\ &\leq 2\left(d^2\left(b, \Phi_A(C)\right) + \frac{1}{k+1} \right) + 2\left(d^2\left(b, \Phi_A(C)\right) + \frac{1}{\ell+1} \right) - 4d^2\left(b, \Phi_A(C)\right) \end{aligned}$$

($\dfrac{y_k + y_\ell}{2}$ appartient à C par convexité de C donc $\left\| \dfrac{y_k + y_\ell}{2} - b \right\| \geqslant d\big(b, \Phi_A(C)\big)$ soit aussi :

$$-4\left\| \frac{y_k + y_\ell}{2} - b \right\|^2 \leqslant -4d^2\big(b, \Phi_A(C)\big)).$$

Finalement :

$$\| y_k - y_\ell \|^2 \leqslant \frac{2}{k+1} + \frac{2}{\ell+1} \leqslant \frac{4}{k+1}$$

et (y_k) est une suite de Cauchy de $\Phi_A(C)$.

c) Dans l'espace complet $\mathbb{R}^n$, la suite :

$$(y_k)_{k \in \mathbb{N}} = \Big(\Phi_A(x_k) \Big)_{k \in \mathbb{N}}$$

est donc convergente vers z_0.

$\Phi_A(C)$ est par hypothèse fermé, donc $z_0 \in \Phi_A(C)$ et il existe $x_0 \in C$ tel que $z_0 = \Phi_A(x_0)$.

Par continuité de la norme, on a alors :

$$\lim_{k \to +\infty} \left\| \Phi_A(x_k) - b \right\| = \left\| \Phi_A(x_0) - b \right\|$$

c'est-à-dire :

$$d\big(b, \Phi_A(C)\big) = \left\| \Phi_A(x_0) - b \right\|.$$

Donc x_0 est pseudo-solution de $\Phi_A(x) = b$.

2 Projection sur un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ Projecteurs orthogonaux

Soit n un entier supérieur ou égal à 1, ($n \geqslant 1$). L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique et de la norme associée, notés $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$. On note $d(x, y)$ la distance de deux points x, y de $\mathbb{R}^n$:

$$d(x, y) = \| x - y \|.$$

Partie A

1) Montrer l'identité du parallélograme :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ \| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2\left(\| x \|^2 + \| y \|^2 \right) \tag{1}$$

En déduire que si a, b, c sont trois points de $\mathbb{R}^n$, m désignant le milieu de $[b, c]$, (c'est-à-dire $m = \dfrac{b+c}{2}$), on a :

$$\| a - b \|^2 + \| a - c \|^2 = 2\| a - m \|^2 + \frac{1}{2}\| b - c \|^2 \tag{2}$$

2) La distance d'un point a à une partie fermée A d'un espace vectoriel normé étant définie par $d(a, A) = \inf\limits_{x \in A} d(a, x)$, un projeté de a sur A est un point α de A tel que $d(a, A) = d(a, \alpha)$.

On se propose de démontrer que, si A est une partie convexe, fermée, non vide de $\mathbb{R}^n$, alors chaque point a de $\mathbb{R}^n$ a un projeté et un seul sur A.

Pour cela, a étant un point quelconque de $\mathbb{R}^n$, considérer une suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de points de A telle que $d(a, x_p)$ tende vers $d(a, A)$ pour p tendant vers l'infini, et utiliser la question précédente pour établir que la suite (x_p) est une suite de Cauchy.

Conclure, en justifiant clairement chaque étape du raisonnement.

3) On vient de définir la projection sur le convexe fermé non vide A, application qui sera notée P_A dans la suite, par :

$$\begin{array}{ll} (i) & P_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ (ii) & \forall x \in \mathbb{R}^n, P_A(x) \in A \\ (iii) & \forall y \in A, \| x - P_A(x) \| \leqslant \| x - y \| \end{array}$$

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \in A \iff P_A(x) = x \text{ et que } P_A\left(\mathbb{R}^n\right) = A.$$

4) Le but de cette question est d'établir une nouvelle caractérisation du projeté $P_A(x)$ du point x sur A, soit :

$$\forall y \in A, \left\langle x - P_A(x) \,\middle|\, P_A(x) - y \right\rangle \geqslant 0 \tag{3}$$

a) Montrer que cela équivaut à montrer l'égalité des ensembles E_1 et E_2 définis par :

$$E_1 = \{ z \in A \mid \forall\, y \in A, \| x - z \| \leqslant \| x - y \| \}$$

$$E_2 = \{ z \in A \mid \forall\, y \in A, \left\langle x - z \,\middle|\, z - y \right\rangle \geqslant 0 \}$$

b) Montrer cette égalité. On pourra commencer par établir l'identité :

$$\| x - y \|^2 - \| x - z \|^2 = 2\left\langle x - z \,\middle|\, z - y \right\rangle + \| z - y \|^2 \tag{4}$$

et en déduire directement l'inclusion $E_2 \subset E_1$; pour prouver l'inclusion inverse, on pourra écrire (4) en remplaçant y par $y_t = ty + (1-t)z$, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

5) Montrer que l'inégalité (3) est encore équivalente à la suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \left\langle x - P_A(x) \,\middle|\, P_A(x) - P_A(y) \right\rangle \geqslant 0 \tag{5}$$

6) Montrer que, pour tout couple $\left(u_1, u_2\right)$ de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\left\| P_A\left(u_1\right) - P_A\left(u_2\right) \right\| \leqslant \| u_1 - u_2 \|.$$

Qu'en déduit-on ?

À partir de cette question, on note :

- E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$,
- $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

7) Soit M un sous espace vectoriel de E. On rappelle que M est complet (car de dimension finie) donc fermé.

a) Soit $u \in E$, montrer que $P_M(u)$ est *l'unique* vecteur v de M tel que :

$$\forall w \in M, \left\langle u - v \,\middle|\, w \right\rangle = 0.$$

b) Montrer que $P_M \in L(E)$; que $P_M \circ P_M = P_M$ et que :

$$M = \operatorname{Im} P_M = (\operatorname{Ker} P_M)^{\perp}.$$

P_M est donc le projecteur orthognal sur M. On note $\operatorname{Proj}(E)$ l'ensemble des projecteur orthogonaux sur un sous espace vectoriel de E.

8) Soit $P \in L(E)$. Montrer que $P \in \operatorname{Proj}(E)$ est équivalent à :

$$\left\{ P^2 = P \text{ et } \forall\, x \in E, \forall y \in E, \left\langle x \,\middle|\, P(y) \right\rangle = \left\langle P(x) \,\middle|\, y \right\rangle \right\}.$$

9) Soit $P \in L(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre :

$$P \in \operatorname{Proj}(E) \quad \text{et} \quad \left\{ P^2 = P \text{ et } \forall\, x \in E, \| P(x) \| \leqslant \| x \| \right\}.$$

Partie B

On note $\leqslant$ la relation sur $L(E)$ définie par $R \leqslant S$ si et seulement si :

$$\forall x \in E,\ \langle (S-R)(x) \mid x \rangle \geqslant 0.$$

Dans toute cette partie, P et Q sont des éléments de $\text{Proj}(E)$ et, pour simplifier, on note PQ au lieu de $P \circ Q$.

1) Montrer l'équivalence des six propositions suivantes :

(i) $Q - P \in \text{Proj}(E)$

(ii) $P \leqslant Q$

(iii) $\text{Im}(P) \subset \text{Im}\, Q$

(iv) $QP = P$

(v) $PQ = P$

(vi) $QP + PQ = 2P$

2) Montrer l'équivalence des cinq propositions suivantes :

(i) $P + Q \in \text{Proj}(E)$

(ii) $\forall x \in E,\ \langle P(x) \mid Q(x) \rangle = 0$

(iii) $PQ = 0$

(iv) $\forall x \in \text{Im}\, P, \forall y \in \text{Im}\, Q,\ \langle x \mid y \rangle = 0$

(v) $P + Q$ est le projecteur orthogonal sur $V = \text{Im}\, P + \text{Im}\, Q$

3) Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

(i) $PQ \in \text{Proj}(E)$

(ii) $PQ = QP$

(iii) PQ est le projecteur orthogonal sur $\text{Im}\, P \cap \text{Im}\, Q$

4) Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

(i) $P + Q - PQ \in \text{Proj}(E)$

(ii) $PQ = QP$

(ii) $P + Q - PQ$ est le projecteur orthogonal sur $\text{Im}\, P + \text{Im}\, Q$

5) Montrer : $PQ = QP \iff$ il existe une base orthonormale formée de vecteurs propres communs à P et Q.

6) On pose $A = PQP$. Montrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x \mid A(y) \rangle = \langle A(x) \mid y \rangle,$$

montrer aussi que :

$$\forall x \in E, \| A(x) \| \leqslant \| x \| \ \text{ et } \ \langle x \mid A(x) \rangle \geqslant 0.$$

Pour x et y fixés dans E, étudier les suites de termes généraux :

$$\langle x \mid A^p(x) \rangle \quad \text{et} \quad \langle x \mid A^p(y) \rangle.$$

Partie A

1) En développant les carrés scalaires, on obtient :

$$\| x+y\|^2 = \langle x+y \mid x+y\rangle = \| x\|^2 + \| y\|^2 + 2\langle x \mid y\rangle$$
$$\| x-y\|^2 = \langle x-y \mid x-y\rangle = \| x\|^2 + \| y\|^2 - 2\langle x \mid y\rangle$$

puis en additionnant membre à membre :

$$\| x+y\|^2 + \| x-y\|^2 = 2\left(\| x\|^2 + \| y\|^2\right) \tag{1}$$

D'après (1), on a :

$$\| b-a\|^2 + \| c-a\|^2 = \frac{1}{2}\left(\| b+c-2a\|^2 + \| b-c\|^2\right)$$

donc avec $m = \dfrac{b+c}{2}$, il vient :

$$\| b-a\|^2 + \| c-a\|^2 = 2\| m-a\|^2 + \frac{1}{2}\| b-c\|^2. \tag{2}$$

2) *Projection sur un convexe, fermé, non vide*

Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $d(a, A) = \inf\limits_{x \in A} d(a, x)$. Nous posons $d = d(a, A)$ donc :

$$d^2 = \inf_{x \in A} \| a - x\|^2.$$

- *Construction d'une suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$* : par définition de la borne inférieure, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_p \in A$ tel que :

$$d(a, A)^2 \leqslant d\left(a, x_p\right)^2 \leqslant d(a, A)^2 + \frac{1}{p} \quad \text{soit} \quad d^2 \leqslant \| a - x_p\|^2 \leqslant d^2 + \frac{1}{p}$$

On a alors par construction :

$$\left(x_p\right)_{p \in \mathbb{N}^*} \in A^{\mathbb{N}^*} \quad \text{et} \quad \lim_{p \to +\infty} \| a - x_p\| = d.$$

- *Montrons que $(x_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy.*

D'après (2), on a :

$$\| x_p - x_q\|^2 = 2\| x_p - a\|^2 + 2\| x_q - a\|^2 - 4\left\|\frac{x_p + x_q}{2} - a\right\|^2$$

x_p et x_q sont dans A convexe, donc $\dfrac{x_p + x_q}{2}$ est aussi dans A et on en déduit :

$$\| x_p - a\|^2 \leqslant d^2 + \frac{1}{p} \quad , \quad \| x_q - a\|^2 \leqslant d^2 + \frac{1}{q} \quad \text{et} \quad \left\|\frac{x_p + x_q}{2} - a\right\|^2 \geqslant d^2$$

d'où, en supposant $q \geqslant p$:

$$\| x_p - x_q\|^2 \leqslant \frac{2}{p} + \frac{2}{q} \leqslant \frac{4}{p}.$$

En conséquence, en posant $\delta_p = \sup\limits_{q \in [p, +\infty[} \| x_p - x_q\|^2$, on a :

$$0 \leqslant \delta_p \leqslant \frac{4}{p} \quad \text{donc} \quad \lim_{n \to +\infty} \delta_p = 0,$$

ce qui prouve que $(x_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy de A. L'espace $\mathbb{R}^n$ étant complet, cette suite converge vers $\alpha \in \overline{A}$, or A est fermé, donc $\overline{A} = A$, et finalement $\alpha \in A$.

L'inégalité de définition de $(x_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$:

$$d^2 \leqslant \| a - x_p \|^2 \leqslant d^2 + \frac{1}{p}$$

avec la continuité de la norme donne, par passage à la limite, que $\| a - \alpha \| = d$. Ainsi, α est un projeté de a sur A.

- *Unicité du projeté*

Supposons que $d = \| a - \alpha \| = \| a - \beta \|$ avec $\alpha \in A$, $\beta \in A$.

Alors, avec (2), on obtient :

$$\| \alpha - \beta \|^2 = 2\| \alpha - a \|^2 + 2\| \beta - a \|^2 - 4 \left\| \frac{\alpha + \beta}{2} - a \right\|^2$$

$$= 4d^2 - 4 \left\| \frac{\alpha + \beta}{2} - a \right\|^2$$

Par convexité de A, on a :

$$\frac{\alpha + \beta}{2} \in A \quad \text{donc} \quad \left\| \frac{\alpha + \beta}{2} - a \right\| \geqslant \alpha$$

et il en résulte $\| \alpha - \beta \|^2 \leqslant 0$ d'où finalement $\alpha = \beta$.

3) Il est clair que si $x \in A$, alors $\inf\limits_{y\in A} \| x - y \| = 0$, valeur atteinte pour $y = x$, donc $P_A(x) = x$.

Réciproquement, si $P_A(x) = x$, puisque, par définition $P_A(x) \in A$, il vient $x \in A$.

De $P_A(x) = x$ pour tout x de A, on déduit $A \subset P_A(\mathbb{R}^n)$ et comme, par définition $P_A(\mathbb{R}^n) \subset A$, il vient finalement $P_A(\mathbb{R}^n) = A$.

4) *Autre caractérisation de $P_A(x)$*

On veut prouver que si $z \in A$:

$$z = P_A(x) \iff \forall y \in A,\ \langle x - z \mid z - y \rangle \geqslant 0. \qquad (3)$$

a) Montrons que (3) est vraie si et seulement si $E_1 = E_2$.

$$E_1 = \{ z \in A \ /\ \forall y \in A,\ \| x - z \| \leqslant \| x - y \| \}$$

$$E_2 = \{ z \in A \ /\ \forall y \in A,\ \langle x - z \mid z - y \rangle \geqslant 0 \}$$

D'après le 2), $z = P_A(x)$ s'écrit $z \in E_1$ et la proposition $\forall y \in A, \langle x - z \mid z - y \rangle \geqslant 0$ s'écrit $z \in E_2$, donc (3) est vraie si et seulement si :

$$z \in E_1 \iff z \in E_2 \quad \text{soit si et seulement si} \quad E_1 = E_2.$$

b) Montrons que $E_1 = E_2$.

- L'identité (4) :

$$\| x - y \|^2 - \| x - z \|^2 = 2\langle x - z \mid z - y \rangle + \| z - y \|^2$$

provient du développement :

$$\| x - y \|^2 = \| x - z + z - y \|^2 = \| x - z \|^2 + 2\langle x - z \mid z - y \rangle + \| z - y \|^2.$$

Cette identité prouve que si $z \in E_2$ alors :

$$\| x - y \|^2 - \| x - z \|^2 \geqslant 0$$

donc $z \in E_1$ et $E_2 \subset E_1$.

Montrons que $E_1 \subset E_2$. On suppose que $z \in E_1$, alors par convexité de A, pour tout y de A et tout $t \in [0, 1]$, $y_t = ty + (1-t)z$ appartient à A, donc :

$$\| x - y_t \|^2 - \| x - z \|^2 \geqslant 0.$$

Avec l'identité précédente, et en notant que $z - y_t = t(z - y)$, on en déduit :

$$\forall t \in [0, 1], \quad 2t\langle x - z \,|\, z - y\rangle + t^2 \| z - y \|^2 \geqslant 0.$$

Ce qui exige $\langle x - z \,|\, z - y\rangle \geqslant 0$ car, dans le cas contraire, c'est-à-dire $\langle x - z \,|\, z - y\rangle < 0$, on aurait, pour t tendant vers 0 :

$$2t\langle x - z \,|\, z - y\rangle + t^2 \| z - y \|^2 \sim 2t\langle x - z \,|\, z - y\rangle$$

et $2t\langle x - z \,|\, z - y\rangle + t^2 \| z - y \|^2$ serait strictement négatif pour t voisin de 0.

On a ainsi prouvé que $\forall y \in A$, $\langle x - z \,|\, z - y\rangle \geqslant 0$ donc $z \in E_2$ et enfin $E_1 \subset E_2$.

5) Montrons que l'inégalité (3) équivaut à (5) :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in A, \langle x - P_A(x) \,|\, P_A(x) - y\rangle \geqslant 0 \tag{3}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle x - P_A(x) \,|\, P_A(x) - P_A(y)\rangle \geqslant 0 \tag{5}$$

Pour tout y de $\mathbb{R}^n$, on a $P_A(y) \in A$ donc (3) $\Rightarrow$ (5).

Pour tout y de A, on a $y = P_A(y)$ donc (5) $\Rightarrow$ (3).

6) Montrons que :

$$\forall (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \| P_A(u_1) - P_A(u_2) \| \leqslant \| u_1 - u_2 \|.$$

On développe :

$$\begin{aligned}
\| u_1 - u_2 \|^2 &= \| u_1 - P_A(u_1) + P_A(u_1) - P_A(u_2) + P_A(u_2) - u_2 \|^2 \\
&= \| P_A(u_1) - P_A(u_2) \|^2 + \| u_1 - P_A(u_1) + P_A(u_2) - u_2 \|^2 \\
&\qquad + 2\langle u_1 - P_A(u_1) \,|\, P_A(u_1) - P_A(u_2)\rangle \\
&\qquad + 2\langle u_2 - P_A(u_2) \,|\, P_A(u_2) - P_A(u_1)\rangle \\
&\geqslant \| P_A(u_1) - P_A(u_2) \|^2
\end{aligned}$$

car les trois autres termes sont $\geqslant 0$.

On a ainsi montré que P_A est 1-lipschitzienne donc uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$.

7) a) *Projection sur un sous-espace vectoriel M*

Étant donné $u \in E$, soit $v = P_M(u)$. En tant que sous-espace vectoriel de E, M est convexe et l'énoncé rappelle qu'il est fermé, on dispose donc de l'application P_M. Alors pour tout $w \in M$, on a :

$$v + w \in M \quad \text{et} \quad v - w \in M,$$

donc en appliquant (3) avec $y = v + w$, puis avec $y = v - w$, on obtient :

$$\langle u - v \,|\, w\rangle \leqslant 0 \quad \text{puis} \quad \langle u - v \,|\, w\rangle \geqslant 0 \quad \text{donc} \quad \langle u - v \,|\, w\rangle = 0.$$

Inversement, si $v \in M$ est tel que :

$$\forall w \in M, \langle u - v \,|\, w\rangle = 0,$$

alors v vérifie évidemment (3) donc $v = P_M(u)$.

En conséquence, pour $v \in M$, on a :

$$v = P_M(u) \iff \forall w \in M, \langle u - v \,|\, w\rangle = 0 \tag{3'}$$

L'unicité de $v \in M$ vérifiant (3') résulte alors de l'unicité de $v \in M$ vérifiant (3).

b) ▪ Montrons que $P_M \in L(E)$ et que $P_M \circ P_M = P_M$.

Soit $v = P_M(u)$, $v' = P_M(u')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $w \in M$, on a :

$$\langle u - v \mid w \rangle = 0 \ , \ \langle u' - v' \mid w \rangle = 0,$$

donc $\langle u + \lambda u' - (v + \lambda v') \mid w \rangle = 0$ ce qui prouve :

$$P_M(u + \lambda u') = P_M(u) + \lambda P_M(u').$$

Si $u \in M$ alors, d'après le 3), $u = P_M(u)$ donc :

$$\forall u \in E, P_M \circ P_M(u) = P_M(u).$$

▪ Montrons que $\operatorname{Im} P_M = M = (\operatorname{Ker} P_M)^{\perp}$.

On sait déjà que $M = \operatorname{Im} P_M$ puisque l'on a vu dans le 3) que $P_M(\mathbb{R}^n) = M$.

D'après (3'), $P_M(u) = 0$ équivaut à :

$$\forall w \in M, \langle u - 0 \mid w \rangle = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \langle u \mid w \rangle = 0,$$

donc $u \in \operatorname{Ker} P_M$ équivaut à $u \in M^{\perp}$, ce qui prouve $\operatorname{Ker} P_M = M^{\perp}$ et donc $M = (\operatorname{Ker} P_M)^{\perp}$.

> On a ainsi retrouvé que, dans le cas où le convexe fermé A est un sous-espace vectoriel de E, la projection P_A n'est rien d'autre que le projecteur orthogonal sur A tel qu'il est défini en cours.

8) $P \in L(E)$, montrons :

$$P \in \operatorname{Proj}(E) \iff \{P^2 = P \text{ et } \forall (x, y) \in E^2, \langle x \mid P(y) \rangle = \langle P(x) \mid y \rangle\}.$$

▪ Si $P \in \operatorname{Proj}(E)$ alors on a $P^2 = P$ et il existe un sous-espace vectoriel M tel que $P = P_M$.

Pour tout (x, y) de E^2, on a $P(x) \in M$ donc :

$$\langle x - P(x) \mid P(y) \rangle = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \langle x \mid P(y) \rangle = \langle P(x) \mid P(y) \rangle$$

de même :

$$\langle P(x) \mid y \rangle = \langle P(x) \mid P(y) \rangle \quad \text{d'où} \quad \langle x \mid P(y) \rangle = \langle P(x) \mid y \rangle.$$

▪ Si $P^2 = P$ et $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle x \mid P(y) \rangle = \langle P(x) \mid y \rangle$, alors P est un projecteur, il reste à montrer qu'il est orthogonal.

On sait que $E = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P$.

Soit alors $x \in \operatorname{Ker} P$ et $y \in \operatorname{Im} P$ donc $y = P(y)$ et :

$$\langle x \mid y \rangle = \langle x \mid P(y) \rangle = \langle P(x) \mid y \rangle = 0.$$

Ceci prouve :

$$\operatorname{Ker} P \subset (\operatorname{Im} P)^{\perp} \ (\text{ou } \operatorname{Im} P \subset (\operatorname{Ker} P)^{\perp}).$$

Comme le théorème du rang donne :

$$\dim \operatorname{Ker} P = n - \dim \operatorname{Im} P = \dim(\operatorname{Im} P)^{\perp},$$

il vient finalement :

$$\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Im} P)^{\perp} \quad \text{donc aussi} \quad \operatorname{Im} P = (\operatorname{Ker} P)^{\perp}.$$

9) $P \in L(E)$, montrons que :

$$P \in \operatorname{Proj}(E) \iff \{P^2 = P \text{ et } \forall x \in E, \| P(x) \| \leq \| x \|\}.$$

▪ Si $P \in \operatorname{Proj}(E)$, alors $P^2 = P$ et en appliquant 8) avec $y = P(x)$, il vient :

$$\| P(x) \|^2 = \langle x \mid P(x) \rangle,$$

donc d'après Cauchy-Schwarz :

$$\| P(x) \|^2 \leq \| x \| \, \| P(x) \|.$$

Pour $P(x) \neq 0$, on en déduit $\| P(x) \| \leq \| x \|$, et pour $P(x) = 0$ c'est, bien sûr, encore vrai.

- Si $P^2 = P$ et $\forall x \in E, \| P(x) \| \leqslant \| x \|$.

Soit $x \in \operatorname{Ker} P$ et $y \in \operatorname{Im} P$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$P(\lambda x + y) = P(y) = y \quad \text{donc} \quad \| y \|^2 \leqslant \| \lambda x + y \|^2.$$

Ainsi, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda^2 \| x \|^2 + 2\lambda \langle x \mid y \rangle \geqslant 0$ ce qui exige $\langle x \mid y \rangle = 0$.

Comme en 8), on en conclut $\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Im} P)^{\perp}$.

Partie B

1)

$$\begin{array}{rl} (i) & Q - P \in \operatorname{Proj}(E) \\ (ii) & P \leqslant Q \\ (iii) & \operatorname{Im}(P) \subset \operatorname{Im} Q \\ (iv) & QP = P \\ (v) & PQ = P \\ (vi) & QP + PQ = 2P \end{array}$$

Remarque. Pour tout projecteur orthogonal Π, il a été vu en A.9) que :

$$\forall x \in E, \langle \Pi(x) \mid x \rangle = \| \Pi(x) \|^2.$$

- Montrons que $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$.

Si $Q - P \in \operatorname{Proj}(E)$ alors :

$$\forall x \in E, \langle (Q - P)(x) \mid x \rangle = \| (Q - P)(x) \|^2 \geqslant 0 \quad \text{donc} \quad P \leqslant Q.$$

- Montrons que $\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$.

Soit $x \in \operatorname{Im} P$, alors $P(x) = x$. Formons :

$$\| x - Q(x) \|^2 = \| x \|^2 - 2\langle x \mid Q(x) \rangle + \| Q(x) \|^2.$$

$P \leqslant Q$ donne $\| x \|^2 = \langle P(x) \mid x \rangle \leqslant \langle Q(x) \mid x \rangle$ donc :

$$\| x - Q(x) \|^2 \leqslant \| Q(x) \|^2 - \langle x \mid Q(x) \rangle.$$

Soit, d'après la remarque, $\| x - Q(x) \|^2 \leqslant 0$.

Il en résulte $x = Q(x)$ donc $x \in \operatorname{Im} Q$ et enfin $\operatorname{Im} P \subset \operatorname{Im} Q$.

- Montrons que $\boxed{(iii) \iff (iv)}$.

> *Attention !* ici on obtient directement l'équivalence puisque la réciproque est évidente.

- $(iii) \Rightarrow (iv)$ Pour tout x de E, $P(x) \in \operatorname{Im} P$ donc $P(x) \in \operatorname{Im} Q$ et Q étant un projecteur :

$$Q\big(P(x)\big) = P(x).$$

- $(iv) \Rightarrow (iii)$ car on a toujours $\operatorname{Im} QP \subset \operatorname{Im} Q$

- Montrons que $\boxed{(iv) \iff (v)}$.

- $(iv) \Rightarrow (v)$ Avec (iv) on a aussi (iii) :

$$\operatorname{Im} P \subset \operatorname{Im} Q \quad \text{d'où} \quad (\operatorname{Im} P)^{\perp} \supset (\operatorname{Im} Q)^{\perp} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \operatorname{Ker} P \supset \operatorname{Ker} Q.$$

Pour tout x de E, $x - Q(x) \in \operatorname{Ker} Q$ donc $x - Q(x) \in \operatorname{Ker} P$, ce qui donne $P(x) = P\big(Q(x)\big)$.

- $(v) \Rightarrow (iv)$ $P = PQ$ donne $\operatorname{Ker} Q \subset \operatorname{Ker} P$ donc, en passant aux orthogonaux :

$$\operatorname{Im} Q \supset \operatorname{Im} P.$$

On a ainsi prouvé $(v) \Rightarrow (iii)$ et puisque $(iii) \iff (iv)$, on a $(v) \Rightarrow (iv)$.

- Montrons que $\boxed{(v) \Rightarrow (vi)}$.

Évidence car avec (v) on a aussi (iv).

- Montrons que $\boxed{(vi) \Rightarrow (i)}$.

Développons :

$$(Q-P)^2 = Q^2 - PQ - QP + P^2 = Q - 2P + P = Q - P$$

donc $Q - P$ est un projecteur.

P et Q étant des projecteurs orthogonaux, ils sont symétriques donc, l'ensemble des endomorphismes symétriques de E étant un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, le projecteur $P - Q$ est symétrique et, d'après le A.8), il est orthogonal.

2)

$$\begin{array}{rl}
(i) & P + Q \in \mathrm{Proj}(E) \\
(ii) & \forall x \in E,\ \langle P(x) \mid Q(x) \rangle = 0 \\
(iii) & PQ = 0 \\
(iv) & \forall x \in \mathrm{Im}\, P, \forall y \in \mathrm{Im}\, Q,\ \langle x \mid y \rangle = 0 \\
(v) & P + Q \text{ est le projecteur orthogonal sur } V = \mathrm{Im}\, P + \mathrm{Im}\, Q
\end{array}$$

- Montrons que $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$.

$P + Q$ étant un projecteur orthogonal, on a :

$$\forall x \in E,\ \langle x \mid P(x) + Q(x) \rangle = \| P(x) + Q(x) \|^2$$

donc :

$$\langle x \mid P(x) \rangle + \langle x \mid Q(x) \rangle = \| P(x) \|^2 + 2\langle P(x) \mid Q(x) \rangle + \| Q(x) \|^2.$$

De même, $P \in \mathrm{Proj}(E)$ et $Q \in \mathrm{Proj}(E)$ donne :

$$\langle x \mid P(x) \rangle = \| P(x) \|^2 \quad \text{et} \quad \langle x \mid Q(x) \rangle = \| Q(x) \|^2$$

d'où finalement :

$$\langle P(x) \mid Q(x) \rangle = 0.$$

- Montrons que $\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$.

Formons :

$$\begin{aligned}
\| PQ(x) \|^2 &= \langle PQ(x) \mid PQ(x) \rangle \\
&= \langle Q(x) \mid P^2 Q(x) \rangle && \text{car } P \text{ est symétrique} \\
&= \langle Q^2(x) \mid PQ(x) \rangle && \text{car } P^2 = P \text{ et } Q = Q^2 \\
&= \langle Q(y) \mid P(y) \rangle && \text{avec } y = Q(x) \\
&= 0 && \text{d'après } (ii)
\end{aligned}$$

- Montrons que $\boxed{(iii) \Rightarrow (iv)}$.

$PQ = 0$ donne $\mathrm{Im}\, Q \subset \mathrm{Ker}\, P$ donc $\mathrm{Im}\, Q \subset \mathrm{Im}\, P^\perp$ c'est-à-dire que $\mathrm{Im}\, Q$ et $\mathrm{Im}\, P$ sont orthogonaux.

- Montrons que $\boxed{(iv) \Rightarrow (v)}$.

(iv) donne $\mathrm{Im}\, Q \subset \mathrm{Im}\, P^\perp$ donc $\mathrm{Im}\, Q \subset \mathrm{Ker}\, P$ et $PQ = 0$,

mais aussi $\mathrm{Im}\, P \subset \mathrm{Im}\, Q^\perp$ donc $\mathrm{Im}\, P \subset \mathrm{Ker}\, Q$ et $QP = 0$,

alors $(P+Q)^2 = P^2 + PQ + QP + Q^2 = P^2 + Q^2 = P + Q$. Ainsi $P + Q$ est un projecteur.

Puisque P et Q sont symétriques, $P + Q$ l'est également et ainsi $P + Q \in \mathrm{Proj}(E)$. Il est clair que :

$$\mathrm{Im}(P + Q) \subset \mathrm{Im}\, P + \mathrm{Im}\, Q.$$

Inversement soit $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathrm{Im}\, P$, $x_2 \in \mathrm{Im}\, Q$.

On a vu précédemment que $PQ = 0$ et $QP = 0$, donc de $x_2 \in \operatorname{Im} Q$, on déduit $x_2 = Q(x_2)$ et $P(x_2) = PQ(x_2) = 0$, de même $Q(x_1) = QP(x_1) = 0$, et finalement :

$$(P + Q)(x_1 + x_2) = P(x_1) + Q(x_2) = x_1 + x_2 = x.$$

On a ainsi montré :

$$\operatorname{Im} P + \operatorname{Im} Q \subset \operatorname{Im}(P + Q).$$

En conclusion, $\operatorname{Im}(P + Q) = \operatorname{Im} P + \operatorname{Im} Q = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Im} Q$ car les sous-espaces $\operatorname{Im} P$ et $\operatorname{Im} Q$ sont orthogonaux.

- Montrons que $\boxed{(v) \Rightarrow (i)}$. Évidence.

3)

$$\begin{array}{rl} (i) & PQ \in \operatorname{Proj}(E) \\ (ii) & PQ = QP \\ (iii) & PQ \text{ est le projecteur orthogonal sur } \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q \end{array}$$

- Montrons que $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$.

La symétrie de P et Q donne pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\langle QP(x) \mid y \rangle = \langle P(x) \mid Q(y) \rangle = \langle x \mid PQ(y) \rangle.$$

De même la symétrie de PQ donne :

$$\langle PQ(x) \mid y \rangle = \langle x \mid PQ(y) \rangle.$$

On a donc :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle QP(x) - PQ(x) \mid y \rangle = 0$$

d'où :

$$\forall x \in E, QP(x) = PQ(x) \quad \text{soit} \quad QP = PQ.$$

- Montrons que $\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$.

$PQ = QP$ donne $(PQ)^2 = PQQP = PQP = P^2Q = PQ$: PQ est un projecteur.

Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle PQ(x) \mid y \rangle = \langle Q(x) \mid P(y) \rangle = \langle x \mid QP(y) \rangle$ (P et Q symétriques), donc :

$$\langle PQ(x) \mid y \rangle = \langle x \mid PQ(y) \rangle \text{ (car } PQ = QP).$$

Ainsi d'après A.8), on a $PQ \in \operatorname{Proj}(E)$.

Il reste à montrer $\operatorname{Im} PQ = \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q$

– on sait que $\operatorname{Im} PQ \subset \operatorname{Im} P$ et $\operatorname{Im} QP \subset \operatorname{Im} Q$ donc $PQ = QP$ donne :

$$\operatorname{Im} PQ = \operatorname{Im} QP \subset \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q$$

– si $x \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q$, on a $Q(x) = x$ et $P(x) = x$ donc $PQ(x) = x$ et $x \in \operatorname{Im} PQ$.

Ainsi $\operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q \subset \operatorname{Im} PQ$ et finalement $\operatorname{Im} PQ = \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q$.

- Montrons que $\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$. Évidence.

4)

$$\begin{array}{rl} (i) & P + Q - PQ \in \operatorname{Proj}(E) \\ (ii) & PQ = QP \\ (ii) & P + Q - PQ \text{ est le projecteur orthogonal sur } \operatorname{Im} P + \operatorname{Im} Q \end{array}$$

- Montrons que $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$.

Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle P(x) + Q(x) - PQ(x) \mid y \rangle = \langle x \mid P(y) + Q(y) - PQ(y) \rangle$ et compte tenu de $P \in \operatorname{Proj}(E)$, $Q \in \operatorname{Proj}(E)$, il reste :

$$\langle PQ(x) \mid y\rangle = \langle x \mid PQ(y)\rangle.$$

Or :

$$\langle x \mid PQ(y)\rangle = \langle P(x) \mid Q(y)\rangle = \langle QP(x) \mid y\rangle$$

donc :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle PQ(x) \mid y\rangle = \langle QP(x) \mid y\rangle \quad \text{et} \quad PQ = QP.$$

- Montrons que $\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$.

D'après le 3), $PQ = QP$ donne $PQ \in \text{Proj}(E)$.

Formons :

$$\begin{aligned}(P + Q - PQ)^2 &= P^2 + Q^2 + (PQ)^2 + PQ + QP - P^2Q - PQP - QPQ - PQ^2\\ &= P + Q + PQ + PQ + PQ - PQ - PQ - PQ - PQ\\ &= P + Q - PQ\end{aligned}$$

Ainsi $P + Q - PQ$ est un projecteur.

La démonstration de $(i) \Rightarrow (ii)$ montre que ce projecteur est symétrique donc :

$$P + Q - PQ \in \text{Proj}(E).$$

En écrivant $P + Q - PQ = P + Q(\text{Id}_E - P)$, on obtient :

$$\text{Im}(P + Q - PQ) \subset \text{Im}\, P + \text{Im}\, Q$$

Inversement, soit $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \text{Im}\, P$, $x_2 \in \text{Im}\, Q$, on a alors :

$$\begin{aligned}&x = (P + Q)(x_1 + x_2) - Q(x_1) - P(x_2)\\ &x = (P + Q)(x_1 + x_2) - QP(x_1) - PQ(x_2) && \big(x_1 = P(x_1) \text{ et } x_2 = Q(x_2)\big)\\ &x = (P + Q - PQ)(x_1 + x_2) && (\text{car } PQ = QP)\end{aligned}$$

Ainsi $\text{Im}\, P + \text{Im}\, Q \subset \text{Im}(P + Q - PQ)$ et, finalement :

$$\text{Im}\, P + \text{Im}\, Q = \text{Im}(P + Q - PQ).$$

5) Montrons que :

$$PQ = QP \qquad (i)$$

$$\iff \quad P \text{ et } Q \text{ sont simultanément diagonalisables en base orthonormale.} \qquad (ii)$$

- Supposons (i). $P \in \text{Proj}(E)$ donc :

$$E = \text{Im}\, P \overset{\perp}{\bigoplus} \text{Ker}\, P \text{ (somme directe orthogonale).}$$

D'autre part, $PQ = QP$, donc les sous-espaces propres de P, $\text{Im}\, P = \text{Ker}(P - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}\, P$, sont stables par Q.

Q induit donc sur $\text{Im}\, P$ un projecteur orthogonal Q_1 :

$$\text{Im}\, P = \text{Im}\, Q_1 \overset{\perp}{\bigoplus} \text{Ker}\, Q_1$$

et Q induit sur $\text{Ker}\, P$ un projecteur orthogonal Q_2 :

$$\text{Ker}\, P = \text{Im}\, Q_2 \overset{\perp}{\bigoplus} \text{Ker}\, Q_2\,.$$

En conséquence :

$$E = \text{Im}\, Q_1 \oplus \text{Ker}\, Q_1 \oplus \text{Im}\, Q_2 \oplus \text{Ker}\, Q_2$$

est une somme directe orthogonale et une base orthonormale de E, adaptée à cette somme directe, est base de vecteurs propres communs à P et Q.

- La réciproque $(ii) \Rightarrow (i)$ est évidente.

6) *$A = PQP$, étude des suites $\langle x \mid A^k(x)\rangle$ et $\langle x \mid A^k(y)\rangle$*

a) Montrons que $\langle x \mid A(y)\rangle = \langle A(x) \mid y\rangle$.

$$\begin{aligned}\langle x \mid A(y)\rangle = \langle x \mid PQP(y)\rangle &= \langle P(x) \mid QP(y)\rangle && P \text{ symétrique}\\ &= \langle QP(x) \mid P(y)\rangle && Q \text{ symétrique}\\ &= \langle PQP(x) \mid y\rangle && P \text{ symétrique}\end{aligned}$$

b) Montrons que $\| A(x) \| \leqslant \| x \|$ et $\langle x \mid A(x)\rangle \geqslant 0$.

P et Q étant des projecteurs orthogonaux, on a successivement :

$$\| PQP(x) \| \leqslant \| QP(x) \| \leqslant \| P(x) \| \leqslant \| x \|$$

$$\langle x \mid A(x)\rangle = \langle P(x) \mid Q(P(x))\rangle = \| QP(x) \|^2 \geqslant 0.$$

c) *Étude de $u_k(x) = \langle x \mid A^k(x)\rangle$*

- si $k = 2p$, $\langle x \mid A^{2p}(x)\rangle = \langle A^p(x) \mid A^p(x)\rangle$ car A est symétrique, donc $u_{2p}(x) \geqslant 0$;
- si $k = 2p+1$, $\langle x \mid A^{2p+1}(x)\rangle = \langle y \mid A(y)\rangle$ avec $y = A^p(x)$, donc $u_{2p+1}(x) \geqslant 0$.

La suite $\left(u_k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc positive, étudions maintenant la monotonie.

D'après Cauchy-Schwarz et b), on a :

$$u_1(x) = \langle x \mid A(x)\rangle \leqslant \| x \| \| A(x) \| \leqslant \| x \|^2 = u_0(x).$$

Soit l'hypothèse de récurrence $H(p)$:

$$\forall x \in E,\ \forall k \in [\![1, p-1]\!],\ u_k(x) \leqslant u_{k-1}(x).$$

Alors :

$$u_p(x) = \langle Ax \mid A^{p-1}x\rangle = u_{p-2}(Ax)$$

donc en appliquant l'hypothèse de récurrence à la suite $\left(u_k(Ax)\right)_{k\in\mathbb{N}}$, il vient :

$$u_p(x) \leqslant u_{p-3}(Ax) \quad \text{soit} \quad u_p(x) \leqslant \langle Ax \mid A^{p-3}Ax\rangle$$

d'où encore :

$$u_p(x) \leqslant \langle x \mid A^{p-1}x\rangle \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_p(x) \leqslant u_{p-1}(x).$$

La propriété est récurrente et $\left(u_k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Puisqu'elle est minorée par 0, elle converge vers $\ell(x) \in \mathbb{R}_+$.

d) *Étude de $v_n(x, y) = \langle x \mid A^k(y)\rangle$*

A^k étant symétrique, on a :

$$u_k(x+y) = \langle x+y \mid A^k(x+y)\rangle = \langle x \mid A^k(x)\rangle + \langle y \mid A^k(y)\rangle + 2\langle x \mid A^k(y)\rangle$$

donc :

$$v_k(x, y) = \frac{1}{2}\left[u_k(x+y) - u_k(x) - u_k(y)\right].$$

La suite $\left(v_k(x, y)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente vers :

$$\frac{1}{2}\left(\ell(x+y) - \ell(x) - \ell(y)\right).$$

Finalement les λ_i, $1 \leq i \leq p$, sont tous nuls.

Si $\lambda_p \neq 0$, la relation :

$$\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i V_i = -\lambda_p V_p$$

montre que les λ_i, $1 \leq i \leq p-1$, sont non tous nuls donc, d'après $\mathcal{R}'(p-1)$, la relation :

$$\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i V_i' = 0$$

donne que les λ_i, $1 \leq i \leq p-1$, sont tous non nuls et il en est donc de même pour λ_i, $1 \leq i \leq p$.

Finalement, on a montré que $\mathcal{R}'(p-1) \Rightarrow \mathcal{R}'(p)$ et puisque $\mathcal{R}'(2)$ est vraie, il en résulte que :

$$\mathcal{R}'(p) \text{ est vraie pour tout } p \geq 2.$$

Si $(V_1, \ldots, V_n)$ est une base obtusangle de E, les conditions $\langle V \mid V_i \rangle > 0$ pour $1 \leq i \leq n$ donnent, qu'en posant $V_{n+1} = -V$, le système $(V_1, \ldots, V_n, V_{n+1})$ est obtusangle.

Alors la relation :

$$V = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i$$

s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i V_i = 0 \quad \text{avec } \lambda_{n+1} = 1$$

et, d'après $\mathcal{R}'(n+1)$, on en déduit $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Partie D

1) Remarquons d'abord que si σ est une permutation de $[\![1, p]\!]$, la matrice :

$$MG(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(p)})$$

se déduit de :

$$MG(e_1, \ldots, e_p)$$

par la permutation σ sur les lignes et la permutation σ sur les colonnes. On a donc :

$$\operatorname{rg} MG(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(p)}) = \operatorname{rg} MG(e_1, \ldots, e_p).$$

Si $\operatorname{rg}(e_1, \ldots, e_p) = 0$, on a $MG(e_1, \ldots, e_p) = 0$ et la propriété est évidemment vérifiée.

On suppose maintenant $r = \operatorname{rg}(e_1, \ldots, e_p) \geq 1$. Alors on peut extraire de $(e_1, \ldots, e_p)$ un système libre de r vecteurs et à une permutation près, on peut supposer que $(e_1, \ldots, e_r)$ est libre. Dans ce cas, $MG(e_1, \ldots, e_r)$ est la matrice, sur la base $(e_1, \ldots, e_r)$ de $F = \operatorname{Vect}(e_i)_{1 \leq i \leq r}$, du produit scalaire. On a donc :

$$\det\Big(MG(e_1, \ldots, e_r)\Big) > 0$$

et, puisque cette matrice est extraite de $MG(e_1, \ldots, e_p)$, on en déduit :

$$\operatorname{rg} MG(e_1, \ldots, e_p) \geq r.$$

D'autre part, pour tout $j \in [\![r+1, p]\!]$ on a alors :

$$e_j = \sum_{k=1}^{r} a_{j,k} e_k$$

ce qui donne, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:

$$\langle e_i \mid e_j \rangle = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{j,k} \langle e_i \mid e_k \rangle$$

et, en notant $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de A :

$$C_j = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{j,k} C_k .$$

Il en résulte $\operatorname{rg} MG(e_1, \ldots, e_p) = \operatorname{rg}(C_1, \ldots, C_p) \leqslant r$, d'où finalement :

$$\operatorname{rg} MG(e_1, \ldots, e_p) = r = \operatorname{rg}(e_1, \ldots, e_p).$$

2) Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique, il existe $P \in O(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = {}^tPDP \quad \text{avec} \quad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A. De plus, la positivité de A équivaut à :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i \geqslant 0.$$

Posons alors $\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$, $Q = \Delta P$, et soit $V_1, V_2, \ldots, V_n$ les vecteurs colonnes de Q.

L'espace $E = \mathbb{R}^n$ étant muni de son produit scalaire canonique, on obtient :

$$A = {}^tQQ = [\langle V_i \mid V_j \rangle]$$

si bien que les conditions $a_{ij} < 0$ pour tout (i, j) tel que $i \neq j$ traduisent que le système $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ est obtusangle.

D'après la question précédente (D.1)), on a $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(V_1, \ldots, V_n)$ et, d'après le A.4)a), on a $\operatorname{rg}(V_1, \ldots, V_n) = n$ ou $n-1$, donc $\operatorname{rg} A = n$ ou $n-1$. D'autre part, puisque $(V_1, \ldots, V_n)$ est obtusangle, chaque V_i est non nul et :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], a_{ii} = \| V_i \|^2 > 0.$$

4 Matrices symétriques réelles, définies-positives : conditions de Sylvester

Notations :

$$S_n(\mathbb{R}) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^tM = M \} ;$$

$$S_n^+(\mathbb{R}) = \{ M \in S_n(\mathbb{R}) \ / \ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXMX \geqslant 0 \} ;$$

$$S_n^{+*}(\mathbb{R}) = \{ M \in S_n(\mathbb{R}) \ / \ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0 \Rightarrow {}^tXMX > 0 \}.$$

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.

On pose $B = [a_{ij}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n-1}}$ et $A = \begin{bmatrix} B & C \\ {}^tC & a_{nn} \end{bmatrix}$ donc :

$$B \in S_{n-1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}).$$

1) Montrer que A est définie-positive si et seulement si B est définie-positive et $\det A > 0$.

2) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$\Delta_k = \det [a_{ij}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant k}}$$

Montrer que A est définie-positive si et seulement si $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\Delta_k > 0$.

Solution

1) Soit (i) : $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et (ii) : $B \in S_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$ et $\det A > 0$.

L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est bien connue.

- Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, si $X \neq 0$ on a :

$$Y = \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$$

donc ${}^tYAY > 0$, c'est-à-dire ${}^tXBX > 0$. En conséquence, $B \in S_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$.

- Puisqu'elle est symétrique, définie-positive, A est la matrice d'un produit scalaire et il existe donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP = I_n$ d'où on déduit :

$$\det A = \frac{1}{(\det P)^2} > 0.$$

> Rappelons que l'existence de P correspond à l'existence de bases orthonormales dans un espace euclidien.
>
> La positivité stricte de A peut aussi se déduire du fait ques les valeurs propres de A sont toutes strictement positives.

Montrons maintenant $(ii) \Rightarrow (i)$.

L'hypothèse $B \in S_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$ nous donne l'existence de $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPBP = I_{n-1}$. Posons alors $U = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, on a $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ avec $U^{-1} = \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, et :

$${}^tUAU = \begin{bmatrix} {}^tPBP & {}^tPC \\ {}^tCP & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-1} & C_1 \\ {}^tC_1 & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{en posant } C_1 = {}^tPC).$$

> Lorsque deux matrices A et A' de $S_n(\mathbb{R})$ sont congruentes, l'une est positive (resp. définie-positive) si et seulement si l'autre l'est.

Posons $A' = {}^tUAU$, ces deux matrices A et A' sont congruentes, donc pour que A soit définie-positive, il faut et il suffit que A' le soit aussi.

Posons alors $V = \begin{bmatrix} I_{n-1} & -C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, on a $V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ avec $V^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n-1} & C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, et il vient :

$${}^tVA'V = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn} - {}^tC_1C_1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi les matrices A, A' et $A'' = {}^tVA'V$ sont congruentes donc, pour prouver que A est définie-positive, il suffit de vérifier que A'' l'est également.

Avec $\det A' = (\det P)^2 \det A$ et $\det A'' = \det A'$, l'hypothèse $\det A > 0$ donne $\det A'' > 0$, c'est-à-dire :

$$a_{nn} - {}^tC_1C_1 > 0,$$

donc la matrice diagonale A'' est définie-positive et il en est de même pour A.

2) La propriété est vraie pour $n = 1$ et, d'après le 1), si elle est vraie pour $n-1$, elle l'est aussi pour n. On obtient donc le résultat par récurrence.

5 Une application des conditions de Sylvester

Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice symétrique réelle d'ordre n : $A \in S_n(\mathbb{R})$.

Montrer l'équivalence des deux propositions :

(1) $\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_{ii} > 0$;

(2) il existe P symétrique réelle définie-positive : $P \in S_n^{+*}(\mathbb{R})$ et D diagonale à éléments diagonaux strictement positifs telles que :

$$A = DP + PD.$$

Solution

(2) $\Rightarrow$ (1)

Posons $P = [p_{ij}]$ et $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, il vient :

$$DP + PD = [(d_i + d_j)p_{ij}].$$

Sachant que P définie-positive donne $\forall i \in [\![1, n]\!],\ p_{ii} > 0$, on obtient :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_{ii} = 2d_i\, p_{ii} > 0.$$

(1) $\Rightarrow$ (2)

Étant donné $P \in S_n(\mathbb{R})$, soit $\Delta_k = \det [p_{ij}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant k}}$, on sait que P est définie-positive si et seulement si :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \Delta_k > 0 \quad \text{(conditions de Sylvester).}$$

La condition $A = DP + PD$ équivaut à :

$$(C) \begin{cases} \forall i \in [\![1, n]\!], & 2d_i\, p_{ii} = a_{ii} \\ \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, & i < j \Rightarrow (d_i + d_j)p_{ij} = a_{ij} \end{cases}$$

Montrons par récurrence sur n la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante.

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_{ii} > 0,$$

il existe un choix de $(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$ tel que la matrice $P = [p_{ij}] \in S_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} p_{ii} = \dfrac{a_{ii}}{2d_i} & \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n \\ p_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{d_i + d_j} & \text{pour } 1 \leqslant i < j \leqslant n \end{cases}$$

soit définie-positive.

$\mathcal{P}(1)$ est vraie car P se réduit à la matrice uni-élément :

$$\left[\frac{a_{11}}{2d_1}\right]$$

qui est définie-positive quel que soit $d_1 \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrons que $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

> Ce point est inutile dans le raisonnement par récurrence mais l'idée fondamentale permettant de prouver l'héridité de la propriété $\mathcal{P}$ est déjà présente.

On choisit par exemple $d_1 = 1$, alors :

$$P = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{11}}{2} & \dfrac{a_{12}}{1+d_2} \\ \dfrac{a_{12}}{1+d_2} & \dfrac{a_{22}}{2d_2} \end{bmatrix}.$$

Pour tout $d_2 > 0$, on a :

$$\operatorname{Tr} P = \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{22}}{2d_2} > 0 \quad \text{et} \quad \det P = \frac{a_{11}a_{22}}{4d_2} - \frac{a_{12}^2}{(1+d_2)^2}$$

donc $\lim\limits_{d_2 \to 0} \det P = +\infty$ et pour d_2 assez petit on a $\det P > 0$.

Les conditions $\operatorname{Tr} P > 0$ et $\det P > 0$ assurent que $\operatorname{Sp}(P) \subset \mathbb{R}_+^*$ donc que P est définie-positive.

Montrons maintenant que $\mathcal{P}(n-1) \Rightarrow \mathcal{P}(n)$.

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_{ii} > 0$ et, pour $(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$, la matrice $P = [p_{ij}] \in S_n(\mathbb{R})$ définie par les relations (C).

Puisque $\widetilde{A} = [a_{ij}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n-1}} \in S_{n-1}(\mathbb{R})$ vérifie (1), d'après $\mathcal{P}(n-1)$, il existe un choix de $(d_1, \dots, d_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^{*n-1}$ tel que la matrice $\widetilde{P} \in S_{n-1}(\mathbb{R})$, $\widetilde{P} = [p_{ij}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n-1}}$ soit définie-positive.

On a alors :

$$P = \begin{bmatrix} & & p_{1n} \\ & \widetilde{P} & \vdots \\ & & \vdots \\ p_{11} & \dots \quad \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

et, en notant P_{ij} les cofacteurs, il vient :

$$\det P = p_{nn} \det \widetilde{P} + \sum_{i=1}^{n-1} p_{in} P_{in} .$$

En développant chaque cofacteur P_{in} par rapport à sa dernière ligne, on obtient :

$$P_{in} = \sum_{j=1}^{n-1} p_{nj}\, \alpha_{ij}$$

où les scalaires α_{ij} (cofacteur de p_{nj} dans P_{in}) ne dépendent que des coefficients de $\widetilde{P}$ (c'est-à-dire des p_{ij} avec $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$) et sont donc indépendants de d_n.

On a ainsi :

$$\begin{aligned} \det P &= p_{nn} \det \widetilde{P} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} p_{in}\, p_{jn}\, \alpha_{ij} \\ &= \frac{a_{nn}}{2d_n} \det \widetilde{P} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{in}\, a_{jn}\, \alpha_{ij}}{(d_i + d_n)(d_j + d_n)} \end{aligned}$$

Sous cette forme, il est clair que $\lim\limits_{d_n \to 0} \det P = +\infty$, on peut donc choisir d_n tel que $\det P > 0$.

Alors, d'après les conditions de Sylvester, $\widetilde{P}$ définie-positive et $\det P > 0$ donnent que P est définie-positive. On a ainsi prouvé $\mathcal{P}(n-1) \Rightarrow \mathcal{P}(n)$ ce qui, avec le principe de récurrence, achève de montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

CHAPITRE 5

Intégration – Suites et séries de fonctions Séries entières Séries de Fourier

Sujets d'oraux

(A) Intégrabilité

Ex. 1

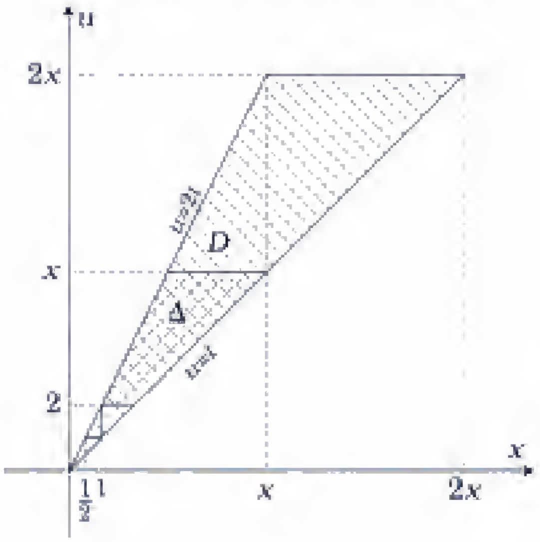
Soit $f \in \mathcal{C}^0\left(\left[1,+\infty\right[, \mathbb{R}\right)$, positive et $g\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t$.

Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(u)\mathrm{d}u$ est convergente si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(u)\mathrm{d}u$ est convergente.

> Étant donné $f \in \mathcal{C}^1\left(\left[1,+\infty\right[, \mathbb{R}^+\right)$, la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(u)\mathrm{d}u$ est équivalente à l'existence de :
> $$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$$
> soit aussi au fait que la fonction $F\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_1^x f$ est majorée sur $\left[1,+\infty\right[$ car cette fonction F est croissante.
>
> La première chose à remarquer est donc que g est, tout comme f, continue et positive sur $\left[1,+\infty\right[$, puis que :
> $$G(x) = \int_1^x g$$
> fait apparaître une intégrale double qu'il suffirait de transformer avec le théorème de Fubini pour la relier à :
> $$F(x) = \int_1^x f.$$

Formons $G(x) = \displaystyle\int_1^x g(t)\mathrm{d}t = \int_1^x\left(\int_t^{2t}\frac{f(u)}{t}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t = \iint_{\mathcal{D}}\frac{f(u)}{t}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t$, où on a posé :

$$\mathcal{D} = \left\{(t,u)\ /\ 1 \leqslant t \leqslant x,\ t \leqslant u \leqslant 2t\right\}.$$



Ce compact $\mathcal{D}$ ne se prêtant pas bien à la permutation des intégrations, commençons par en effectuer un encadrement par deux compacts Δ' et Δ qui, eux, s'y prêterons mieux.

Posons :

$$\Delta' = \left\{(t,u)\,/\,2 \leqslant u \leqslant x, \frac{u}{2} \leqslant t \leqslant u\right\}$$

$$\text{et}\quad \Delta = \left\{(t,u)\,/\,1 \leqslant u \leqslant 2x, \frac{u}{2} \leqslant t \leqslant u\right\}$$

on a alors $\Delta' \subset \mathcal{D} \subset \Delta \subset \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\times [1,+\infty[$, et, puisque $(t,u) \mapsto \dfrac{f(u)}{t}$ est positive, il en résulte :

$$\iint_{\Delta'} \frac{f(u)}{t}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \leqslant G(x) \leqslant \iint_{\Delta} \frac{f(u)}{t}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t.$$

Le théorème de Fubini donne :

$$\iint_{\Delta} \frac{f(u)}{t}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t = \int_1^{2x} f(u)\left(\int_{\frac{u}{2}}^{u} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)\mathrm{d}u = \ln 2 \int_1^{2x} f(u)\,\mathrm{d}u$$

$$\text{et}\quad \iint_{\Delta'} \frac{f(u)}{t}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t = \int_2^{x} f(u)\left(\int_{\frac{u}{2}}^{u} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)\mathrm{d}u = \ln 2 \int_2^{x} f(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

Posons $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(u)\,\mathrm{d}u$, on obtient :

$$\big(F(x) - F(2)\big)\ln 2 \leqslant G(x) \leqslant F(2x)\ln 2.$$

Si F est majorée sur $[1,+\infty[$, alors l'inégalité (i) : $G(x) \leqslant F(2x)\ln 2$ montre que G est majorée.

Si G est majorée sur $[1,+\infty[$, alors l'inégalité (ii) : $F(x) \leqslant F(2) + \dfrac{G(x)}{\ln 2}$ montre que F est majorée.

Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(u)\,\mathrm{d}u$ est convergente si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(u)\,\mathrm{d}u$ l'est aussi.

Ex. 2

Soit f continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{a}{x^2} + \frac{1}{a^2}.$$

Étudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

> L'hypothèse fournie ne permet pas de donner une majoration globale de f par une fonction intégrable. On peut donc penser à une majoration «par intervalle» c'est-à-dire à l'introduction d'une série.

Puisque f est positive, son intégrablité sur $[1,+\infty[$ est équivalente à la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \int_{n^2}^{(n+1)^2} f(x)\mathrm{d}x.$$

Par hypothèse, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{n^{\frac{3}{2}}}{x^2} + \frac{1}{n^3}$$

$$\text{donc} \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{2n+1}{n^3} + n^{\frac{3}{2}} \int_{n^2}^{(n+1)^2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{2n+1}{n^3} + n^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$$

$$\text{ou encore} \quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n \quad \text{avec} \quad v_n = \frac{2n+1}{n^3} + \frac{(2n+1)}{n^{\frac{1}{2}}(n+1)^2}.$$

Avec $\dfrac{2n+1}{n^3} \sim \dfrac{2}{n^2}$ et $\dfrac{2n+1}{n^{\frac{1}{2}}(n+1)^2} \sim \dfrac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$ on obtient $v_n \sim \dfrac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$ ce qui assure la convergence de la série $\sum v_n$ puis celle de $\sum u_n$ par domination.

Enfin, la convergence de $\sum u_n$ donne la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

Ex. 3

E désigne la fonction «partie entière».

Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{2n}{k}\right) - 2E\left(\frac{n}{k}\right)$.

> On voit que l'on a ici affaire à une somme de Riemann mais il faut prendre garde au fait qu'elle est relative à une fonction f continue par morceaux sur un intervalle I semi-ouvert. Dans cette situation il va falloir :
>
> 1) prouver la convergence de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$;
>
> 2) donner une démonstration directe du fait que les sommes de Riemann convergent vers $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$;
>
> 3) calculer cette intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

1) Considérons la fonction $f : x \mapsto E\left(\dfrac{2}{x}\right) - 2E\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \in \left]0, 1\right]$.

f est continue par morceaux sur $\left]0, 1\right]$ c'est-à-dire continue par morceaux sur tout segment $[\alpha, 1]$ tel que $0 < \alpha < 1$.

En effet, pour $p \in \mathbb{N}^*$, et $p \leqslant \dfrac{2}{x} < p + 1$ c'est-à-dire $\dfrac{2}{p+1} < x \leqslant \dfrac{2}{p}$ on a $\dfrac{p}{2} \leqslant \dfrac{1}{x} < \dfrac{p+1}{2}$ donc :

$$E\left(\frac{2}{x}\right) = p \ , \ E\left(\frac{1}{x}\right) = E\left(\frac{p}{2}\right) \quad \text{et} \quad f(x) = p - 2E\left(\frac{p}{2}\right).$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{k_p}{n}-\frac{1}{p}\right)f\left(\frac{k_p}{n}\right)+\sum_{k=k_p+1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_{\frac{1}{p}}^{1}f.$$

Or $0\leqslant\frac{k_p}{n}-\frac{1}{p}\leqslant\frac{1}{n}$ donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{k_p}{n}-\frac{1}{p}\right)f\left(\frac{k_p}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}f\left(\frac{k_p}{n}\right)=0$, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=k_p}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_{\frac{1}{p}}^{1}f. \tag{ii}$$

À tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, on peut associer $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $\frac{2}{p}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ puis, cet entier p étant fixé, d'après (ii) il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que :

$$n\geqslant n_0\ \Rightarrow\ \left|\int_{\frac{1}{p}}^{1}f-\frac{1}{n}\sum_{\frac{1}{p}\leqslant\frac{k}{n}\leqslant 1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement, d'après (i), $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant n_0\ \Rightarrow\ \left|\int_0^1 f-u_n\right|\leqslant\varepsilon$, c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\int_0^1 f.$$

3) Il reste à calculer $\int_0^1 f$.

D'après l'étude de f, on a $\int_0^1 f=\sum\limits_{p=2}^{+\infty}\int_{\frac{1}{p}}^{\frac{2}{2p-1}}\mathrm{d}x=2\sum\limits_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2p}$, soit :

$$\int_0^1 f=2\sum_{p=3}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p}=2\left(\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p}-1+\frac{1}{2}\right)\quad\text{c'est-à-dire}\quad\int_0^1 f=2\ell n\,2-1.$$

Ⓑ Suites de fonctions

Ex. 4

Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives, continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

(1) $\forall n\in\mathbb{N}$, il existe S_n segment de $\mathbb{R}$ tel que k_n est nulle en dehors de S_n ;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}k_n=1$;

(3) $\forall\,\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall\,\delta\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists N\in\mathbb{N},\ n\geqslant N\ \Rightarrow\ \int_{-\infty}^{-\delta}k_n+\int_{\delta}^{+\infty}k_n\leqslant\varepsilon.$

Étant donné $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, nulle en dehors d'un segment, on pose :

$$f_n(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)k_n(t)\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

2) Étudier le cas où $k_n(x)=c_n\left(1-x^2\right)^n$ si $x\in[-1,1]$ et $k_n(x)=0$ sinon.

2) Il faut penser à contrôler que $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie les hypothèses du 1). Les constantes c_n se calculent en utilisant l'hypothèse $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} k_n = 1$.

Avec $c_n > 0$, il est clair que chaque fonction k_n, $n \geqslant 1$, est positive, continue sur $\mathbb{R}$ et par définition, elle est nulle en dehors du segment $[-1, 1]$.

La condition $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} k_n = 1$ donne $c_n = \dfrac{1}{\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \mathrm{d}x}$.

Or $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \mathrm{d}x = 2\int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t\mathrm{d}t$ (poser $x = \sin t$). On reconnaît une intégrale de Wallis, d'où :

$$c_n = \frac{1}{2W_{2n+1}} \quad \text{avec} \quad W_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t\mathrm{d}t = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Si $\delta \geqslant 1$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{-\infty}^{-\delta} k_n + \int_{\delta}^{+\infty} k_n = 0.$$

On peut donc, pour la vérification de (3), se limiter à $0 < \delta < 1$.

Sous cette condition, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\delta} k_n + \int_{\delta}^{+\infty} k_n = 2c_n \int_{\delta}^{1} (1-x^2)^n \mathrm{d}x$, donc :

$$0 < \int_{-\infty}^{-\delta} k_n + \int_{\delta}^{+\infty} k_n \leqslant \frac{(1-\delta^2)^n}{W_{2n+1}}.$$

En posant $u_n = \dfrac{(1-\delta^2)^n}{W_{2n+1}}$ on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (1-\delta^2)\frac{2n+3}{2n+2} \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1-\delta^2 < 1$$

ce qui assure que u_n est le terme général d'une série à termes positifs convergente. On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

ce qui montre, avec :

$$0 \leqslant \int_{-\infty}^{-\delta} k_n + \int_{\delta}^{+\infty} k_n \leqslant u_n,$$

que la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfait à l'hypothèse (3).

D'après le 1), on peut maintenant affirmer que f est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{2W_{2n+1}} \int_{-1}^{1} f(x-t)(1-t^2)^n \mathrm{d}t.$$

Le changement de variable défini par $u = x - t$ donne aussi :

$$f_n(x) = \frac{1}{2W_{2n+1}} \int_{x-1}^{x+1} f(u)\left(1-(x-u)^2\right)^n \mathrm{d}u$$

et cette expression montre que les f_n sont des fonctions polynômes.

Ex. 5

1) Existe-t-il une fonction f, continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1+f^2(t)}\mathrm{d}t \ ? \qquad (1)$$

2) a) Étudier la suite de fonctions définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_0(x) = 0,$$

$$\text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1+f_n^2(t)}\mathrm{d}t$$

b) Que peut-on dire de la fonction $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$?

1) Dans ce genre de situation, on opère par analyse-synthèse :

– analyse : si f est solution, elle est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$ (au moins) et elle est solution d'une équation différentielle (E) ;

– synthèse : parmi les solutions possibles fournies par l'analyse, on examine quelles sont celles qui conviennent.

Lorsqu'il y a unicité, celle-ci est fournie par l'analyse, l'existence est donnée par la synthèse.

On notera, de plus, que dans l'exercice proposé, le problème du calcul explicite de f n'est pas posé. On s'intéresse uniquement à l'existence.

- Analyse

Supposons que f soit solution du problème.

Alors $t \mapsto \dfrac{e^{-t^2}}{1+f^2(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1+f^2(t)}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et il en est de même pour f.

En supposant f de classe $\mathcal{C}^n$, le même raisonnement montre que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
On obtient donc par récurrence que toute solution f appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

La relation (1) donne alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(1+f^2(x)\right)f'(x) = e^{-x^2} \ , \ f(0) = 1 \qquad (2)$$

d'où on déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \frac{1}{3}f^3(x) - \frac{4}{3} = \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t \qquad (3)$$

La relation (3) définit f implicitement par une équation de la forme :

$$G\big(f(x)\big) = \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

et il n'est pas question d'inverser explicitement cette fonction G.

Posons $G \ : \ x \mapsto x + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{4}{3}$. G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = x^2+1 > 0$ donc c'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $G(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

La relation (3) donne alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = G^{-1}\left(\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right). \qquad (4)$$

En conclusion de cette nalyse, le problème admet au plus une solution : il s'agit de la fonction f définie par (4).

- Synthèse

G étant un C^1-difféomorphisme, la fonction f définie par (4) est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G\big(f(x)\big) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit $G'\big(f(x)\big)f'(x) = e^{-x^2}$, c'est-à-dire $\big(1+f^2(x)\big)f'(x) = e^{-x^2}$ d'où :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1+f^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Enfin, $G(1) = 0$ donne $G^{-1}(0) = 1$ et avec (4), $f(0) = 1$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1+f^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

2) a) L'étude de la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ se ramène à celui de la série de fonctions de terme général $f_n - f_{n-1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = f_n(x) - f_0(x) = \sum_{k=1}^{n} \big(f_k(x) - f_{k-1}(x)\big).$$

Étudions la série de fonctions de terme général :

$$u_k\ :\ x \mapsto f_k(x) - f_{k-1}(x),\quad k \geqslant 1.$$

Avec $u_1(x) = f_1(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 < |u_1(x)| \leqslant 1 + \left|\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

donc $\|u_1\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant A$ où on a posé $A = 1 + \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Pour $k \geqslant 1$, formons $f_{k+1}(x) - f_k(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\left(\frac{1}{1+f_k^2(t)} - \frac{1}{1+f_{k-1}^2(t)}\right)\mathrm{d}t$ ce qui nous amène à considérer la fonction $\varphi\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

Avec $\varphi'(x) = -\dfrac{2x}{\big(1+x^2\big)^2}$ on obtient $\left|\varphi'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1$ donc φ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|f_{k+1}(x) - f_k(x)\right| \leqslant \left|\int_0^x e^{-t^2}\left|f_k(t) - f_{k-1}(t)\right|\mathrm{d}t\right|.$$

Ainsi, en supposant $u_k = f_k - f_{k-1}$ bornée sur $\mathbb{R}$, cette inégalité donne :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|f_{k+1}(x) - f_k(x)\right| \leqslant \|u_k\|_\infty^{\mathbb{R}}\left|\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \|u_k\|_\infty^{\mathbb{R}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

ce qui montre que u_{k+1} est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $\|u_{k+1}\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \lambda\,\|u_k\|_\infty^{\mathbb{R}}$ avec $\lambda = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Compte tenu de $\|u_1\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant A$, une récurrence immédiate donne alors que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\|u_n\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant A\lambda^n$ et, puisque $0 < \lambda < 1$, cette dernière majoration donne la

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad nW_nW_{n-1} = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Il en résulte que, dans ce cas, la fonction f vérifie bien :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad x^n = x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x\sin t)\mathrm{d}t \quad \text{c'est-à-dire} \quad \varphi(x) = f(0) + x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x\sin t)\mathrm{d}t.$$

- Deuxième cas : φ est un polynôme.

Avec l'étude du premier cas, la propriété reste vraie par linéarité des applications :

$$\varphi \mapsto \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x\sin t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad f \mapsto f(0) + x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x\sin t)\mathrm{d}t.$$

- Cas général

Remarquons d'abord que la fonction $(x,t) \mapsto \varphi(x\sin t)$ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème de Leibniz (cas où l'intervalle d'intégration est compact), avec :

$$f'(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, \varphi'(x\sin t)\mathrm{d}t.$$

Soit $x > 0$ fixé. Puisque φ' est continue, d'après le premier théorème de Weierstrass (voir le *Précis d'analyse, PSI*, chapitre 3) il existe $(Q_n)_{\mathbb{N}}$, suite de polynômes, uniformément convergente vers φ' sur le segment $[-x, x]$.

Posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [-x, x]$, $P_n(t) = \varphi(0) + \int_0^t Q_n(u)\,\mathrm{d}u$. On définit ainsi une suite de polynômes telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n' = Q_n$.

En écrivant $P_n(t) - \varphi(t) = \int_0^t \Big(Q_n(u) - \varphi'(u)\Big)\,\mathrm{d}u$, on obtient :

$$\|P_n - \varphi\|_\infty^{[-x,x]} \leqslant x\left\|Q_n - \varphi'\right\|_\infty^{[-x,x]},$$

la suite $(P_n)_{\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers φ sur $[-x, x]$.

Posons maintenant $\psi_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_n(t\sin u)\,\mathrm{d}u$. On a alors :

$$f(t) - \psi_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\varphi(t\sin u) - P_n(t\sin u)\Big)\,\mathrm{d}u$$

donc :

$$\|f - \psi_n\|_\infty^{[-x,x]} \leqslant \|P_n - \varphi\|_\infty^{[-x,x]}.$$

Ainsi la suite $(\psi_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[-x, x]$.

D'après l'étude du deuxième cas, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall t \in [-x, x],\quad P_n(t) = \psi_n(0) + t\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi_n'(t\sin u)\,\mathrm{d}u \tag{1}$$

Il est clair que les fonctions ψ_n sont polynomiales donc de classe C^1 sur $[-x, x]$ et puisque $(t,u) \mapsto P_n(t\sin u)$ est de classe C^1 sur $[-x, x] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, le théorème de dérivation sous le signe somme (cas où l'intervalle d'intégration est compact) donne :

$$\forall t \in [-x, x],\quad \psi_n'(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u\, P_n'(t\sin u)\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u\, Q_n(t\sin u)\,\mathrm{d}u.$$

Pour $x = 0$, on a $T\gamma(0) = \gamma(0) + \gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha\left(\frac{1}{2}\right) - \beta\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha\left(\frac{1}{2}\right) - \pi^2$. Or :

$$\alpha\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4}{(2n-1)^2} = 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 8\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Le calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ est classique :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} = \frac{\pi^2}{6}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

On en déduit $\alpha\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^2$ et finalement $T\gamma(0) = 0$. De même :

$$T\gamma(1) = \gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \gamma(1) = \gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Pour $x \in \left]0, 1\right[$, on a $T\gamma(x) = \alpha\left(\frac{x}{2}\right) + \alpha\left(\frac{x+1}{2}\right) - \beta\left(\frac{x}{2}\right) - \beta\left(\frac{x+1}{2}\right)$. Or :

$$\alpha\left(\frac{x}{2}\right) + \alpha\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4}{(x-2n)^2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4}{\left(x-(2n-1)\right)^2}$$

$$= 4\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2} = 4\,\alpha(x).$$

$$\text{et} \quad \beta\left(\frac{x}{2}\right) + \beta\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi\frac{x}{2}} + \frac{\pi^2}{\cos^2 \frac{\pi x}{2}} = \frac{4\pi^2}{\sin^2 \pi x} = 4\,\beta(x).$$

d'où finalement $T\gamma(x) = 4\,\gamma(x)$.

Cette égalité restant vraie pour $x \in \{0, 1\}$, on a $T\gamma = 4\gamma$; or, d'après 3), 4 n'est pas valeur propre de T, il en résulte donc $\gamma = 0$.

En tenant compte du fait que la fonction $\varphi - \psi$ est 1-périodique puisque :

$$\forall x \in \left]0, 1\right[, \ \varphi(x) = \psi(x),$$

on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \ \varphi(x) = \psi(x).$$

Ex. 10

1) Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer l'existence de $F(z) = \displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{2^n}\right)$.

2) Montrer ensuite la continuité de la restriction de F à $\mathbb{R}$.

1) Dans le cas où z est réel, il suffit de prouver la convergence de la série :

$$\sum_{n\geq 0} \ell n\left(1 - \frac{z}{2^n}\right)$$

ce qui est immédiat puisque $\ell n\left(1 - \frac{z}{2^n}\right) \sim -\frac{z}{2^n}$ quand $n \to +\infty$.

Avec $\forall x \in [-a, a]$, $\ln\left(1-\frac{a}{2^n}\right) \leqslant \ln\left(1-\frac{x}{2^n}\right) \leqslant \ln\left(1+\frac{a}{2^n}\right)$, on obtient :

$$\left|\ln\left(1-\frac{x}{2^n}\right)\right| \leqslant \max\left(\ln\left(1+\frac{a}{2^n}\right), -\ln\left(1-\frac{a}{2^n}\right)\right) \leqslant \ln\left(1+\frac{a}{2^n}\right) - \ln\left(1-\frac{a}{2^n}\right).$$

Donc :

$$\sup_{x\in[-a,a]}\left|\ln\left(1-\frac{x}{2^n}\right)\right| \leqslant \ln\left(1+\frac{a}{2^n}\right) - \ln\left(1-\frac{a}{2^n}\right)$$

et, sachant que la série de terme général :

$$u_p = \ln\left(1+\frac{a}{2^n}\right) - \ln\left(1-\frac{a}{2^n}\right)$$

est convergente (car $u_n \sim \frac{2a}{2^n}$), on en déduit que la série de fonctions :

$$\sum_{n\geqslant n_a} f_n \quad \text{avec} \quad f_n : x \mapsto \ln\left(1-\frac{x}{2^n}\right)$$

converge normalement donc uniformément sur $[-a, a]$ et sa somme :

$$f_a : x \mapsto \sum_{n=n_a}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{x}{2^n}\right)$$

est continue sur $[-a, a]$.

Ainsi F est continue sur $[-a, a]$ en tant que produit et composée de fonctions continues.

Ceci étant vrai quel que soit $a > 0$, on en conclut que F est continue sur $\mathbb{R}$.

Ex. 11

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que la série de terme général na_n soit absolument convergente ; on définit pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n \sin nx \quad \text{et} \quad g(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx \sin y.$$

Montrer que $f \geqslant 0$ sur $[0, \pi] \iff g \geqslant 0$ sur $[0, \pi]^2$.

> Il est utile d'exhiber une relation simple entre f et g et l'expression $n \sin nx$ peut faire penser à une intégration.

Sachant que la série de terme général na_n est absolument convergente, la série de fonctions de terme général $x \mapsto u_n(x) = na_n \sin nx$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ car :

$$\forall x \in [0, \pi], |u_n(x)| \leqslant n|a_n|.$$

Alors, puisque les u_n sont continues, la somme :

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

existe et f est continue sur $\mathbb{R}$, de plus, quel que soit le segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$, on a :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\mathrm{d}t.$$

Les deux premières conditions donnent $0 < x \leqslant 2$ et la troisième se réduit alors à $-1 \leqslant \frac{x-1}{x}$.

On a donc $\mathcal{D} = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ et f est continue sur $\mathcal{D}$ comme somme et composée de fonctions continues.

2) Sachant que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]\frac{1}{2}, 2\right[$ avec :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -F'(1-x) + \frac{1}{x^2}F'\left(\frac{x-1}{x}\right) \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^{n-1}}{n} + \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

> À ce stade, il est souhaitable de pouvoir annoncer que pour tout $x \in]-1,1[$:
> $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$
> sans avoir besoin de reprendre des calculs forcément faits en cours.

Pour $x \neq 1$, on a donc :

$$f'(x) = \frac{1}{1-x}\ln\left[1-(1-x)\right] - \frac{1}{x(x-1)}\ln\left(1-\frac{x-1}{x}\right) = -\frac{1}{x}\ln x.$$

La continuité de f' sur $\left]\frac{1}{2}, 2\right[$ permet de dire que cette formule reste valable en 1. Ainsi, on a :

$$\forall x \in \left]\frac{1}{2}, 2\right[, f'(x) = -\frac{1}{x}\ln x$$

d'où on déduit :

$$f(x) = \lambda - \frac{1}{2}\ln^2 x.$$

Avec $f(1) = 0$ et la continuité de f sur $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ on a finalement :

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right], f(x) = -\frac{1}{2}\ln^2 x.$$

Ex. 13

1) Calculer $A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+3}$.

2) Exprimer $B = \int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} t}{\sqrt{t}}\,dt$ à l'aide de A.

3) Montrer que $\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\operatorname{Arctan} t}\,dt > \frac{1}{B}$.

1)

> On remarque que : $\frac{1}{4n+3} = \int_0^1 t^{4n+2}\,dt$ donc, à une permutation près des opérateurs $\sum$ et $\int$, on voit apparaître une somme de série géométrique.

donc la fonction $f\ :\ t \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} t}{\sqrt{t}}$ est prolongeable par continuité en $[0,1]$ ce qui assure l'existence de :

$$B = \int_0^1 f.$$

Le changement de variable défini par $u = \sqrt{t}$ donne alors $B = 2\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arctan} u^2\,\mathrm{d}u$.

> Le développement en série entière de Arctan doit être connu. C'est cela qui permet d'imaginer, qu'après une intégration sur $[0,1]$, on va voir apparaître une série qui peut se relier facilement à celle du a).

On sait que, pour tout $x \in [-1,1]$, $\operatorname{Arctan} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, donc :

$$B = 2\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{2n+1}\mathrm{d}x.$$

La série de fonctions de terme général :

$$u_n\ :\ x \mapsto (-1)^n\frac{x^{4n+2}}{2n+1}$$

converge uniformément sur $[0,1]$. En effet, pour tout $x \in [0,1]$, $\sum u_n(x)$ est une série alternée qui vérifie le critère spécial donc son reste :

$$R_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \quad \text{est tel que} \quad |R_n(x)| \leqslant |u_n(x)| \leqslant \frac{1}{2n+1}$$

ce qui donne $\|R_n\|_\infty^{[0,1]} \leqslant \dfrac{1}{2n+1}$ et la convergence uniforme.

En conséquence, on a $B = 2\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 u_n(x)\mathrm{d}x$, c'est-à-dire :

$$B = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(4n+3)}.$$

> Il reste à effectuer une décomposition en éléments simples de la fraction $\dfrac{1}{(2n+1)(4n+3)}$ pour voir apparaître la somme A.

Avec $\dfrac{1}{(2n+1)(4n+3)} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{2}{4n+3}$ il vient alors :

$$B = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} - 4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n+3}$$

soit aussi :

$$B = \frac{\pi}{2} - 4A = \frac{\pi\left(1-\sqrt{2}\right)}{2} - \sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right).$$

3)

> Il faut commencer par s'assurer de l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\operatorname{Arctan} t}\mathrm{d}t$.

La fonction $\dfrac{1}{f}\ :\ t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{\operatorname{Arctan} t}$ est continue sur $]0,1]$ et au voisinage de 0, on a :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{k}{n} x^k$$

grâce à la convention $\binom{k}{n} = 0$ pour $k > n$.

2) Pour tout $x \neq 1$, on a :

$$f(x)g(x) = \frac{1}{1-x}$$

donc :

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

et en faisant le produit de Cauchy des deux séries précédentes :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k-j}{n} \binom{n}{n+j} \right) x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k.$$

Par unicité du développement en série entière de fg on en déduit :

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n-j}{n} \binom{n}{n+j} = 1.$$

Ex. 15

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $p(n)$ le nombre de chiffres de l'écriture de n en base 10.

On pose $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p(n)}{n(n+1)}$. Établir l'existence et calculer S.

> Pour l'existence, il faut penser que l'on dispose de l'encadrement :
> $$10^{p(n)-1} \leqslant n < 10^{p(n)}$$
> qui permet de donner un équivalent de $p(n)$ et de $u_n = \dfrac{p(n)}{n(n+1)}$.

En utilisant le logarithme décimal, l'encadrement :

$$10^{p(n)-1} \leqslant n < 10^{p(n)}$$

donne :

$$\log n < p(n) \leqslant 1 + \log n$$

et donc, quand $n \to +\infty$, $p(n) \sim \log n$ soit aussi $p(n) \sim \dfrac{\ell n\, n}{\ell n\, 10}$.

Posons $K = \dfrac{1}{\ell n\, 10}$, on obtient $u_n \sim K \dfrac{\ell n\, n}{n^2}$ donc $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ et la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$ est convergente.

> $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ est le terme général d'une série télescopique. En conséquence, puisque sur chaque intervalle $I_k = [\![10^{k-1}, 10^k - 1]\!]$ $p(n)$ est constant, égal à k, les sommes $\displaystyle\sum_{n \in I_k} u_n$ s'explicitent facilement.

Par groupement des termes, on a :

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=10^{k-1}}^{10^k-1} \frac{p(n)}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \sum_{n=10^{k-1}}^{10^k-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{10^{k-1}} - \frac{1}{10^k}\right)$$

donc $$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9k}{10^k} = \frac{9}{10} f\left(\frac{1}{10}\right) \quad \text{avec} \quad f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\,x^{k-1}.$$

La série entière $\sum_{k\geqslant 1} k\,x^{k-1}$, de rayon de convergence égal à 1, est la série dérivée de $\sum_{k\geqslant 0} x^k$ donc :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right)$$

c'est-à-dire :

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

On en déduit facilement :

$$S = \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^2 = \frac{10}{9}.$$

Ex. 16

Développer en série entière à l'origine $f\ :\ x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos^2 t}$ et en déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t\mathrm{d}t$.

> Il faut d'abord préciser l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

Pour $x < 1$ on a $\forall t \in \mathbb{R}$, $1 - x\cos^2 t > 0$ donc :

$$\varphi\ :\ t \mapsto \frac{1}{1 - x\cos^2 t}$$

est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $f(x)$ est défini.

Pour $x \geqslant 1$, il existe $t_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $1 - x\cos^2 t_0 = 0$:

$$t_0 = \operatorname{Arccos} \frac{1}{\sqrt{x}},$$

et la fonction φ présente une discontinuité en t_0. Lorsque $t_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a, au voisinage de t_0 :

$$\varphi(t) = \frac{\cos^2 t_0}{\cos^2 t_0 - \cos^2 t} \sim \frac{\cos^2 t_0}{(t - t_0)\sin 2t_0}$$

et si $t_0 = 0$ on a, au voisinage de 0 :

$$\varphi(t) = \frac{1}{1 - \cos^2 t} \sim \frac{1}{t^2}.$$

Dans chacun de ces cas, φ est non intégrable sur tout intervalle $\left]t_0, t_0 + \alpha\right[$ et f est non définie.

Finalement, on a $\mathcal{D} = \left]-\infty, 1\right[$.

> Ainsi f est définie sur un voisinage de 0 et on peut se poser la question de savoir si elle est développable en série entière autour de ce point.

Il est clair que, pour obtenir un développement faisant intervenir les intégrales de Wallis :

$$W_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t\,\mathrm{d}t,$$

la méthode consiste à développer :

$$x \mapsto \frac{1}{1 - x\cos^2 t}$$

en série entière puis montrer que l'on peut intégrer terme à terme ce développement par rapport à la variable t.

D'autre part, on voit que :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = +\infty$$

donc, si R est le rayon de convergence du développement recherché, on a $\left] -R, R\right[\subset \mathcal{D}$ c'est-à-dire $R \leqslant 1$ et, par la suite, on va supposer $|x| < 1$.

Pour $|x| < 1$ on a $\forall t \in \mathbb{R}$, $\left|x\cos^2 t\right| \leqslant |x| < 1$, donc :

$$\frac{1}{1 - x\cos^2 t} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos^{2n} t$$

et la série de fonctions de terme général $u_n \ : \ t \mapsto x^n \cos^{2n} t$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$, et, a fortiori, sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Il en résulte :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - x\cos^2 t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} W_{2n}x^n \qquad (1)$$

Les intégrales de Wallis vérifient la relation de récurrence :

$$nW_n = (n-1)W_{n-2}$$

on a donc :

$$\frac{W_{2n+2}}{W_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} \text{ d'où } \lim_{n \to +\infty} \frac{W_{2n+2}}{W_{2n}} = 1$$

et le rayon de convergence du développement de f est $R = 1$.

Pour déduire W_{2n} de ce calcul, il s'agit de trouver une autre méthode pour développer f puis identifier les développements obtenus. Pour ce faire, il est naturel de commencer par expliciter $f(x)$.

On effectue le changement de variable défini par :

$$u = \tan t,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\iff t = \operatorname{Arctan} u,\ u \in \left[0, +\infty\right[$$

et on obtient :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1 - x + u^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\left[\operatorname{Arctan}\frac{u}{\sqrt{1-x}}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}$$

En utilisant le développement connu :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

2) D'après le 1), la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall t \in \left[0, +\infty\right[, |g(t)| \leqslant A \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = Ae^t.$$

Donc, $t \mapsto e^{-tx} g(t)$ est continue sur $\left[0, +\infty\right[$ et vérifie :

$$\forall t \in \left[0, +\infty\right[, e^{-tx} |g(t)| \leqslant Ae^{-(x-1)t}$$

elle est donc intégrable sur $\left[0, +\infty\right[$ dès que $x - 1 > 0$. On a alors :

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} g(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^n}{n!} e^{-tx}\mathrm{d}t.$$

> Nous nous retrouvons ainsi face à un problème de permutation série-intégrale. L'intervalle d'intégration étant non borné, nous nous orientons vers le théorème de convergence dominée.

Posons $u_n \ : \ t \mapsto a_n \dfrac{t^n}{n!} e^{-tx}$.

Chaque u_n est continue sur $\left[0, +\infty\right[$ et vérifie $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 u_n(t) = 0$. Elle est donc intégrable sur cette intervalle, et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |u_n| &= \frac{|a_n|}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-tx}\mathrm{d}t \\ &= \frac{|a_n|}{n!x^{n+1}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^n \,\mathrm{d}u \quad \text{(en posant } u = tx)\end{aligned}$$

En posant $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u} u^n \,\mathrm{d}u$, une intégration par parties donne pour tout $n \geqslant 1$, $I_n = n\, I_{n-1}$ donc $I_0 = 1$ donne $I_n = n!$ et finalement :

$$\int_0^{+\infty} |u_n| = \frac{|a_n|}{x^{n+1}}.$$

Avec $|a_n| \leqslant A$ et $x > 1$ on en déduit que la série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n|$ est convergente et le théorème de convergence dominée spécial aux séries donne :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} g(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}} = \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ex. 18

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\, x^n$.

Trouver un équivalent simple de $f(x)$ lorsque $x \to 1$.

On admettra le résultat suivant : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

> Il s'agit ici d'étudier la somme d'une série entière au bord de l'intervalle de convergence.
> Lorsque l'on dispose d'une série de fonctions de terme général $u_n \ : \ x \mapsto \varphi(n, x)$ où, pour tout x, la fonction $t \mapsto \varphi(t, x)$ est positive, décroissante, il est facile d'encadrer la somme de cette série au moyen d'intégrales, ce qui permet souvent de conclure.

Dans l'exemple proposé, la fonction $\psi\ :\ t \mapsto \sqrt{t}\, x^t$ n'est monotone décroissante qu'à partir de :

$$a = -\frac{1}{2\ln x},$$

valeur qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1. Nous ne sommes donc pas dans les conditions d'application de la méthode évoquée précédemment. Nous allons nous y ramener en remarquant que :

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}.$$

Il est clair que f est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$ et divergente au point 1.

Pour $x \in [0, 1[$, formons :

$$x\, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\, x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n-1}\, x^n,$$

puis :

$$(1-x) f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}.$$

À ce niveau, on dispose d'une fonction :

$$t \mapsto \frac{x^t}{\sqrt{t} + \sqrt{t-1}}$$

qui est positive, décroissante sur $[1, +\infty[$ pour tout $x \in [0, 1[$.

Cependant, cette fonction paraît encore un peu compliquée et nous pouvons simplifier le problème en effectuant un premier encadrement.

En remarquant que $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n-1}}$ on obtient alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2\sqrt{n}} \leqslant (1-x) f(x) \leqslant x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{2\sqrt{n-1}} \qquad (1)$$

Il faut faire attention au fait qu'une inégalité est vraie pour tout $n \geqslant 1$, alors que l'autre nécessite $n \geqslant 2$.

Donc, en posant $h(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2\sqrt{n}}$, il vient $h(x) \leqslant (1-x) f(x) \leqslant x + x\, h(x)$.

Puisque la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente, on a $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} h(x) = +\infty$ (cela va aussi être prouvé par la suite) et l'encadrement précédent donne $(1-x) f(x) \underset{x \to 1}{\sim} h(x)$.

On est donc en fait ramené à la recherche d'un équivalent de $h(x)$.

La fonction $\varphi\ :\ t \mapsto \dfrac{x^t}{2\sqrt{t}}$ est continue, positive sur $]0, +\infty[$, telle que :

$$\varphi(t) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} t^2\, \varphi(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{t \ln x + 2 \ln t} = 0$$

(car $\ln x < 0$ et $\ln t = o(t)$ quand $t \to +\infty$). Elle est donc intégrable sur cet intervalle et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_n^{n+1} \frac{x^t}{2\sqrt{t}} \mathrm{d}t \leqslant \frac{x^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{x^t}{2\sqrt{t}} \mathrm{d}t$$

b)

> Lorsque l'on a affaire à une série entière $\sum a_k x^k$ à coefficients a_k positifs, de rayon de convergence $R < +\infty$, si cette série diverge au point R, on a :
> $$\lim_{x \to R} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = +\infty.$$
> C'est le cas dans l'exemple proposé.

Il est clair que f_p est croissante sur $[0, 1[$ et d'autre part que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, f_p(x) \geqslant \sum_{k=1}^{n+1} x^{k^p}.$$

Alors $\lim\limits_{x \to 1} \sum\limits_{k=1}^{n+1} x^{k^p} = n + 1$, on déduit qu'il existe $x \in [0, 1[$ tel que $f_p(x) \geqslant n$.

Ceci étant vrai quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_p est non majorée sur $[0, 1[$ donc, puisqu'elle est croissante, on a :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f_p(x) = +\infty.$$

> À x fixé, lorsqu'il existe une fonction φ_x décroissante telle que :
> $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) = \varphi_x(n)$$
> il est simple d'obtenir un encadrement de :
> $$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$
> au moyen d'intégrales et c'est souvent une méthode efficace dans la recherche d'équivalents.

Pour x fixé dans $]0, 1[$, la fonction $\varphi_x : t \mapsto x^{t^p} = e^{t^p \ln x}$ est décroissante (car $\ln x < 0$), continue et intégrable sur $[0, +\infty[$ (car $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 x^{t^p} = \lim\limits_{t \to +\infty} e^{t^p \ln x + 2 \ln t} = 0$).

On a donc $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x^{n^p} = \varphi_x(n) \geqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi_x(t)\mathrm{d}t$

et $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x^{n^p} = \varphi_x(n) \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} \varphi_x(t)\mathrm{d}t$

En sommant, on en déduit :

$$\int_0^{+\infty} e^{t^p \ln x}\mathrm{d}t \leqslant f_p(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} e^{t^p \ln x}\mathrm{d}t$$

soit, en posant $u = t^p |\ln x|$ donc $t = u^{\frac{1}{p}} |\ln x|^{-\frac{1}{p}}$:

$$\frac{1}{p} |\ln x|^{-\frac{1}{p}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{p}-1} \mathrm{d}u \leqslant f_p(x) \leqslant 1 + \frac{1}{p} |\ln x|^{-\frac{1}{p}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{p}-1} \mathrm{d}u$$

ou encore :

$$\frac{1}{p} |\ln x|^{-\frac{1}{p}} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \leqslant f_p(x) \leqslant 1 + \frac{1}{p} |\ln x|^{-\frac{1}{p}} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right).$$

Il en résulte, quand x tend vers 1, $f_p(x) \sim \dfrac{\frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{(1-x)^{\frac{1}{p}}}$.

3) Formons $f_p(x) - 1 - x = \sum_{n=2}^{+\infty} x^{n^p} = x^{2^p}\left[1 + \sum_{n=3}^{+\infty} x^{n^p - 2^p}\right]$.

> Ce qui doit sauter aux yeux est que, dans ce cas c'est-à-dire lorsque p tend vers $+\infty$, x étant fixé tel que $|x| < 1$, le terme dominant de la série est le premier : x^{2^p}.
> Il reste alors à prouver que :
> $$\sum_{n=3}^{+\infty} x^{n^p} = o\left(x^{2^p}\right) \quad \text{ou encore que} \quad \sum_{n=3}^{+\infty} x^{n^p - 2^p} = o(1).$$

Pour $n \geqslant 3$, la fonction $\Psi : t \mapsto n^t - 2^t$ est croissante sur $[1, +\infty[$ car $\Psi'(t) = n^t \ln n - 2^t \ln 2$ est clairement strictement positif.
On obtient donc :
$$\forall p \in [\![1, +\infty[\![,\ n^p - 2^p \geqslant n - 2 \quad \text{puis} \quad |x|^{n^p - 2^p} \leqslant |x|^{n-2} \quad (\text{car } |x| < 1).$$
Il en résulte que la série de fonctions de terme général $v_n : p \mapsto x^{n^p - 2^p}$ converge normalement donc uniformément sur $[\![1, +\infty[\![$.

En conséquence, on a $\lim_{p \to +\infty} \sum_{n=3}^{+\infty} v_n(p) = \sum_{n=3}^{+\infty} \lim_{p \to +\infty} v_n(p) = 0$, c'est-à-dire :
$$\sum_{n=3}^{+\infty} x^{n^p - 2^p} = o(1) \text{ quand } p \to +\infty$$
et finalement :
$$f_p(x) - 1 - x \sim x^{2^p} \text{ lorsque } p \to +\infty.$$

Ex. 20

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x + x^n\right)^n$.

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

2) Étudier les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

3) Montrer que f est développable en série entière à l'origine.

4) En déduire le développement limité de f à l'ordre 6 en 0.

1)

> Il s'agit d'étudier, en fonction du paramètre x, la nature de la série numérique de terme général $\left(x + x^n\right)^n$.

Pour $|x| < 1$, on a $\left|x + x^n\right|^n = |x|^n \left|1 + x^{n-1}\right|^n$, or $1 + x^{n-1} > 0$, donc :
$$\left|x + x^n\right|^n = |x|^n \left(1 + x^{n-1}\right)^n = |x|^n e^{n \ln(1 + x^{n-1})}$$
Avec $\ln\left(1 + x^{n-1}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} x^{n-1}$ et $\lim_{n \to +\infty} n x^{n-1} = 0$, il en résulte $\left|x + x^n\right|^n \underset{n \to +\infty}{\sim} |x|^n$, et donc la série $\sum_{n \geqslant 1} \left(x + x^n\right)^n$ est absolument convergente.

Pour $|x| \geqslant 1$, on a, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\left|x + x^{2n+1}\right| \geqslant 2$, donc $\left|x + x^{2n+1}\right|^{2n+1} \geqslant 2^{2n+1}$, et la série $\sum_{n \geqslant 1} \left(x + x^n\right)^n$ diverge grossièrement.

En conclusion : $D =]-1, 1[$.

2) Pour $x \in]0, 1[$, on a $f(x) \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \dfrac{x}{1-x}$ donc $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = +\infty$.

Pour $x \in]-1, 0[$, posons $x = -t$. Alors $t \in]0, 1[$ et :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(t - (-t)^n\right)^n$$

donc, en groupant les termes deux par deux :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\left(t + t^{2n-1}\right)^{2n-1} + \left(t - t^{2n}\right)^{2n}$$

et on en déduit :

$$f(x) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} t^{2n} - \left[t^{2n-1} + (2n+1)t^{4n-3}\right]$$

Un calcul auxiliaire donne pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)x^{2n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = \frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$$

d'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(2n-1)t^{4n-3} = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)t^{4n+1} = \frac{t\left(1+t^4\right)}{\left(1-t^4\right)^2}$$

et :

$$f(x) \leqslant \frac{t^2}{1-t^2} - \frac{t}{1-t^2} - \frac{t\left(1+t^4\right)}{\left(1-t^4\right)^2} = -\frac{t}{1+t} - \frac{t\left(1+t^4\right)}{\left(1-t^4\right)^2}.$$

Il est clair que $\lim_{\substack{t \to 1 \\ t<1}} \left(-\dfrac{t}{1+t} - \dfrac{t\left(1+t^4\right)}{\left(1-t^4\right)^2}\right) = -\infty$ donc $\lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} f(x) = -\infty$.

3)

> En développant $\left(x + x^n\right)^n$ avec la formule du binôme, et la convention $\mathrm{C}_n^k = 0$ pour $k > n$, on fait apparaître une série double.
>
> Malheureusement, pour passer à une série entière, il faut faire une sommation par paquets qui ne correspond pas à un résultat du programme.
>
> Une démonstration directe s'avère donc nécessaire.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\left(x + x^p\right)^p = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k \, x^{pk+p-k}$.

Posons donc pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \left\{(p, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \,/\, 0 \leqslant k \leqslant p,\ pk + p - k = n\right\}$, puis $a_n = \sum_{(p,k)\in I_n} \mathrm{C}_p^k$.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, formons $\sum_{p=1}^{N} \left(x + x^p\right)^p = \sum_{p=1}^{N} \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k \, x^{pk+p-k} = \sum_{n=1}^{N^2} b_n x^n$ où on a posé :

$$b_n = \sum_{(p,k)\in J_n} \mathrm{C}_p^k \quad \text{avec} \quad J_n = \left\{(p, k) \in [\![1, N]\!] \times \mathbb{N} \,/\, 0 \leqslant k \leqslant p,\ pk + p - k = n\right\}$$

Il est clair que l'on a $J_n \subset I_n$ donc $0 \leqslant b_n \leqslant a_n$. D'autre part, pour $n \leqslant N$, on obtient $p \leqslant (p-1)k + p \leqslant N$ donc $J_n = I_n$ et $a_n = b_n$. En conséquence :

$$f(x)-\sum_{n=1}^{N^2} a_n x^n=\sum_{n=1}^{N^2}\left(b_n-a_n\right)x^n+\sum_{n=N+1}^{+\infty}\left(x+x^n\right)^n$$
$$=\sum_{n=N+1}^{N^2}\left(b_n-a_n\right)x^n+\sum_{n=N+1}^{+\infty}\left(x+x^n\right)^n$$

puis

$$\left|f(x)-\sum_{n=1}^{N^2} a_n x^n\right|\leqslant\sum_{n=N+1}^{N^2} a_n|x|^n+\sum_{n=N+1}^{+\infty}\left(|x|+|x|^n\right)^n\leqslant 2\sum_{n=N+1}^{+\infty}\left(|x|+|x|^n\right)^n$$

La convergence, pour $|x|<1$, de la série de terme général $\left(|x|+|x|^n\right)^n$ donne alors :

$$\lim_{N\to+\infty} f(x)-\sum_{n=1}^{N^2} a_n x^n=0 \text{ donc } f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n,$$

ce qui prouve que f est développable en série entière, de rayon de convergence $R\geqslant 1$.

Pour tout $n\geqslant 1$, on a $a_n\geqslant 1$, d'où aussi $R\leqslant 1$ et finalement $R=1$.

4) D'après 3), on a :

$$f(x)=2x+\left(x+x^2\right)^2+\left(x+x^3\right)^3+\left(x+x^4\right)^4+\left(x+x^5\right)^5+\left(x+x^6\right)^6+o\left(x^6\right)$$
$$=2x+x^2+3x^3+2x^4+4x^5+x^6+o\left(x^6\right)$$

Soit $U=\left\{Z\in\mathbb{C}\ /\ |Z|=1\right\}$, pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, posons $X=e^{ix}$, $Y=e^{iy}$, $Z=e^{iz}$, l'équation proposée se lit :

$$X+Y+Z=0,\quad (X,Y,Z)\in\mathbb{U}^3 \qquad (E')$$

> Il est bien connu que $1+j+j^2=0$ avec $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ donc $\left(1,j,j^2\right)$ est solution de (E'). Nous allons vérifier, qu'à une rotation près $\left((X,Y,Z)\mapsto\left(Xe^{i\alpha},Ye^{i\alpha},Ze^{i\alpha}\right)\right)$ et une permutation près sur (X,Y,Z), c'est là l'unique solution de (E').

Remarquons d'abord que (E) est équivalente à :

$$1+e^{i(y-x)}+e^{i(z-x)}=0,\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

en posant $u=y-x$, $v=z-x$, on est donc ramené à étudier l'équation :

$$1+e^{iu}+e^{iv}=0,\quad (u,v)\in\mathbb{R}^2 \qquad \left(E_1\right)$$

qui s'écrit aussi : $1+\cos u+\cos v=0$, $\sin u+\sin v=0$, $\quad (u,v)\in\mathbb{R}^2$.

$\sin v=-\sin u$ donne $v\equiv -u \bmod 2\pi$ ou $v\equiv\pi+u \bmod 2\pi$.

Pour $v\equiv\pi+u \bmod 2\pi$, on a $\cos v+\cos u=0$, ce cas est donc à rejeter et $\left(E_1\right)$ équivaut ainsi à :

$$v\equiv -u \bmod 2\pi,\ \cos u=-\frac{1}{2}\cdot$$

Finalement les solutions des $\left(E_1\right)$ sont les couples :

$$\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi,-\frac{2\pi}{3}+2\,\ell\,\pi\right)\quad\text{et}\quad\left(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2\,\ell\,\pi\right),\quad (k,\ell)\in\mathbb{Z}^2$$

et pour (E) on obtient les triplets :

$$\left(\alpha,\alpha+\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\alpha-\frac{2\pi}{3}+2\,\ell\,\pi\right)\ \text{et}\ \left(\alpha,\alpha-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\alpha+\frac{2\pi}{3}+2\,\ell\,\pi\right),\quad \alpha\in\mathbb{R},(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2$$

D'après le théorème de Parseval, la famille $u = \left(\overline{c_n(f')}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est élément de E et, comme il en est de même pour la famille $v = (v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par $v_0 = 0$ et $v_n = \dfrac{e^{inx}}{in}$ si $n \neq 0$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$|\varphi(u, v)|^2 = \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} c_n(f')\frac{e^{inx}}{in}\right|^2 \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \left|c_n(f')\right|^2 \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}.$$

Sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, cette inégalité s'écrit :

$$|f(x)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f'\right|^2 \cdot \frac{\pi^2}{3}$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)|^2 \leqslant \frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} \left|f'\right|^2.$$

Il reste à passer au sup pour obtenir la formule annoncée.

Ex. 22

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2\alpha\cos x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(n!)^2}$.

> La question peut faire penser à la formule de Parseval. Pour cela, il faut exhiber une fonction f telle que $|f(x)|^2 = e^{2\alpha\cos x}$.

Soit $f\ :\ x \mapsto e^{\alpha e^{ix}}$, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| = e^{\alpha\cos x},\ \alpha \in \mathbb{R}$.
Cette fonction f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après Parseval :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2.$$

Calculons les coefficients de Fourier de f.

Sachant que $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, on a $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n e^{inx}}{n!}$, donc :

$$c_p(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ipx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n e^{i(n-p)x}}{n!}\mathrm{d}x.$$

Compte tenu de $\left|\dfrac{\alpha^n e^{i(n-p)x}}{n!}\right| = \dfrac{|\alpha|^n}{n!}$, la convergence de la série numérique :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{|\alpha|^n}{n!}$$

montre la convergence normale, donc uniforme, sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions de terme général :

$$u_n\ :\ x \mapsto \frac{\alpha^n e^{i(n-p)x}}{n!}.$$

On dispose alors du théorème d'intégration terme à terme sur $[0, 2\pi]$:

$$c_p(f) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!}\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)x}\mathrm{d}x$$

donc, sachant que $\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)x}\mathrm{d}x = 0$ si $n - p \neq 0$, on obtient :

$$\begin{cases} c_p(f) = 0 & \text{si } p < 0 \\ c_p(f) = \dfrac{\alpha^p}{p!} & \text{si } p \geqslant 0 \end{cases}$$

Finalement la formule de Parseval s'écrit :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2\alpha\cos x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(n!)^2}.$$

Ex. 23

Soit D' (resp. D) le disque fermé (resp. ouvert) de $\mathbb{C}$, de centre 0 et de rayon 1. Soit f une application continue de D' dans $\mathbb{C}$, développable en série entière sur D :

$$\forall z \in D,\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} |a_n|^2$ est convergente et exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2$ en fonction de $f(e^{i\theta})$.

> L'idée de base est que si :
>
> $$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$$
>
> est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, pour tout r tel que $0 < r < R$, la série de terme général :
>
> $$\theta \mapsto a_n r^n e^{in\theta}$$
>
> est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ ce qui donne qu'elle est identique à la série de Fourier de sa somme. Donc, en posant :
>
> $$g_r(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$
>
> on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n r^n = c_n(g_r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_r(\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

Soit $g\ :\ \theta \mapsto f(e^{i\theta})$, g est 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$ (car f est, par hypothèse, continue sur D') donc, d'après l'inégalité de Bessel (ou le théorème de Parseval), la série :

$$\sum_{n\geqslant 0} |c_n(g)|^2 \text{ est convergente.}$$

> À ce niveau, nous ne sommes pas en mesure d'exploiter la remarque initiale. En effet, $e^{i\theta}$ n'appartient pas à D et donc on ne dispose même pas d'un développement en série de g. Un moyen de se tirer d'affaire est de déduire les coefficients de Fourier de g de ceux de g_r, $0 < r < 1$, (g_r est définie dans la première remarque) au moyen d'un passage à la limite.

On a :

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

donc, puisque la fonction $(r,\theta) \mapsto f(re^{i\theta})e^{-in\theta}$ est continue sur $[0,1] \times [0,2\pi]$, le théorème de continuité sous le signe somme (cas de l'intégration sur un intervalle compact) donne la continuité sur $[0,1]$, et donc en 1, de la fonction :

et on a aussi :

$$I = \lim_{n\to+\infty} I_n = \int_{[0,1]} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^n}{n+1}\,\mathrm{d}u.$$

> Il s'agit maintenant de justifier l'intégration terme à terme d'une série entière. Cependant, le segment $[0,1]$ n'étant pas inclus dans l'intervalle ouvert de convergence qui est ici $]-1,1[$, les théorèmes généraux (du programme) sur les séries entières ne nous permettent pas de conclure : il va falloir travailler un peu plus finement.

Nous posons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\forall u\in[0,1]$, $g_n(u) = (-1)^n \dfrac{u^n}{n+1}$.

Pour tout $u\in[0,1]$, $\left(|g_n(u)|\right)_{\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, de limite nulle, donc le théorème des séries alternées donne la convergence de $\sum g_n(u)$, ce que l'on savait déjà, mais aussi :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall u\in[0,1],\ |R_n(u)| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty} g_k(u)\right| \leqslant |g_n(u)| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit :

$$\|R_n\|_\infty^{[0,1]} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

ce qui montre la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} g_n$.

Dans ces conditions, on a :

$$\int_{[0,1]} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(u)\,\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[0,1]} g_n(u)\,\mathrm{d}u$$

donc :

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

> On termine en utilisant le résultat classique :
> $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

En écrivant $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$, il vient :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Ex. 26

Étudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

> Il s'agit là d'un exercice très classique dont on peut donner de nombreuses solutions.
>
> Les plus simples utilisent des notions hors programme, nous allons donc présenter une méthode qui va nous être fournie par le théorème de convergence dominée que l'on pourra mettre en œuvre après avoir écrit la somme :
> $$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n \text{ sous la forme } \int_0^{+\infty} f_n.$$

Hidden page

Ainsi la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, sa somme est la fonction

$f : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{\ln(\sin x)}{1-\sin x}$ qui est visiblement continue et négative sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Lorsque t tend vers 1, on a $\ln t \sim t-1$ donc :

$$\ln \sin x \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \sin x - 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = -1.$$

La fonction f est donc prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$ ce qui assure son intégrabilité sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Au voisinage de 0, on a $f(x) \sim \ln(\sin x) \sim \ln x$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et la règle de Riemann donne l'intégrabilité de f sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Finalement f est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Puisque les u_n sont de signe constant, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, u_n(x) < 0$, considérons la série de fonctions de terme général $v_n = -u_n = |u_n|$.

C'est une série de fonctions continues, positives, convergeant simplement sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, de fonction somme $g = -f$.

La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est alors une suite de fonctions continues, convergeant simplement sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ vers la fonction g elle-même continue, et dominée par g :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, V_n(x) = \sum_{k=0}^{n} -u_k(x) \leqslant g(x) = \frac{|\ln(\sin x)|}{1-\sin x}.$$

Puisque g est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, le théorème de convergence dominée donne alors l'intégrabilité de chaque V_n sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (donc aussi celle de chaque v_n car $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < v_n \leqslant V_n$) et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} V_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to+\infty} V_n(x)\mathrm{d}x$$

c'est-à-dire $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} v_k(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\mathrm{d}x.$

Ceci prouve que la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} v_n$ est convergente de somme $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g$, et donc que $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n$ est convergente avec :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{1-\sin x}\mathrm{d}x.$$

Pour conclure, il reste à calculer cette intégrale.

Avec $\cos x = \dfrac{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}}$, il vient :

$$F(x) = \left(1-\cotan\frac{x}{2}\right)\ln\left(1-\tan\frac{x}{2}\right) - \left(1+\cotan\frac{x}{2}\right)\ln\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)$$
$$+\cotan\frac{x}{2}\ln\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) - x$$

soit aussi, en notant $t = \tan\dfrac{x}{2}$:

$$F(x) = \frac{t-1}{t}\ln(1-t) - \frac{t+1}{t}\ln(1+t) + \frac{1}{t}\ln\left(1+t^2\right) - x.$$

De $\lim\limits_{t\to 1}(t-1)\ln(1-t) = 0$ on déduit $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} F(x) = -\ln 2 - \dfrac{\pi}{2}$ et $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ donne :

$$\lim_{x\to 0} F(x) = 0.$$

Finalement : $S = -\ln 2 - \dfrac{\pi}{2}$.

Ex. 28

On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x$.

1) Prouver l'existence de I.

2) Montrer que $I = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln x\,\mathrm{d}x$.

3) En déduire la valeur de I.

1) Pas de difficulté, les résultats du cours s'appliquent de façon immédiate.

La fonction $f\ :\ x\mapsto e^{-x}\ln x$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Au voisinage de 0, on a $f(x) \sim \ln x$, ce qui assure l'intégrabilité sur $]0,1]$.

Au voisinage de $+\infty$, on a $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, ce qui assure l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$ et finalement f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

La fonction $\ln$ est d'usage suffisamment courant pour que son intégrabilité sur $]0,1]$ puisse être considérée comme un résultat acquis.

2) La question «sent» le théorème de convergence dominée, à cela près que l'intervalle d'intégration dépend de n. Une méthode usuelle pour le fixer est de prolonger la fonction intégrée en lui attribuant la valeur 0 sur $]n,+\infty[$.

Considérons les fonctions f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, définies par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \ln x & \text{si } x \in \left]0, n\right] \\ f_n(x) = 0 & \text{si } x \in \left]n, +\infty\right[\end{cases}$$

f_n est clairement continue sur $\left]0, +\infty\right[$ et intégrable sur cet intervalle car $f_n(x) \underset{0}{\sim} \ln x$ et f_n est nulle au voisinage de $+\infty$. Ainsi on a :

$$I_n = \int_0^n f_n = \int_0^{+\infty} f_n.$$

Pour tout x fixé dans $\mathbb{R}_+^*$, dès que $n > x$, on a :

$$f_n(x) = e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)} \ln x = e^{n\left(-\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \ln x$$

$$f_n(x) = e^{-x + o(1)} \ln x$$

Ainsi la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $f \,:\, x \mapsto e^{-x} \ln x$, que l'on sait être continue et intégrable d'après le 1).

La concavité de la fonction $\ln$ nous donne :

$$\forall x \in \left]0, 1\right[, \ln(1 - x) \leqslant -x$$

donc
$$\forall x \in \left]0, n\right[, \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leqslant -\frac{x}{n}$$

et, compte tenu de la croissance de la fonction exponentielle :

$$\forall x \in \left]0, n\right[, |f_n(x)| \leqslant e^{-x} |\ln x|.$$

Par définition des f_n, cette inégalité reste vraie pour $x \geqslant n$ et on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, |f_n(x)| \leqslant |f(x)|.$$

La fonction $|f|$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de convergence dominée nous donne :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} f \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{n \to +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \mathrm{d}x.$$

3) Il nous faut donc trouver un autre moyen pour évaluer la limite de I_n. Pour cela, on peut remarquer qu'il est également possible de fixer l'intervalle d'intégration grâce à un changement de variable.

En posant $x = nt$, on obtient :

$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \mathrm{d}x = n \int_0^1 (1 - t)^n (\ln n + \ln t) \mathrm{d}t$$

soit aussi :

$$I_n = n \ln n \int_0^1 (1 - t)^n \mathrm{d}t + n \int_0^1 (1 - t)^n \ln t \mathrm{d}t = \frac{n}{n + 1} \ln n + nJ_n$$

où on a posé :

$$J_n = \int_0^1 (1 - t)^n \ln t \mathrm{d}t = \int_0^1 x^n \ln(1 - x) \mathrm{d}x.$$

Avec $u(x) = \dfrac{x^{n+1} - 1}{n + 1}$ et $v(x) = \ln(1 - x)$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\left[0, 1\right[$ et on a :

$$J_n = \int_0^1 u'v.$$

En remarquant qu'au voisinage de 1, $u(x) \sim x-1$, on obtient $\lim_{x \to 1} u(x)\, v(x) = 0$. Ceci justifie l'intégration par parties :

$$J_n = \int_0^1 u' v = \left[u\, v \right]_0^1 - \int_0^1 u\, v' = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}-1}{1-x} \mathrm{d}x$$

donc : $$J_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 (1 + x + \cdots + x^n) \mathrm{d}x = -\frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1} \right).$$

On obtient finalement :

$$I_n = -\frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \ln n \right).$$

> À ce niveau, nous voyons apparaître une suite très classique dont la limite est la constante d'Euler :
>
> $$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right).$$

En conclusion, on a $\lim_{n \to +\infty} I_n = -\gamma$, et compte tenu du 2), il vient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \mathrm{d}x = -\gamma.$$

Ex. 29

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$.

1) Montrer que f est définie, continue, dérivable sur $]-1, +\infty[$.

2) Trouver un équivalent de f en 0.

3) Montrer que $f'(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} \mathrm{d}t$.

4) Donner un équivalent de f en $+\infty$.

1)
> On applique les théorèmes du cours.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > -1$:

$$u_n(x) = (-1)^{n-1} \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right).$$

Quel que soit $x > -1$, la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n(x)$ est alternée avec :

$$|u_n(x)| = \ln \left(\frac{n+x}{n} \right) \text{ si } x \geqslant 0 \quad \text{et} \quad |u_n(x)| = \ln \left(\frac{n}{n+x} \right) \text{ si } -1 < x \leqslant 0$$

donc la suite $\left(|u_n(x)| \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. Comme il est clair que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n(x) = 0,$$

on en déduit que $\sum_{n \geqslant 1} u_n(x)$ est convergente d'après le critère des séries alternées.

Ainsi f est définie sur $]-1, +\infty[$.

Soit maintenant $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $-1 < a < 0 < b$ et $R_n(x)$ le restre d'ordre n de la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n(x)$:

$$R_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x).$$

Puisque $\left(|u_n(x)|\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, on obtient :

$$|R_n(x)| \leqslant |u_n(x)|.$$

Donc, si $x \in [a, 0]$:

$$|R_n(x)| \leqslant \ln \frac{n}{n+x} \leqslant \ln \frac{n}{n+a} ;$$

et si $x \in [0, b]$:

$$|R_n(x)| \leqslant \ln\left(\frac{n+x}{n}\right) \leqslant \ln \frac{n+b}{n}$$

et dans tous les cas :

$$|R_n(x)| \leqslant \ln \frac{n}{n+a} + \ln \frac{n+b}{n} \quad \text{c'est-à-dire} \quad |R_n(x)| \leqslant \ln \frac{n+b}{n+a}.$$

Il en résulte :

$$\|R_n\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \ln \frac{n+b}{n+a}$$

donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \|R_n\|_\infty^{[a,b]} = 0$$

ce qui montre que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Puisqu'il s'agit d'une série de fonctions continues sur $[a, b]$, on en déduit que la restriction à $[a, b]$ de la somme f est continue sur $[a, b]$ donc, la continuité étant une propriété locale et chaque réel $x \in \left]-1, +\infty\right[$ admettant un voisinage de la forme $[a, b]$ avec $-1 < a < b$, il vient enfin que f est continue sur $\left]-1, +\infty\right[$.

Les u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-1, +\infty\right[$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > -1, u_n'(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}.$$

Pour tout $x > -1$, la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n'(x)$ est convergente d'après le critère spécial des séries alternées ($\lim_{n \to +\infty} u_n'(x) = 0$ et la suite $\left(|u_n'(x)|\right)_{n \geqslant 1}$ est décroissante). En posant :

$$R_n^1(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k'(x)$$

pour tout $x \in [a, b]$, avec de nouveau $-1 < a < 0 < b$, on obtient :

$$\left|R_n^1(x)\right| \leqslant \left|u_n'(x)\right| \leqslant \frac{1}{n+a} \quad \text{donc} \quad \left\|R_n^1\right\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \frac{1}{n+a}$$

ce qui prouve la convergence uniforme sur $[a, b]$ de la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n'$.

Dans ces conditions, on peut affirmer que la restriction $f_{|[a,b]}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et comme précédemment, le caractère local de la classe $\mathcal{C}^1$ montre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-1, +\infty\right[$.

2) D'après le 1), on a :

$$f'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

donc, avec $f(0) = 0$, il vient $f(x) \sim x \ln 2$ quand $x \to 0$.

3) Toujours d'après le 1), on a :

$$\forall x > -1, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$$

donc, en remarquant que :

$$\frac{1}{n+x} = \int_0^1 t^{n+x-1} \mathrm{d}t$$

on obtient :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^{n-1} t^{n+x-1} \mathrm{d}t \quad \text{c'est-à-dire} \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 v_n(t) \mathrm{d}t$$

où on a posé $v_n : t \mapsto (-1)^{n-1} t^{n+x-1}$.

> On peut bien sûr procéder symétriquement. En partant du développement :
>
> $$\forall t \in [0,1[, \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$$
>
> on obtient en effet :
>
> $$\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} \mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{n+x} \mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} t^{n+x-1}$$
>
> Quelle que soit l'option choisie, on est ramené à justifier que la série de fonctions $\sum v_n$ s'intègre terme à terme sur l'intervalle $[0,1[$, et on remarque que le théorème de convergence dominée spécial aux séries ne s'applique pas puisque :
>
> $$\int_0^1 |v_n(t)| \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+x}$$
>
> est le terme général d'une série divergente.

En introduisant les sommes partielles d'ordre n, on obtient :

$$f'(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-1)^{k-1} t^{k+x-1} \mathrm{d}t$$

or :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-1)^{k-1} t^{k+x-1} = \int_0^1 t^x \sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1} \mathrm{d}t = \int_0^1 t^x \frac{1 + (-1)^{n+1} t^n}{1+t} \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} \mathrm{d}t + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t} \mathrm{d}t$$

et avec $0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{n+x} \mathrm{d}t = \frac{1}{n+x+1}$, il vient :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t} \mathrm{d}t = 0.$$

D'où finalement :

$$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-1)^{k-1} t^{n+x-1} \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} \mathrm{d}t.$$

4) f' est une fonction positive et on a :

$$f(x) = \int_0^x f'(u)\,\mathrm{d}u$$

donc, si on est dans le cas favorable, c'est-à-dire si f' est non intégrable sur $[0, +\infty[$, nous obtiendrons un équivalent de f au voisinage de $+\infty$ en considérant un équivalent simple g de f' et la fonction :

$$x \mapsto \int_0^x g(u)\,\mathrm{d}u.$$

Pour tout $x > 0$, le changement de variable défini par $u = t^{x+1}$ donne :

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^{\frac{1}{x+1}}} = \frac{1}{x+1} \Phi\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

où on a posé $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^x} = \int_{]0,1]} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^x}$.

La fonction $\varphi \;:\; (u, x) \mapsto \dfrac{1}{1+u^x}$ est continue sur $]0,1] \times [0, +\infty[$ comme composée de telles fonctions :

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 + e^{x \ln u}}$$

et elle est dominée par la fonction constante $u \mapsto 1$ qui est intégrable sur $]0,1]$. Donc le théorème de continuité sous le signe somme avec hypothèse de domination globale (valable pour $x \in [0, +\infty[$) donne que Φ est continue sur $[0, +\infty[$. En conséquence, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} \Phi\left(\frac{1}{x+1}\right) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

puis :

$$f'(x) \sim \frac{1}{2(x+1)} \text{ quand } x \text{ tend vers } 0.$$

Puisque $g \;:\; x \mapsto \dfrac{1}{2(x+1)}$ est continue, positive, non intégrable sur $[0, +\infty[$, nous allons maintenant montrer que :

$$f(x) = \int_0^x f'(u)\,\mathrm{d}u \sim \int_0^x g(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} \ln(x+1).$$

D'après l'étude de Φ, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $a > 0$ tel que :

$$x \geqslant a \Rightarrow \left|\Phi\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \left|f'(x) - \frac{1}{2(x+1)}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4(x+1)}$$

En remarquant que :

$$f(x) - \frac{1}{2}\ln(x+1) = f(a) - \frac{1}{2}\ln(a+1) + \int_a^x \left(f'(u) - \frac{1}{2(u+1)}\right) \mathrm{d}u$$

et en posant $A = \left|f(a) - \dfrac{1}{2}\ln(a+1)\right|$, on obtient pour tout $x \geqslant a$:

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\ell n(x+1)\right| \leqslant A+\frac{\varepsilon}{4}\int_a^x \frac{\mathrm{d}u}{u+1} < A+\frac{\varepsilon}{4}\ell n(x+1)$$

puis
$$\left|\frac{2f(x)}{\ell n(x+1)}-1\right| \leqslant \frac{2A}{\ell n(x+1)}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2A}{\ell n(x+1)}=0$, on obtient l'existence de $b \geqslant a$ tel que :

$$\frac{2A}{\ell n(x+1)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ pour tout } x \geqslant b,$$

et il vient :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b \in \mathbb{R}_+^*, x \geqslant b \Rightarrow \left|\frac{2f(x)}{\ell n(x+1)}-1\right| \leqslant \varepsilon.$$

En conclusion, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2f(x)}{\ell n(x+1)}=1$, donc :

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ell n(x+1) \quad \text{soit aussi} \quad f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ell n\, x.$$

G Fonctions définies par une intégrale

Ex. 30

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}\mathrm{d}t.$

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

2) Montrer que f est de classe C^∞ et convexe sur $\mathcal{D}$.

3) Déterminer les limites et des équivalents simples de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

1) Soit $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{1}{t^x(1+t)}$, φ_x est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

Au voisinage de 0, $\varphi_x(t) \sim \dfrac{1}{t^x}$ donc φ_x est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x<1$.

Au voisinage de $+\infty$, $\varphi_x(t) \sim \dfrac{1}{t^{x+1}}$ donc φ_x est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $x>0$.

En conclusion, on a $\mathcal{D} =]0,1[$.

> Rappelons que φ_x étant positive, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi_x$ est convergente si et seulement si φ_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2)
> Si besoin, c'est le moment de revoir le cours concernant la dérivation sous le signe somme.

On définit une fonction g de classe C^∞ sur $]0,1[\times]0,+\infty[$ en posant :

$$\forall (x,t) \in]0,1[\times]0,+\infty[,\ g(x,t) = \frac{e^{-x\ell n\, t}}{1+t}$$

et on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x,t) \in \left]0,1\right[\times \left]0,+\infty\right[, \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t) = (-1)^n (\ell n\, t)^n \frac{e^{-x \ell n\, t}}{1+t}.$$

Nous allons montrer, par récurrence sur n, que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\left]0,1\right[$ avec :

$$f^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)\mathrm{d}t\ ;$$

propriété que nous notons (H_n).

Prouvons (H_1).

- Pour tout $x \in \left]0,1\right[$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $\left]0,+\infty\right[$ et il en est de même pour :

$$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t).$$

- Pour tout $t \in \left]0,+\infty\right[$, $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\left]0,1\right[$.
- Pour tout $(a,b) \in \left]0,1\right[^2$, tel que $a < b$, on a :

$$\forall x \in [a,b], \forall t \in \left]0,+\infty\right[, \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi_1(t)$$

où on a posé :

$$\varphi_1(t) = \frac{|\ell n\, t|}{t^b(1+t)} \text{ si } 0 < t \leqslant 1 \quad , \quad \varphi_1(t) = \frac{|\ell n\, t|}{t^a(1+t)} \text{ si } t > 1.$$

Cette fonction φ_1 est continue, positive, intégrable sur $\left]0,+\infty\right[$ car :

$$\varphi_1(t) = o\left(t^{-\frac{b+1}{2}}\right) \text{ quand } t \to 0, \text{ avec } \frac{b+1}{2} < 1$$

$$\varphi_1(t) = o\left(t^{-\left(1+\frac{a}{2}\right)}\right) \text{ quand } t \to +\infty, \text{ avec } 1 + \frac{a}{2} > 1$$

Ainsi le théorème de dérivation sous le signe somme, avec hypothèse de domination locale, donne que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[a,b] \subset \left]0,1\right[$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0,1\right[$ et la formule de Leibniz donne :

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-\ell n\, t}{t^x(1+t)}\mathrm{d}t.$$

> Remarquons que le théorème du cours ne réclame, au niveau des fonctions partielles en t, que la continuité par morceaux, ce que nous obtenons en observant la continuité : «qui peut le plus, peut le moins».

Prouvons maintenant l'hérédité : $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$.

On suppose f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\left]0,1\right[$, $n \in \mathbb{N}^*$, avec :

$$\forall x \in \left]0,1\right[, f^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n(\ell n\, t)^n}{t^x(1+t)}\mathrm{d}t.$$

En posant :

$$g_n(x,t) = \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t) = \frac{(-1)^n(\ell n\, t)^n}{t^x(1+t)},$$

le même raisonnement que précédemment, en remplaçant g par g_n et φ_1 par φ_{n+1} telle que :

Ceci étant vrai quel que soit $a > 0$, on en déduit que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ avec :

$$\forall x \in]0, +\infty[, F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(x^2+t^2)} \mathrm{d}t$$

soit encore :

$$F'(x) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)(x^2+u)} \quad \text{(en posant } u = t^2\text{)}.$$

On peut maintenant expliciter $F'(x)$.

Pour $x \neq 1$, une décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{1}{(1+u)(x^2+u)} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{1}{1+u} - \frac{1}{x^2+u}\right)$$

donc :

$$F'(x) = \frac{1}{2(x^2-1)}\left[\ln \frac{1+u}{x^2+u}\right]_0^{+\infty} = \frac{\ln x}{x^2-1} = g(x).$$

Par continuité de F' et de g en 1, l'égalité précédente reste vraie en ce point, donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = g(x)$ et on en déduit $F(x) = G(x) + k$ où k est une constante.

Sachant que $\lim\limits_{x \to 0} G(x) = 0$ et que F est continue en 0 avec $F(0) = 0$, on a $k = 0$ d'où finalement :

$$\forall x \in]0, +\infty[, F(x) = G(x).$$

2)

> Il y a lieu de s'assurer de l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1} \mathrm{d}t$.
>
> Ceci étant acquis, on a :
>
> $$I = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \frac{\ln t}{t^2-1} \mathrm{d}t$$
>
> et, d'après la première question, le calcul de I est ramené à l'étude de la limite, quand $n \to +\infty$, de :
>
> $$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{n}{t}\right)}{1+t^2} \mathrm{d}t.$$

On a vu que g, définie par :

$$g(t) = \frac{\ln t}{t^2-1} \text{ si } t \neq 1 \quad \text{et} \quad g(1) = \frac{1}{2},$$

est continue sur $]0, +\infty[$ et intégrable sur $]0, 1]$. De plus on a, au voisinage de $+\infty$:

$$g(t) = o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$$

donc g est intégrable sur $[1, +\infty[$ et finalement elle l'est aussi sur $]0, +\infty[$.

En posant $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} g$ on a alors $I = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^n g$ donc :

$$I = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n \quad \text{où on a posé } f_n : t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{n}{t}\right)}{1+t^2}.$$

> L'introduction de la variable entière n est une discrétisation du problème dont l'intérêt est de faire apparaître la suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}}$ ce qui va permettre l'utilisation du théorème de convergence dominée.

2) Il faut bien sûr penser à utiliser le 1) et, pour ce faire, reconnaître dans $\dfrac{1}{g(r,t)}\dfrac{\partial g}{\partial t}(r,t)$ une expression de la forme $\dfrac{f'(t)}{f(t)}$.

Pour $r \in \mathbb{R}$ fixé, quelconque, la fonction partielle :

$$g_r \;:\; t \mapsto g(r,t) = h\left(re^{it}\right)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de telles fonctions, ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ car h est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, et elle est 2π-périodique tout comme $t \mapsto e^{it}$. Ainsi, d'après le 1) :

$$\int_0^{2\pi} \frac{g_r'(t)}{g_r(t)}\mathrm{d}t \in 2i\pi\,\mathbb{Z}$$

c'est-à-dire que :

$$I(r) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{g(r,t)}\frac{\partial g}{\partial t}(r,t)\mathrm{d}t \in \mathbb{Z}.$$

Nous allons maintenant montrer que $I \;:\; r \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{g(r,t)}\frac{\partial g}{\partial t}(r,t)\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Avec $g(r,t) = h\left(re^{it}\right)$, compte tenu du fait que h est de classe $\mathcal{C}^1$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, on obtient que :

$$\Phi \;:\; (r,t) \mapsto \frac{1}{g(r,t)}\frac{\partial g}{\partial t}(r,t)$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur $\mathbb{R} \times \left[0, 2\pi\right]$.

En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ et donc tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$ à $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on écrit pour tout $z \in \mathbb{C}$, $h(z) = h(x,y)$ et la classe $\mathcal{C}^1$ de h sur $\mathbb{C}$ se traduit par l'existence et la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial y}$. Avec ces notations, on obtient :

$$g(r,t) = h\left(r\cos t, r\sin t\right)$$

donc :

$$\frac{\partial g}{\partial t}(r,t) = -r\sin t\frac{\partial h}{\partial x}\left(r\cos t, r\sin t\right) + r\cos t\frac{\partial h}{\partial y}\left(r\cos t, r\sin t\right).$$

Puisqu'il s'agit ici d'intégrales sur le segment $\left[0, 2\pi\right]$, la continuité de Φ sur $\mathbb{R} \times \left[0, 2\pi\right]$ suffit pour assurer la continuité sur $\mathbb{R}$ de :

$$I \;:\; r \mapsto \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(r,t)\mathrm{d}t.$$

Rappelons que, dans ce cas, l'hypothèse d'intégrabilité sur $\left[0, 2\pi\right]$ des fonctions $\Phi_r \;:\; t \mapsto \Phi(r,t)$ est réalisée car les Φ_r sont continues sur le segment $\left[0, 2\pi\right]$. D'autre part, pour tout segment $\left[a, b\right] \subset \mathbb{R}$, la fonction Φ, continue sur le compact $\left[a, b\right] \times \left[0, 2\pi\right]$, y est bornée ; il existe donc une constante réelle $M(a,b)$ telle que :

$$\forall r \in \left[a, b\right], \forall t \in \left[0, 2\pi\right], |\Phi(r,t)| \leqslant M(a,b)$$

et l'intégrabilité sur $\left[0, 2\pi\right]$ de la fonction constante $t \mapsto M(a,b)$ assure l'hypothèse de domination (locale) permettant d'appliquer le théorème de continuité «sous le signe somme» à la fonction :

$$r \mapsto \int_0^{2\pi} \Phi(r,t)\mathrm{d}t.$$

Puisque I est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, $I(\mathbb{R})$ est un intervalle. Or, on a vu que $I(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Z}$ et tout intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathbb{Z}$ est réduit à un point, en conséquence il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $I(\mathbb{R}) = \{p\}$, c'est-à-dire tel que :

$$\forall r \in \mathbb{R}, \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{g(r,t)} \frac{\partial g}{\partial t}(r,t)\mathrm{d}t = p.$$

3) Il s'agit ici de montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $\geqslant 1$ possède au moins une racine. C'est manifestement en essayant de donner une preuve par l'absurde que l'on se mettra en mesure d'utiliser le résultat du 2).

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ tel que $n = \deg P \geqslant 1$ (donc $a_n \neq 0$).

En supposant que P ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, on retrouve les hypothèses du 2) et on obtient que :

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}P'\left(re^{it}\right)}{P\left(re^{it}\right)}\mathrm{d}t$$

est une constante, indépendante de r. Avec $I(0) = 0$, il vient donc :

$$\forall r \in \mathbb{R}, I(r) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \forall r \in \mathbb{R}, \int_0^{2\pi} \frac{\sum_{k=1}^{n} ka_k r^k e^{ikt}}{\sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{ikt}}\mathrm{d}t = 0.$$

Il en résulte que :

$$\forall r \in \mathbb{R}^*, 2\pi I\left(\frac{1}{r}\right) = \int_0^{2\pi} \frac{\sum_{k=1}^{n} ka_k r^{n-k} e^{ikt}}{\sum_{k=0}^{n} a_k r^{n-k} e^{ikt}}\mathrm{d}t = 0.$$

Posons, pour tout $(r,t) \in \mathbb{R}^2$:

$$u(r,t) = \sum_{k=0}^{n} a_k r^{n-k} e^{ikt}$$

$$\text{et} \quad v(r,t) = \sum_{k=1}^{n} ka_k r^{n-k} e^{ikt}$$

u et v sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Pour $r \neq 0$, on a $u(r,t) = r^n P\left(\frac{e^{it}}{r}\right) \neq 0$,

et pour $r = 0$, $u(0,t) = a_n e^{int} \neq 0$,

donc u ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$ et la fonction $\frac{v}{u}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Ceci nous assure, comme dans le 2), que

$$J : r \longmapsto \int_0^{2\pi} \frac{v(r,t)}{u(r,t)}\mathrm{d}t$$

est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\lim_{r \to 0} J(r) = J(0) = 2\pi n$.

Or, on a vu que pour $r \neq 0$, $J(r) = 2\pi I\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ et, puisque $n \geqslant 1$, nous avons obtenu une contradiction qui achève de prouver, par l'absurde, que P s'annule au moins une fois dans $\mathbb{C}$.

Thèmes d'étude – Problèmes

1 Calcul d'une intégrale par prolongement continu

1) Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^{\alpha}}\mathrm{d}t$ si cette intégrale a un sens.

a) Déterminer l'ensemble de définition D de F.

b) Montrer que pour tout $\alpha \in D$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^{\alpha}}\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^{\alpha}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^{\alpha}}\mathrm{d}t.$

c) Montrer que F est continue sur D.

2) Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{Z}$, et $\phi \in \mathbb{R}$ tel que $\sin\phi \neq 0$. On pose :

$$A_m(\phi) = \sin\phi + \sin\ 3\phi + \cdots + \sin(2m-1)\phi = \sum_{k=0}^{m-1} \sin(2k+1)\phi$$

$$B_m(\phi) = \cos\phi + \cos\ 3\phi + \cdots + \cos(2m-1)\phi = \sum_{k=0}^{m-1} \cos(2k+1)\phi$$

a) Démontrer les relations : $2\sin\phi\, A_m(\phi) = 1 - \cos 2m\phi$, $2\sin\phi\, B_m(\phi) = \sin 2m\phi$.

b) En déduire une expression, en fonction de m, $\sin\phi$, $\cos\phi$, $\sin 2m\phi$ et $\cos 2m\phi$ de chacune des deux sommes :

$$C_m(\phi) = \sum_{k=0}^{m-1}(2k+1)\sin(2k+1)\phi \quad \text{et} \quad D_m(\phi) = \sum_{k=0}^{m-1}(2m-2k-1)\sin(2k+1)\phi.$$

3) Soit m et p deux entiers tels que $1 \leqslant p < 2m$.
On considère la fonction R de la variable t, définie par :

$$R(t) = \frac{t^{p-1} + t^{2m-p-1}}{1+t^{2m}}.$$

Les zéros du polynôme $1 + t^{2m}$ sont les nombres complexes de la forme :

$$e^{i\omega_k} \quad \text{où} \quad \omega_k = \frac{(2k+1)\pi}{2m},\ (k \in \mathbb{Z}).$$

a) Démontrer la relation $R(t) = \dfrac{2}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sin\omega_k \sin p\omega_k}{t^2 - 2t\cos\omega_k + 1}$.

b) Calculer l'intégrale :

$$I(2m, p) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} R(t)\mathrm{d}t$$

après avoir prouvé son existence, et démontrer la relation :

$$I(2m, p) = \frac{\pi}{2m\sin\left(\dfrac{p\pi}{2m}\right)}.$$

4) Calculer $F(\alpha)$ pour tout $\alpha \in D$.

Solution

1) a) Introduisons les fonctions :

$$f\ :\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ (\alpha,t)\mapsto \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^{\alpha}}$$

et, pour α réel fixé :

$$f_\alpha\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ t\mapsto f(\alpha,t).$$

Il est clair que, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, f_α est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, $F(\alpha)$ a un sens si et seulement si f_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire si et seulement si elle est intégrable sur $\left]0,1\right]$ et sur $\left[1,+\infty\right[$.

Examinons d'abord les deux cas particuliers : $\alpha=0$ et $\alpha=2$.

- $f_0\ :\ t\mapsto \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$ est non intégrable sur $\left]0,1\right]$ car, lorsque t tend vers 0, on a $f_0(t)\sim\frac{1}{2t^2}$.

Elle est donc non intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

> On aurait tout aussi bien pu remarquer que f_0 est non intégrable sur $\left[1,+\infty\right[$ car, lorsque t tend vers $+\infty$, $f_0(t)\sim\frac{1}{2}$.

- Il est bien connu que $f_2\ :\ t\mapsto\frac{2}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc a fortiori sur $\mathbb{R}_+^*$.

Nous supposons maintenant $\alpha\notin\{0,2\}$.

- Étude de l'intégrabilité sur $\left]0,1\right]$.

> On donne suivant les valeurs de α un équivalent simple de $f_\alpha(t)$ au voisinage de 0, ce qui permet de conclure avec la règle de Riemann.

Si $\alpha<0$, $f_\alpha(t)\underset{0}{\sim}\frac{1}{t^2}$ donc f_α est non intégrable sur $\left]0,1\right]$.

Si $0<\alpha<2$, $f_\alpha(t)\underset{0}{\sim}\frac{1}{t^{2-\alpha}}$ donc f_α est intégrable sur $\left]0,1\right]$ si et seulement si $2-\alpha<1$ c'est-à-dire $\alpha>1$.

Si $\alpha>2$, $f_\alpha(t)\underset{0}{\sim}1$ donc f_α est intégrable sur $\left]0,1\right]$.

En conclusion, f_α est intégrable sur $\left]0,1\right]$ si et seulement si $\alpha>1$.

- Étude de l'intégrabilité sur $\left[1,+\infty\right[$.

> Sachant qu'une fonction est intégrable sur $\left]0,+\infty\right[$ si et seulement si elle l'est sur $\left]0,1\right]$ et sur $\left[1,+\infty\right[$, on se limite maintenant à $\alpha>1$ et on procède comme précédemment par équivalents.

Si $1<\alpha<2$, $f(t)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{t^{\alpha}}$ ce qui, compte tenu de $\alpha>1$ donne que f_α est intégrable sur $\left[1,+\infty\right[$.

Si $\alpha>2$, $f_\alpha(t)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{t^2}$ donc f_α est intégrable sur $\left[1,+\infty\right[$.

> Il reste maintenant à regrouper les résultats.

- En résumé, f_α est intégrable sur $\left]0,+\infty\right[$ si et seulement si $\alpha>1$, c'est-à-dire que l'ensemble de définition de F est $D=\left]1,+\infty\right[$.

b) L'application $\theta\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{t}$ définit un C^1-difféomorphisme de $]0,1]$ sur $[1,+\infty[$.

Dans ces conditions, le changement de variable défini par $u = \dfrac{1}{t}$ donne :

$$\int_0^1 \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1+u^{\alpha-2}}{1+u^\alpha}\,\mathrm{d}u.$$

Avec la relation de Chasles, on en déduit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}\mathrm{d}t = 2\int_1^{+\infty} \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

c) La question précédente nous permet de considérer que F est définie sur D par :

$$F\ :\ \alpha \mapsto 2\int_0^1 \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

> L'intérêt de cette observation tient au fait que l'intégrale sur $]0,1]$ ne présente qu'un seul «problème d'intégrabilité» alors que l'intégrale sur $]0,+\infty[$ en présente deux !
> Par ailleurs, il ne s'agit vraisemblablement ici que de l'application soigneuse d'un théorème de continuité dominée, et il ne faut pas perdre de vue qu'une domination locale permet souvent de conclure.

On remarque d'abord que la fonction $f\ :\ (\alpha,t) \mapsto \dfrac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}$ est continue sur $]1,+\infty[\times]0,1]$.

> Ce qui assure la vérification des hypothèses du théorème vu en cours : continuité par rapport à la variable α et continuité par morceaux par rapport à la variable d'intégration.

Fixons maintenant a, b, réels tels que $1 < a < 2 < b$. Sachant que pour tout $t \in]0,1]$, la fonction $x \mapsto t^x$ est décroissante, on obtient :

$$\forall\,\alpha \in [a,b],\ \ \forall t \in]0,1],\ \ 0 < f(\alpha,t) \leqslant \frac{1+t^{a-2}}{1+t^b}.$$

La fonction $\varphi\ :\ t \mapsto \dfrac{1+t^{a-2}}{1+t^b}$ est continue et intégrable sur $]0,1]$ car $\varphi(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{2-a}}$ avec $2-a < 1$.
Elle nous donne donc l'hypothèse de domination qui, avec le théorème de continuité dominée, montre que F est continue sur $[a,\ b]$.
Tout point $\alpha \in]1,+\infty[$ admettant un voisinage de la forme $[a,\ b]$ et la continuité étant une propriété locale, il en résulte que F est continue sur $]1,+\infty[$.

2) a) Les réponses étant données dans l'énoncé, on peut se contenter de simples vérifications.

Formons
$$\begin{aligned}2\sin\phi\, A_m(\phi) &= \sum_{k=0}^{m-1} 2\sin\phi\sin(2k+1)\phi\\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\big(\cos 2k\,\phi - \cos 2(k+1)\,\phi\big)\\ &= 1-\cos 2m\,\phi \quad \text{après télescopage.}\end{aligned}$$

De même
$$\begin{aligned}2\sin\phi\, B_m(\phi) &= \sum_{k=0}^{m-1} 2\sin\phi\cos(2k+1)\phi\\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\big(\sin 2(k+1)\,\phi - \sin 2k\,\phi\big)\\ &= \sin 2m\,\phi \quad \text{après télescopage.}\end{aligned}$$

Pour $0 \leqslant k \leqslant m-1$, on a $\sin \omega_k > 0$ d'où :

$$I(2m, p) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(-\operatorname{cotan} \omega_k) \right] \sin p\omega_k .$$

En notant que $-\operatorname{cotan} \omega_k = \tan\left(\omega_k - \frac{\pi}{2}\right)$ et que $\omega_k - \frac{\pi}{2} \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, on obtient :

$$\operatorname{Arctan}\left(-\operatorname{cotan} \omega_k \right) = \operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\omega_k - \frac{\pi}{2} \right) \right) = \omega_k - \frac{\pi}{2}$$

d'où :

$$I(2m, p) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\pi - \omega_k \right) \sin p\omega_k$$

ou encore $I(2m, p) = \dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} (2m - 2k - 1) \frac{\pi}{2m} \sin(2k+1)p\frac{\pi}{2m}$

$$= \frac{\pi}{2m^2} D_m \left(\frac{p\pi}{2m} \right)$$

Donc, d'après 1) b), $\quad I(2m, p) = \dfrac{\pi}{2m \sin \dfrac{p\pi}{2m}}$.

4) Puisque l'on nous a fait démontrer que F est continue sur D, il s'agit probablement ici d'un problème de prolongement continu, utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Dans un premier temps, il paraît donc nécessaire d'exprimer $I(2m, p)$ en fonction de F.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'application $u \mapsto t = u^{\frac{1}{p}}$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même. Donc, avec $dt = \frac{1}{p} u^{\frac{1-p}{p}} du$, le changement de variable défini par $t = u^{\frac{1}{p}}$ donne :

$$I(2m, p) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1} + t^{2m-p-1}}{1 + t^{2m}} dt = \frac{1}{2p} \int_0^{+\infty} \frac{1 + u^{\frac{2m}{p} - 2}}{1 + u^{\frac{2m}{p}}} du = \frac{1}{2p} F\left(\frac{2m}{p} \right).$$

Tout réel α de $\left]1, +\infty\right[$ est limite d'une suite $\left(r_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ de rationnels, et chacun des r_k admet un représentant de la forme $\dfrac{2m_k}{p_k}$ avec $\left(m_k, p_k\right) \in \mathbb{N}^{*2}$. Puisque $\alpha > 1$, on a aussi $r_k > 1$ c'est-à-dire $1 \leqslant p_k < 2m_k$, au moins à partir d'un certain rang k_0.

Ainsi, pour $k \geqslant k_0$, les calculs précédents donnent :

$$F\left(r_k\right) = 2p_k I\left(2m_k, p_k\right) = \frac{p_k \pi}{m_k \sin \dfrac{p_k \pi}{2m_k}} = \frac{2\pi}{r_k \sin \dfrac{\pi}{r_k}}.$$

Par continuité de F au point α, on en déduit :

$$F(\alpha) = \frac{2\pi}{\alpha \sin \dfrac{\pi}{\alpha}}.$$

2 La fonction Gamma : formule des compléments

Remarque. La fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ a été présentée dans l'exercice 19 de ce chapitre.

1) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

Préciser l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f_n et montrer que :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f_n(x) = \frac{n! n^x}{\prod_{p=0}^{n} (x+p)}.$$

2) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} f_n(x)$.

3) Montrer que pour un réel x convenable :

$$\frac{1}{x\,\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)} = \lim_{n \to +\infty} \prod_{p=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{p^2}\right).$$

4) Montrer que les polynômes :

$$P_p(X) = \left(1 + \frac{iX}{2p}\right)^{2p} - \left(1 - \frac{iX}{2p}\right)^{2p}$$

$$\text{et} \quad Q_p(X) = 2iX \prod_{k=1}^{p-1} \left(1 - \frac{X^2}{4p^2 \tan^2 \frac{k\pi}{2p}}\right)$$

sont égaux.

5) Justifier la formule des compléments :

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Solution

1) La fonction $\varphi_n : t \mapsto t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ est continue sur $]0, n]$ et au voisinage de 0, on a :

$$\varphi_n(t) \sim t^{x-1}.$$

Elle est donc intégrable sur $]0, n]$ si et seulement si $x > 0$. Puisqu'en outre elle est positive, $\int_0^n \varphi_n$ a un sens si et seulement si φ_n est intégrable sur $]0, x]$, et on en déduit $\mathcal{D} =]0, +\infty[$.
Par intégrations par parties itérées, on obtient :

$$f_n(x) = \frac{1}{x}\left[t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]_0^n + \frac{n}{x\cdot n}\int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{n}{x\cdot n}\int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\mathrm{d}t$$

$$f_n(x) = \frac{n}{x(x+1)n}\left[t^{x+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\right]_0^n + \frac{n(n-1)}{x(x+1)n^2}\int_0^n t^{x+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{n(n-1)}{x(x+1)n^2}\int_0^n t^{x+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2}\mathrm{d}t$$

$$\ldots$$

$$f_n(x) = \frac{n(n-1)\ldots 1}{x(x+1)\ldots(x+n-1)n^n}\int_0^n t^{x+n-1}\mathrm{d}t$$

$$f_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}\cdot\frac{n^{x+n}}{n^n}$$

soit :

$$f_n(x) = \frac{n!n^x}{\prod_{p=0}^{n}(x+p)} \tag{1}$$

2) Une bonne lecture de l'énoncé est utile : le résultat de la question 3) va se déduire de la formule (1) précédente et de $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$. En conséquence, cette limite doit être établie à partir de l'expression initiale de f_n, au moyen du théorème de convergence dominée.

Pour $x > 0$, introduisons les fonctions $g_{x,n}$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\begin{cases} g_{x,n}(t) = t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n & \text{si } 0 < t \leqslant n \\ g_{x,n}(t) = 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

Chaque $g_{x,n}$ est continue, intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n(x) = \int_0^{+\infty} g_{x,n}(t)\mathrm{d}t.$$

Dès que $n \geqslant t$, on a :

$$g_{x,n}(t) = t^{x-1}e^{n\,\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} = t^{x-1}e^{n\left(-\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty} g_{x,n}(t) = e^{-t}t^{x-1}.$$

Ainsi la suite $\left(g_{x,n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction g_x : $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (voir l'étude de la définition de la fonction Γ).

En remarquant que, par concavité de $\ln$, on a $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $|g_{x,n}(t)| = g_{x,n}(t) \leqslant g_x(t)$, le théorème de convergence dominée nous donne :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_{x,n}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g_x(t)\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t = \Gamma(x) \tag{2}$$

On a ainsi retrouvé la fonction Gamma étudiée dans l'exercice 19.

3) La fonction Γ étant définie sur $\mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x)$ et $\Gamma(1-x)$ ont un sens simultanément si et seulement si $0 < x < 1$.

D'après (1) et (2), on a pour tout $x \in \left]0,1\right[$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x\,\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\prod_{p=1}^{n}(x+p)\prod_{p=0}^{n}(1-x+p)}{n!\,n^x\,n!\,n^{1-x}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-x}{n}\cdot\frac{1}{(n!)^2}\prod_{p=1}^{n}(x+p)\prod_{p=1}^{n}(p-x) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\prod_{p=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{p^2}\right) \qquad (3)\end{aligned}$$

On peut donc aussi écrire :

$$\frac{1}{x\,\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)} = \prod_{p=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{p^2}\right).$$

Vraisemblablement, ce n'était pas fait dans cet énoncé parce que l'étude systématique des produits infinis n'est pas au programme de la classe.

4) Pour s'assurer de l'identé de deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, il suffit de comparer leurs racines et l'un de leurs coefficients.

On remarque que P_p et Q_p sont des polynômes de degré $2p-1$.

Il est clair que les racines de Q_p sont 0 et $\pm 2p\tan\dfrac{k\pi}{2p}$, $1 \leqslant k \leqslant p-1$, soit $2p-1$ racines réelles distinctes.

Par ailleurs, l'équation $P_p(x) = 0$ n'admet pas $-\dfrac{2p}{i}$ pour racine, elle s'écrit donc :

$$\left(\frac{1-\dfrac{ix}{2p}}{1+\dfrac{ix}{2p}}\right)^{2p} = 1.$$

En conséquence, on obtient :

$$\begin{aligned}P_p(x) = 0 &\iff \exists k \in [\![1-p,p]\!],\ 1-\frac{ix}{2p} = e^{i\frac{k\pi}{p}}\left(1+\frac{ix}{2p}\right) \\ &\iff \exists k \in [\![1-p,p]\!],\ \frac{ix}{2p}\left(1+e^{\frac{ik\pi}{p}}\right) = 1-e^{\frac{ik\pi}{p}}\end{aligned}$$

Lorsque k décrit $[\![1-p,p]\!]$ on obtient $e^{\frac{ik\pi}{p}} = -1$ si et seulement si $k = p$, d'où :

$$P_p(x) = 0 \iff k \in [\![1-p,p-1]\!],\ x = \frac{2p}{i}\cdot\frac{1-e^{\frac{ik\pi}{p}}}{1+e^{\frac{ik\pi}{p}}}$$

2) Déterminer les fonctions u réelles, de classe C^2, définies sur la demi-droite ouverte $]0, +\infty[$, telles que chaque fonction h, définie dans le plan $\mathbb{R}^2$ privé du point O ($\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$) par la relation ci-dessous, soit harmonique :

$$h(x, y) = u\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Poser si nécessaire : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3) Déterminer les fonctions v réelles, de classe C^2, définies sur la droite réelle $\mathbb{R}$, telles que chaque fonction k, définie dans le plan $\mathbb{R}^2$ privé de l'axe $y'Oy$ ($\mathbb{R}^2 \setminus y'Oy$) par la relation ci-dessous, soit harmonique :

$$k(x, y) = v\left(\frac{y}{x}\right).$$

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies dans tout le plan $\mathbb{R}^2$ par les relations suivantes :

$$u_n(x, y) = (-1)^n \frac{(x + iy)^n}{(2n)!}.$$

4) Soit K un ensemble fermé borné quelconque du plan $\mathbb{R}^2$; démontrer que la restriction $u_{n|K}$ de la fonction u_n au fermé K est le terme général d'une série de fonctions uniformément convergente.

En déduire que la série de fonctions de terme général u_n converge en tout point du plan et que sa somme, la fonction φ, définie par la relation suivante :

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x, y),$$

est continue dans le plan.

5) Démontrer que cette fonction φ est harmonique dans tout le plan $\mathbb{R}^2$.

Partie B.
Propriété de la moyenne

Soit f une fonction réelle harmonique définie dans le plan $\mathbb{R}^2$. Étant donné un point M_0 de coordonnées x_0 et y_0 et un réel ρ positif ou nul, soit F la fonction définie sur la demi-droite fermée $[0, +\infty[$ par la relation suivante :

$$F(\rho) = \int_0^{2\pi} f\left(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta\right) \mathrm{d}\theta.$$

6) Démontrer que la fonction F est définie et continue sur la demi-droite fermée $[0, \infty[$.

7) Démontrer que la fonction F est continûment dérivable. Préciser sa dérivée $F'(\rho)$.

8) Démontrer que le produit $\rho \cdot F'(\rho)$ est égal à la valeur d'une intégrale curviligne d'une forme différentielle $\alpha = A(x, y)\mathrm{d}x + B(x, y)\mathrm{d}y$ le long d'un arc orienté Γ :

$$\rho \cdot F'(\rho) = \int_\Gamma \left(A(x, y)\mathrm{d}x + B(x, y)\mathrm{d}y\right).$$

Préciser la forme différentielle α et l'arc orienté Γ.

9) Démontrer que la fonction F est une fonction constante ; préciser sa valeur.

4) K est un compact de $\mathbb{R}^2$ ce qui assure l'existence de $M = \sup_{(x,y)\in K} |x + iy|$ et on obtient :

$$\forall (x,y) \in K, |u_n(x,y)| \leq \frac{M^n}{(2n)!} \quad \text{donc} \quad \|u_n\|_\infty^K \leq \frac{M^n}{(2n)!}.$$

La série numérique $\sum_{n\geq 0} \frac{M^n}{(2n)!}$ étant convergente, la majoration précédente assure la convergence normale, donc uniforme, sur K de $\sum_{n\geq 0} u_{n|K}$.

Ceci étant vrai quel que soit le compact K de $\mathbb{R}^2$, on en déduit, dans un premier temps, que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^2$ donc que sa fonction somme φ est définie sur $\mathbb{R}^2$. Dans un deuxième temps, puisque les u_n sont continues sur $\mathbb{R}^2$, il vient que, quel que soit le compact K, la restriction $\varphi_{|K}$ est continue (sur K). Enfin, la continuité étant une propriété locale, et tout point de $\mathbb{R}^2$ admettant un voisinage compact, il en résulte que φ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

5) Il faut d'abord montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Avec pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y) = (-1)^n \frac{n(x+iy)^{n-1}}{(2n)!}, \qquad \frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y) = (-1)^n \frac{in(x+iy)^{n-1}}{(2n)!}$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,y) = (-1)^n \frac{n(n-1)(x+iy)^{n-2}}{(2n)!}, \qquad \frac{\partial^2 u_n}{\partial x\,\partial y}(x,y) = (-1)^n \frac{in(n-1)(x+iy)^{n-2}}{(2n)!}$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}(x,y) = (-1)^{n+1} \frac{n(n-1)(x+iy)^{n-2}}{(2n)!}.$$

On montre, comme dans le 4), la convergence normale sur tout compact K des séries de fonctions :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\partial u_n}{\partial x}, \sum_{n\geq 0} \frac{\partial u_n}{\partial y}, \sum_{n\geq 0} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \sum_{n\geq 0} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x\,\partial y} \text{ et } \sum_{n\geq 0} \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}.$$

Les théorèmes généraux donnent alors la classe $\mathcal{C}^2$ de φ sur $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,y) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n(n-1)(x+iy)^{n-2}}{(2n)!}$$

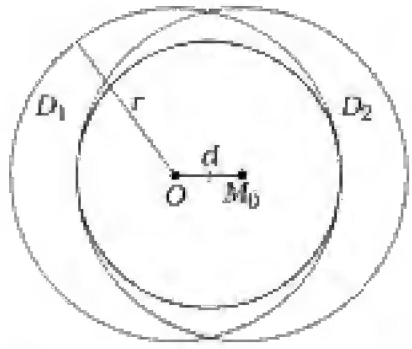
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}(x,y) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n(n-1)(x+iy)^{n-2}}{(2n)!}$$

donc :

$$\Delta\,\varphi\,(x,y) = 0.$$

Partie C. Fonctions harmoniques bornées dans le plan

11)



Le disque Δ de centre $\dfrac{O+M_0}{2}$ et de rayon $r-\dfrac{d}{2}$ est tangent intérieurement à $\mathcal{D}_1$ et à $\mathcal{D}_2$ donc $\Delta\subset\mathcal{D}_1$, $\Delta\subset\mathcal{D}_2$ et $\Delta\subset\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2$. On en déduit, pour les aires :

$$\mathcal{A}(\Delta)\leqslant\mathcal{A}\left(\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2\right)$$

et donc puisque $\mathcal{A}(L_2)=\mathcal{A}(\mathcal{D}_2)-\mathcal{A}(\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2)$, il vient $\mathcal{A}(L_2)\leqslant\mathcal{A}(\mathcal{D}_2)-\mathcal{A}(\Delta)$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{A}(L_2)\leqslant\pi r^2-\pi\left(r-\frac{d}{2}\right)^2=\pi rd-\pi\frac{d^2}{4}\leqslant\pi rd.$$

12) D'après la question 10), on a :

$$f(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi r^2}\iint_{\mathcal{D}_2}f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\quad\text{et}\quad f(0,0)=\frac{1}{\pi r^2}\iint_{\mathcal{D}_1}f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

donc, en posant $L_1=\mathcal{D}_1\setminus\left(\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2\right)$:

$$f(x_0,y_0)-f(0,0)=\frac{1}{\pi r^2}\iint_{L_2}f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\frac{1}{\pi r^2}\int_{L_1}f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Avec $|f(x,y)|\leqslant C$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\displaystyle\iint_{L_1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{L_2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant\pi rd$, on en déduit :

$$\left|f(x_0,y_0)-f(0,0)\right|\leqslant\frac{2Cd}{r}$$

$M_0=(x_0,y_0)$ étant fixé, ce résultat est valable pour tout $r\in\mathbb{R}_+^*$ donc :

$$\left|f(x_0,y_0)-f(0,0)\right|\leqslant\lim_{r\to+\infty}\frac{2Cd}{r}$$

c'est-à-dire : $\quad f(x_0,y_0)=f(0,0).$

M_0 étant quelconque, on en déduit que f est constante sur $\mathbb{R}^2$.

4 La fonction Θ de Jacobi La formule sommatoire de Poisson

Étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres réels ou complexes, on dit que la série :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$$

est absolument convergente si les *deux* séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |u_{-n}|$$

convergent ; on pose alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n = u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + u_{-n}).$$

Partie A. Étude d'une fonction définie par une série

Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction Θ définie sur $]0,+\infty[$ par la relation :

$$\Theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t}.$$

1) *Régularité et variations*

a) Établir la convergence absolue de la série précédente.

b) Montrer que Θ est continue sur $]0,+\infty[$.

c) Montrer que Θ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

d) Étudier la monotonie et la concavité de Θ.

2) *Étude asymptotique au voisinage de $+\infty$*

Pour tout entier $k > 0$ et tout nombre réel $t > 0$, on pose :

$$R_k(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t}.$$

a) Prouver que :

$$0 \leqslant R_k(t) \leqslant \frac{e^{-\pi k^2 t}}{1 - e^{-2\pi k t}}.$$

b) En déduire que Θ admet une limite en $+\infty$ et déterminer cette limite.

c) Établir que, pour tout $t \geqslant 1$, $0 \leqslant \Theta(t) - \left[1 + 2e^{-\pi t}\right] \leqslant 10^{-5}$.

3) *Calcul d'une intégrale auxiliaire*

Étant donné $t \in \left]0, +\infty\right[$, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = e^{-\pi t x^2}.$$

Pour tout nombre réel u, on pose :

$$\widehat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi u x} \mathrm{d}x. \qquad (1)$$

a) Établir l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto f(x)e^{-2i\pi u x}$ et calculer $\widehat{f}(0)$. On admettra que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y = \sqrt{\pi}.$$

b) Montrer que $\widehat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c) Prouver que $\widehat{f}$ satisfait à l'équation différentielle : $y'(u) = -2\pi \frac{u}{t} y(u)$.

d) En déduire la valeur de $\widehat{f}(u)$.

4) *Équation fonctionnelle*

Pour tout nombre réel x, on pose : $F(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(x+p)$. (2)

a) Établir la convergence absolue de cette série et montrer que F est 1-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F est développable en série de Fourier.

c) On écrit ce développement sous la forme : $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi n x}$. (3)

Montrer que, pour tout entier n, $c_n = \widehat{f}(n)$. En déduire la valeur de c_n.

d) Prouver finalement que, pour tout $t > 0$: $\Theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \Theta\left(\frac{1}{t}\right)$.

5) *Application à l'étude de la fonction theta*

a) Déterminer la limite de $\Theta(t) - \frac{1}{\sqrt{t}}$ lorsque $t \to 0^+$.

b) Calculer $\Theta'(1)$ en fonction de $\Theta(1)$ et déterminer des valeurs approchées de ces nombres à la précision 10^{-5}.

c) Construire la courbe représentative de la fonction Θ dans un plan rapporté à un repère orthonormal.

Partie B.
Étude d'une formule sommatoire

On se propose de généraliser les résultats obtenus au A.4) au cas où f est une fonction à valeurs réelles ou complexes, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, telle que f, f', f'' soient intégrables sur $\mathbb{R}$. (*)

a) Expliciter la relation (3) ; en déduire, pour $x \in [0, 1[$, la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{n^2 + a^2}.$$

b) Calculer enfin, pour $x \in [0, 1[$, la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{n^2}.$$

Solution

Partie A. Étude d'une fonction définie par une série

$$\Theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t}, \quad t > 0$$

1) On posera $u_n : t \mapsto e^{-\pi n^2 t}$.

a) Pour tout $t > 0$ on a, lorsque $n \to +\infty$:

$$u_n(t) = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad u_{-n}(t) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ce qui assure la convergence des séries $\sum u_n(t)$ et $\sum u_{-n}(t)$.

b) Quel que soit $a > 0$, les deux séries :

$$\sum u_n \quad \text{et} \quad \sum u_{-n}$$

convergent normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$ car : $\forall t \geqslant a, 0 < u_n(t) \leqslant u_n(a)$.
Leurs sommes sont donc continues sur $]0, +\infty[$ et il en est de même pour Θ.

c) Quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n^{(p)}(t) = (-1)^p \pi^p n^{2p} e^{-\pi n^2 t}.$$

Donc quel que soit $a > 0$, les deux séries :

$$\sum u_n^{(p)} \quad \text{et} \quad \sum u_{-n}^{(p)}$$

convergent normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$ car :

$$\forall t \geqslant a, 0 < \left|u_n^{(p)}(t)\right| \leqslant \left|u_n^{(p)}(a)\right| \quad \text{et} \quad u_n^{(p)}(a) = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ quand } n \to +\infty \text{ ou } n \to -\infty.$$

On en déduit, par récurrence, que les deux sommes sont, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, de classe C^n sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) D'après c) :

$$\Theta'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -\pi n^2 e^{-\pi n^2 t} < 0$$

donc Θ est strictement décroissante.

De même :

$$\Theta''(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \pi^2 n^4 e^{-\pi n^2 t} > 0$$

donc Θ est convexe.

2) a) $R_k(t) = e^{-\pi k^2 t} \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-\pi[(p+k)^2-k^2]t} \leqslant e^{-\pi k^2 t} \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2\pi pkt}$ donc $0 \leqslant R_k(t) \leqslant \dfrac{e^{-\pi k^2 t}}{1-e^{-2\pi kt}}$.

b) $\Theta(t) = 1 + 2R_1(t)$ et $\lim_{+\infty} R_1(t) = 0$ donc $\lim_{+\infty} \Theta(t) = 1$.

c) $\Theta(t) = 1 + 2e^{-\pi t} + 2R_2(t)$ donc $0 \leqslant \Theta(t) - \left(1 + 2e^{-\pi t}\right) \leqslant \dfrac{2e^{-4\pi t}}{1-e^{-4\pi t}}$.

La fonction $u \mapsto \dfrac{2u}{1-u}$ est croissante sur $]0,1[$ donc $t \mapsto \dfrac{2e^{-4\pi t}}{1-e^{-4\pi t}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ et :

$$\forall t \in [1,+\infty[, 0 \leqslant \Theta(t) - \left(1+2e^{-\pi t}\right) \leqslant \frac{2e^{-4\pi}}{1-e^{-4\pi}}.$$

Une calculatrice fournit $\dfrac{2e^{-4\pi}}{1-e^{-4\pi}} < 7 \cdot 10^{-6}$. On a donc bien :

$$\forall t \geqslant 1, 0 \leqslant \Theta(t) - \left(1+2e^{-\pi t}\right) \leqslant 10^{-5}.$$

3) $t > 0$. $\quad f(x) = e^{-\pi t x^2}$, $\widehat{f}(u) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2i\pi ux} \mathrm{d}x$ (1)

a) Avec $g(x) = f(x)e^{-2i\pi ux}$, g est continue sur $\mathbb{R}$ et $|g(x)| = f(x)$ donc :

$$g(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ quand } x \to +\infty \text{ et quand } x \to -\infty$$

ce qui assure l'intégrabilité de g sur $\mathbb{R}$.
Le changement de variable défini par $y = x\sqrt{\pi t}$ donne :

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

b) Posons $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (u,x) \mapsto f(x)e^{-2i\pi ux}$. Il est clair que :

(1) $\quad \forall u \in \mathbb{R}, x \mapsto f(x)e^{-2i\pi ux}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$;

(2) $\quad \dfrac{\partial h}{\partial u} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (u,x) \mapsto -2i\pi x f(x)e^{-2i\pi ux}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (en fait, h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$) ;

(3) $\quad \forall (u,x) \in \mathbb{R}^2, \left|\dfrac{\partial h}{\partial u}(u,x)\right| \leqslant 2\pi |x|\, f(x)$, et la fonction $x \mapsto 2\pi|x|\, f(x)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ (car $x f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ quand $x \to +\infty$ et quand $x \to -\infty$).

Donc, d'après le théorème de Leibniz, $\widehat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}'(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial u}(u,x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} 2i\pi x e^{-\pi(tx^2 - 2i\pi ux)}\mathrm{d}x$$

c) Une intégration par parties validée par le fait que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\pi t x^2}}{t} \cdot e^{-2i\pi ux} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-\pi t x^2}}{t} \cdot e^{-2i\pi ux} = 0$$

donne :

$$\widehat{f}'(u) = t\left[\frac{e^{-\pi t x^2}}{t}\cdot e^{-2i\pi ux}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{2\pi u}{t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2}\cdot e^{-2i\pi ux}\mathrm{d}x$$

soit :

$$\widehat{f}'(u) = -\frac{2\pi u}{t}\widehat{f}(u).$$

d) L'équation précédente donne $\widehat{f}(u) = \widehat{f}(0)e^{-\frac{\pi u^2}{t}}$ soit $\widehat{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{\pi u^2}{t}}$.

4) a) $f(x+p) = e^{-\pi t(x+p)^2}$. Nous posons $f_p\ :\ x \mapsto f(x+p)\ \ (p \in \mathbb{Z})$.

Soit $A > 0$, pour $|p| > A$ on obtient $\forall x \in \left[-A, A\right], |x+p| \geqslant |p| - |x| \geqslant |p| - A > 0$ donc :

$$(x+p)^2 \geqslant (|p| - A)^2 \ \text{ et } \ f(x+p) \leqslant e^{-\pi t(|p|-A)^2}.$$

La convergence normale sur $\left[-A, A\right]$ des deux séries de fonctions $\sum_{p\geqslant 0} f_p$ et $\sum_{p\geqslant 1} f_{-p}$ en résulte.

A étant quelconque, on en déduit :

1) la convergence absolue de $\sum_{p\geqslant 0} f(x+p)$ et de $\sum_{p\geqslant 0} f(x-p)$ en tout point $x \in \mathbb{R}$;

2) la continuité sur $\mathbb{R}$ des deux sommes et donc celle de F.

En revenant à la définition :

$$F(x+1) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(x+1+p) = \sum_{p=1}^{+\infty} f(x+1-p) + \sum_{p=0}^{+\infty} f(x+1+p).$$

Dans la première somme, on pose $q = p - 1$ et dans la deuxième $q = p + 1$, il vient :

$$F(x+1) = \sum_{q=0}^{+\infty} f(x-q) + \sum_{q=1}^{+\infty} f(x+q).$$

Donc, de nouveau avec la définition, $F(x+1) = F(x)$.

b) On a pour tout $p \in \mathbb{Z}, f_p'(x) = f'(x+p) = -2\pi t(x+p)e^{-\pi t(x+p)^2}$.

Donc en procédant comme en a), pour tout $A > 0$, et tout p tel que $|p| > A$, on obtient :

$$\forall x \in \left[-A, A\right], \left|f'(x+p)\right| \leqslant 2\pi t\left(|p| + A\right)e^{-\pi t(|p|-A)}.$$

En remarquant que :

$$2\pi t\left(|p| + A\right)e^{-\pi t(|p|-A)} = o\left(\frac{1}{p^2}\right) \text{ quand } p \to +\infty \text{ ou quand } p \to -\infty,$$

la majoration précédente montre la convergence normale donc uniforme sur $\left[-A, A\right]$ des deux séries :

$$\sum_{p\geqslant 0} f_p' \quad \text{et} \quad \sum_{p\geqslant 0} f_{-p}'.$$

Puisque l'on sait déjà que ces deux séries convergent simplement sur $\mathbb{R}$, compte tenu du fait que les f_p sont évidemment de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on en déduit que les fonctions sommes :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} f_p \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{+\infty} f_{-p}$$

sont de classe C^1 sur $\left[-A, A\right]$ et donc que F est de classe C^1 sur $\left[-A, A\right]$.

Ceci étant vrai quel que soit $A > 0$, il en résulte finalement que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Sachant de plus que F est 1-périodique, le théorème de Dirichlet montre que la série de Fourier de

F converge sur $\mathbb{R}$ et admet pour somme F. Dans ces conditions, on sait aussi que la série de Fourier de F converge normalement sur $\mathbb{R}$.

c) Avec $c_n = \int_0^1 F(x)e^{-2i\pi nx}\mathrm{d}x$, il vient $c_n = \int_0^1 \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(x+p)e^{-2i\pi nx}\mathrm{d}x$.

Pour tout $p \in \mathbb{Z}^*$ et tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\left|f(x+p)e^{-2i\pi nx}\right| = |f(x+p)| = e^{-\pi t(x+p)^2} \leqslant e^{-\pi t(|p|-1)^2}.$$

On en déduit la convergence normale sur $[0,1]$ des deux séries de fonctions de terme généraux :

$$x \mapsto f(x+p)e^{-2i\pi nx} \quad \text{et} \quad x \mapsto f(x-p)e^{-2i\pi nx}$$

et on a de ce fait :

$$c_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(x+p)e^{-2i\pi nx}\mathrm{d}x.$$

Le changement de variable défini par $y = x + p$ donne :

$$\int_0^1 f(x+p)e^{-2i\pi nx}\mathrm{d}x = \int_p^{p+1} f(y)e^{-2i\pi ny}\,\mathrm{d}y$$

donc :

$$c_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int_p^{p+1} f(y)e^{-2i\pi ny}\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-2i\pi ny}\,\mathrm{d}y \quad \text{soit} \quad c_n = \widehat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\pi\frac{n^2}{t}}.$$

d) $\Theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = F(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n$ donc :

$$\Theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\frac{n^2}{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}\Theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

5) a) $\Theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\frac{n^2}{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(1 + 2R_1\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ (notations du A.2)).

On a donc :

$$\Theta(t) - \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{t}}R_1\left(\frac{1}{t}\right),$$

or, d'après A.2)a) :

$$0 \leqslant R_1\left(\frac{1}{t}\right) \leqslant \frac{e^{-\frac{\pi}{t}}}{1 - e^{-\frac{2\pi}{t}}}.$$

Sachant que $\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{\pi}{t}} = 0$, il vient alors :

$$\lim_{t\to 0^+} \Theta(t) - \frac{1}{\sqrt{t}} = 0.$$

b) D'après le A.4)d), on a :

$$\Theta'(t) = -\frac{1}{2t\sqrt{t}}\Theta\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t^2\sqrt{t}}\Theta'\left(\frac{1}{t}\right).$$

Donc, pour $t = 1$:

$$\Theta'(1) = -\frac{1}{4}\Theta(1).$$

Valeurs approchées

On a $\Theta(1) = 1 + 2e^{-\pi} + 2R_2(1)$, et d'après A.2)a) :

$$0 \leqslant R_2(1) \leqslant \frac{e^{-4\pi}}{1 - e^{-4\pi}},$$

d'où, avec une calculatrice, $0 \leqslant R_2(1) \leqslant 3,5 \cdot 10^{-6}$. On en déduit :

$$1 + 2e^{-\pi} \leqslant \Theta(1) \leqslant 1 + 2e^{-\pi} + 7 \cdot 10^{-6}.$$

Le calcul donne :

$$1,086\,427 \leqslant 1 + 2e^{-\pi} \leqslant 1,086\,428,$$

il en résulte :

$$1,086\,427 \leqslant \Theta(1) \leqslant 1,086\,435.$$

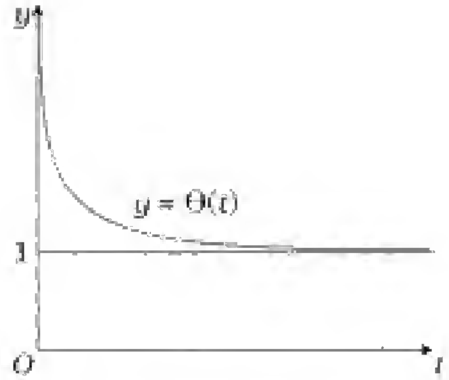
On a donc :

$$\Theta(1) \# 1,086\,43 \text{ à moins de } 10^{-5} \text{ près.}$$

D'où enfin :

$$\Theta'(1) \# -0,271\,61 \text{ à moins de } 10^{-5} \text{ près.}$$

c) *Graphe*



Partie B.
Formule sommatoire

6) a) *$\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

La fonction $h : (u, x) \mapsto f(x)e^{-2i\pi ux}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\forall (x, u) \in \mathbb{R}^2, \quad |h(u, x)| = |f(x)|.$$

Puisque f est supposée intégrable sur $\mathbb{R}$, la domination précédente permet de conclure à la continuité sur $\mathbb{R}$ de :

$$\widehat{f} : u \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} h(u, x)\mathrm{d}x.$$

$\widehat{f}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

La même domination donne :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \left|\widehat{f}(u)\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

c'est-à-dire :

$$\left|\widehat{f}(u)\right| \leqslant A \quad \text{où on a posé } A = \int_{\mathbb{R}} |f|$$

(c'est bien une constante). Ainsi $\widehat{f}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et la majoration précédente donne :

$$N_\infty(\widehat{f}) \leqslant N_1(f).$$

b) Puisque f' est intégrable sur $\mathbb{R}$, la formule :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(u)\,\mathrm{d}u$$

montre que f admet une limite réelle en $+\infty$ et en $-\infty$. Comme f est elle-même intégrable sur $\mathbb{R}$, ces deux limites sont nulles.

En conséquence, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)e^{-2i\pi ux} = \lim_{x\to-\infty} f(x)e^{-2i\pi ux} = 0$$

ce qui valide l'intégration par parties :

$$\widehat{f'}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-2i\pi ux}\mathrm{d}x = \left[f(x)e^{-2i\pi ux}\right]_{-\infty}^{+\infty} + 2i\pi u\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi ux}\mathrm{d}x$$

soit :

$$\widehat{f'}(u) = 2i\pi u\widehat{f}(u).$$

En appliquant ce résultat à f' (qui est encore de classe C^1) et de dérivée f'' intégrable sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$\widehat{f''}(u) = 2i\pi u\widehat{f'}(u)$$

d'où finalement :

$$\widehat{f''}(u) = -4\pi^2 u^2\widehat{f}(u).$$

Absolue convergence de $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(n)$

D'après le a), on a :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \left|\widehat{f}(n)\right| \leqslant \frac{N_\infty(\widehat{f''})}{4\pi^2 n^2} \leqslant \frac{N_1(f'')}{4\pi^2 n^2}.$$

Cette majoration assure l'absolue convergence des deux séries :

$$\sum_{n\geqslant 0}\widehat{f}(n) \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1}\widehat{f}(-n).$$

7) a) C'est une question de cours !

Intégrons par parties :

$$\int_{x+p}^{x+p+1} f(s)\,\mathrm{d}s = \left[-(x+p+1-s)f(s)\right]_{x+p}^{x+p+1} + \int_{x+p}^{x+p+1}(x+p+1-s)f'(s)\,\mathrm{d}s$$

donc :

$$f(x+p) - \int_{x+p}^{x+p+1} f(s)\,\mathrm{d}s = -\int_{x+p}^{x+p+1}(x+p+1-s)f'(s)\,\mathrm{d}s$$

et l'inégalité annoncée en résulte.

Absolue convergence de $\displaystyle\sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(x+p)$

La majoration précédente donne :

$$\forall n \geqslant 1, \sum_{p=1}^{n}|f(x+p)| \leqslant \sum_{p=1}^{n}\int_{x+p}^{x+p+1}|f(s)|\,\mathrm{d}s + \sum_{p=1}^{n}\int_{x+p}^{x+p+1}|f'(s)|\,\mathrm{d}s$$

c) Le résultat du a) s'applique à f' qui est encore de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\left|f'(x+p)\right| \leqslant \int_{x+p}^{x+p+1} \left|f'\right| + \left|f''\right|$$

et puisque f' et f'' sont intégrables sur $\mathbb{R}$, on obtient comme en b) que les séries :

$$\sum_{p\geqslant 0} f'(x+p) \quad \text{et} \quad \sum_{p\geqslant 0} f'(x-p)$$

convergent uniformément sur le segment $[0,1]$.

Il en résulte que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et donc sur $\mathbb{R}$ du fait de la 1-périodicité de :

$$x \mapsto \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f'(x+p),$$

avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f'(x+p).$$

8) a) Puisque F est 1-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on a d'après le théorème de Dirichlet :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

avec :

$$c_n = \int_0^1 F(x)e^{-2i\pi nx}\mathrm{d}x \quad \text{soit} \quad c_n = \int_0^1 \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(x+p)e^{-2i\pi nx}\mathrm{d}x$$

Les séries :

$$\sum_{p\geqslant 0} f(x+p) \quad \text{et} \quad \sum_{p\geqslant 0} f(x-p)$$

étant uniformément convergentes sur le segment $[0,1]$ et, puisque :

$$\left|\sum_{p=n}^{+\infty} f(x+\varepsilon p)e^{-2i\pi nx}\right| = \left|\sum_{p=n}^{+\infty} f(x+\varepsilon p)\right| \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

il en est encore de même pour les deux séries :

$$\sum_{p\geqslant n} f(x+\varepsilon p)e^{-2i\pi nx}.$$

On peut alors reprendre le calcul de c_n :

$$c_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(x+p)e^{-2i\pi nx}\mathrm{d}x$$

et on termine comme en A.4)c) :

$$c_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int_p^{p+1} f(y)e^{-2i\pi ny}\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-2i\pi ny}\,\mathrm{d}y = \widehat{f}(n)$$

Ainsi le développement en série de Fourier de F donne la formule annoncée.

b) ▪ f' et f'' sont maintenant continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et admettent en 0 des limites à droite et à gauche.

▪ Puisque f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, l'intégration par parties qui fournit l'inégalité du B.2)a) reste valide ainsi que cette inégalité. On a donc toujours l'absolue convergence de :

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(x+p) \text{ quel que soit } x \text{ réel.}$$

De même, il n'y a rien de changé pour le B.2)b) qui repose aussi sur cette inégalité.

- Pour l'extension au B.2)c), limitons-nous à $x \in [0,1]$. D'après les hypothèses, l'inégalité du B.2)a) s'applique à f' c'est-à-dire que l'on a :

$$\left| f'(x+p) - \int_{x+p}^{x+p+1} f'(s)\,\mathrm{d}s \right| \leqslant \int_{x+p}^{x+p+1} \left| f''(s) \right| \mathrm{d}s$$

dès que $[x+p, x+p+1] \subset [0, +\infty[$ ou $[x+p, x+p+1] \subset]-\infty, 0]$, ce qui, lorsque $x \in [0,1]$, est le cas pour tout $p \geqslant 0$ et tout $p \leqslant -2$.

On établit alors, comme en B.2)c), que :

$$\sum_{p\geqslant 0} f'(x+p) \quad \text{et} \quad \sum_{p\leqslant -2} f'(x+p)$$

sont uniformément convergentes sur $[0,1]$. Finalement, F est de classe C^1 sur $[0,1]$ et elle est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de Dirichlet s'applique et la formule (3) reste valable.

9) $f(x) = e^{-2\pi a|x|}$ $\quad a > 0$. Cette fonction satisfait aux hypothèses du 8)b).

a)

$$\widehat{f}(n) = \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi a x} e^{-2i\pi n x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} e^{-2\pi a x} e^{-2i\pi n x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi(a - in)} + \frac{1}{2\pi(a + in)} = \frac{a}{\pi\left(a^2 + n^2\right)}$$

$$F(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi a|x+p|} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a e^{2i\pi n x}}{\pi\left(a^2+n^2\right)}$$

en prenant les parties réelles :

$$F(x) = \frac{a}{\pi}\left(\frac{1}{a^2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{n^2 + a^2}\right).$$

- Calcul de $F(x)$. F étant 1-périodique on suppose $0 \leqslant x \leqslant 1$:

$$F(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2\pi a(x+p)} + \sum_{p=1}^{+\infty} e^{-2\pi a(p-x)}$$

$$= e^{-2\pi a x}\frac{1}{1 - e^{-2\pi a}} + e^{2\pi a x}\frac{e^{-2\pi a}}{1 - e^{-2\pi a}}$$

$$= \frac{e^{2\pi a(x-1)} + e^{-2\pi a x}}{1 - e^{-2\pi a}}$$

D'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \cdot \frac{e^{2\pi a(x-1)} + e^{-2\pi a x}}{1 - e^{-2\pi a}} - \frac{1}{2a^2}.$$

b) Par convergence normale de la série précédente lorsque $a \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{n^2} = \lim_{a\to 0}\left(\frac{\pi}{2a}\frac{e^{2\pi a(1-x)} + e^{2\pi a x}}{e^{2\pi a} - 1} - \frac{1}{2a^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}\left(1 - 6x + 6x^2\right)$$

Solution

Partie A

1) On suppose $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors $\varphi : t \mapsto P(t)e^{-\alpha t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Au voisinage de $+\infty$, on a $P(t) = O(t^n)$ ($n = \deg P$) donc, avec $\alpha > 0$, il vient :

$$\lim_{t \to +\infty} t^2 \varphi(t) = 0 \quad \text{soit} \quad \varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

La règle de Riemann donne donc l'intégrabilité de φ sur $\mathbb{R}_+$ et a fortiori sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) a) Il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $|f(t)| \leqslant M$ et pour $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors, $\varphi : t \mapsto f(t)e^{-\alpha t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, |\varphi(t)| \leqslant Me^{-\alpha t}$$

donc le critère de domination donne son intégrabilité sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Encore le critère de domination avec $\left|f(t)e^{-\alpha t}\right| \leqslant |f(t)|$.

c) Une primitive de f s'écrit :

$$F : t \mapsto \lambda + \int_1^t f(u)\,\mathrm{d}u.$$

C'est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, elle admet des limites réelles en $+\infty$ et en 0, elle est donc bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ et le a) donne $F \in E$.

3) Il est clair que E est non vide car $0 \in E$.

Pour $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, sachant que l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ est un espace vectoriel, on obtient que :

$$t \mapsto \left(\lambda f(t) + g(t)\right)e^{-\alpha t}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\lambda f + g \in E$. Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

4) Pour tout $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto t^n e^{-\frac{\alpha}{2}t}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$: il existe $M > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, 0 < t^n e^{-\frac{\alpha}{2}t} \leqslant M.$$

Puisque f appartient à E, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-\frac{\alpha}{2}t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc en écrivant :

$$\left|t^n f(t)e^{-\alpha t}\right| = \left|t^n e^{-\frac{\alpha}{2}t}\right| \left|f(t)e^{-\frac{\alpha}{2}t}\right| \leqslant M\left|f(t)e^{-\frac{\alpha}{2}t}\right|$$

le critère de domination donne l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \mapsto t^n f(t)e^{-\alpha t}$.

5) La fonction $\Phi : (x, t) \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $a > 0$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [a, +\infty[, \left|f(t)e^{-xt}\right| \leqslant |f(t)|\, e^{-at}$$

et par définition de E, $t \mapsto |f(t)|\, e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc le théorème de continuité sous le signe $\int$, avec hypothèse de domination locale, donne que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

6) La fonction Φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n} : (x, t) \mapsto (-t)^n f(t) e^{-xt}$$

donc, d'après 4), quel que soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, les fonctions :

$$t \mapsto \Phi(x, t) \quad \text{et} \quad t \mapsto \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n}(x, t),\ n \in \mathbb{N}^*,$$

sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$.

En remarquant, de plus, que pour tout $a > 0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [a, +\infty[, \left| \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n}(x, t) \right| \leqslant t^n |f(t)| e^{-at},$$

avec $t \mapsto t^n |f(t)| e^{-at}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, une application itérée du théorème de dérivation sous le signe $\int$, avec hypothèse de domination locale, donne que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{L}(f)^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n}(x, t) \mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-xt} \mathrm{d}t.$$

7) Considérons la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \varphi_n(t) = |f(t)| e^{-nt}$$

- les φ_n sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$,
- la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction nulle,
- d'autre part, il est clair que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|\varphi_n(t)| \leqslant \varphi_1(t)$,
- donc, puisque φ_1 est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de convergence dominée donne :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \varphi_n = \int_0^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} \varphi_n = 0.$$

Pour tout $x \in [1, +\infty[$, en posant $n_x = E(x)$, on a $n_x \geqslant 1$ et :

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi_{n_x}.$$

Or ce qui précède donne $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} \varphi_{n_x} = 0$, on en déduit $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} \mathrm{d}t = 0$.

8) a) Pour tout $a > 0$, on a $h(x) = h(a) + \displaystyle\int_a^x h'(t) \mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors l'intégrabilité de h' sur $[a, +\infty[$ assure l'existence de :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x h'(t) \mathrm{d}t$$

et donc de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} h(x)$ (limites réelles bien entendu).

Remarquons que h étant continue en 0 et h' intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, en faisant tendre a vers 0, on obtient :

$$h(x) = h(0) + \int_0^x h'(t) \mathrm{d}t.$$

b) L'existence de $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} h(t)$ donne $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} h(t) e^{-xt} = 0$ et avec une intégration par parties, il vient :

$$\mathcal{L}(h')(x) = \int_0^{+\infty} h'(t) e^{-xt} \mathrm{d}t = \left[h(t) e^{-xt} \right]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} h(t) e^{-xt} \mathrm{d}t$$

puis on observe que :

$$\Psi \ : \ u \mapsto \frac{1 - \cos u}{u^2}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 et telle que $0 \leqslant \Psi(u) \leqslant \frac{2}{u^2}$) pour en conclure que :

$$\lim_{t \to +\infty} h(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{u^2} \,\mathrm{d}u.$$

Dans ces conditions, la formule du 8)b) donne avec $h' = g$ et $h(0) = 0$:

$$\mathcal{L}(g)(x) = x\mathcal{L}(h)(x) \quad \text{d'où} \quad \mathcal{L}(h)(x) = \frac{1}{x}\,\text{Arctan}\,\frac{1}{x}.$$

11) $f(0) = 0$ donne $f(T) = 0$ donc $g(0) = g(T) = 0$ et g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

On a ainsi affaire à deux fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}_+$ donc éléments de E d'après 2)a).

Calculons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)(x) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^T f(u + kT)e^{-x(u+kT)}\,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-xkT} \int_0^T g(u)e^{-xu}\,\mathrm{d}u \\
\mathcal{L}(f)(x) &= \int_0^T g(u)e^{-xu}\,\mathrm{d}u \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-xkT}
\end{aligned}$$

> C'est une simple factorisation et non pas une permutation $\sum \leftrightarrow \int$.

d'où :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \frac{\displaystyle\int_0^T g(u)e^{-xu}\,\mathrm{d}u}{1 - e^{-xT}}$$

(on a reconnu une série géométrique), soit encore :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \frac{\mathcal{L}(g)(x)}{1 - e^{-xT}}.$$

12) Soit $f \ : \ t \mapsto |\sin \pi t|$.

f vérifie les hypothèses du 11) avec $T = 1$ donc :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \frac{\mathcal{L}(g)(x)}{1 - e^{-x}} \quad \text{où} \quad \mathcal{L}(g)(x) = \int_0^1 e^{-xt} \sin \pi t \,\mathrm{d}t$$

Le même calcul qu'en 10)a) donne :

$$\mathcal{L}(g)(x) = \text{Im} \int_0^1 e^{(-x+i\pi)t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi\left(1 + e^{-x}\right)}{x^2 + \pi^2} \quad \text{donc} \quad \mathcal{L}(f)(x) = \frac{\pi\,\text{ch}\,\frac{x}{2}}{\left(x^2 + \pi^2\right)\text{sh}\,\frac{x}{2}}.$$

13) Pour $c > \dfrac{1}{R}$ on a $\dfrac{1}{c} < R$ donc $\sum \dfrac{a_n}{c^n}$ est absolument convergente.

En posant $M = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_n|}{c_n}$ on a évidemment :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{|a_n|}{c_n} \leqslant M \quad \text{donc} \quad |a_n| \leqslant M \cdot c^n.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\frac{a_n x^n}{n!}\right| \leqslant M \frac{|cx|^n}{n!}$$

et puisque $\dfrac{|cx|^n}{n!}$ est, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, le terme général d'une série convergente, il en est de même pour $\left|\dfrac{a_n x^n}{n!}\right|$. Le rayon de convergence de $\sum \dfrac{a_n x^n}{n!}$ est donc $+\infty$.

14) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence infini :

$$t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc $f\ :\ t \mapsto e^{-ct} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Puisque $c > \dfrac{1}{R}$, considérons un réel c' tel que $c > c' > \dfrac{1}{R}$.

D'après 13), il existe $M' \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant M' \cdot c'^n$ et on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!}\right| \leqslant M' \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(c't)^n}{n!} = M' e^{c't} \quad \text{donc} \quad |f(t)| \leqslant M' e^{-(c-c')t}.$$

La fonction $t \mapsto e^{-(c-c')t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $c - c' > 0$, donc la majoration précédente prouve l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}_+$.

Posons :

$$u_n(t) = \frac{a_n}{n!} t^n e^{-ct}.$$

La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et sa fonction somme f est continue sur $\mathbb{R}_+$. $\hfill (i)$

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car :

$$\lim_{t \to +\infty} t^2 u_n(t) = 0. \tag{ii}$$

Considérons alors la série de terme général :

$$v_n = \int_0^{+\infty} |u_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{|a_n|}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-ct} \mathrm{d}t.$$

Le changement de variable défini par $x = ct$ donne :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-ct} \mathrm{d}t = \frac{1}{c^{n+1}} \Gamma(n+1) = \frac{n!}{c^{n+1}} \quad \text{donc} \quad v_n = \frac{|a_n|}{c^{n+1}}.$$

> Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$ donc $\Gamma(1) = 1$.
>
> D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une intégration par parties donne $\Gamma(n+1) = n\ \Gamma(n)$ et on obtient, par récurrence, $\Gamma(n+1) = n!$.

Puisque $\frac{1}{c} < R$, la série de terme général :

$$v_n = \int_0^{+\infty} |u_n| \text{ est convergente.} \qquad (iii)$$

Alors, avec $(i), (ii), (iii)$, le théorème de convergence dominée pour les séries donne que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ (ce que l'on a déjà prouvé) mais aussi que :

$$\int_0^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^{+\infty} e^{-ct} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-ct} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{c^{n+1}}$$

15) Puisque $(x, t) \to \cos\left(\sqrt{x}\cos t\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, d'après le théorème de continuité sous le signe $\int$ (intégration sur un segment) donne que :

$$J \ : \ x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\sqrt{x}\cos t\right) \mathrm{d}t \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.$$

D'autre part, il est clair que $\forall x \in \mathbb{R}_+, |J(x)| \leq \frac{\pi}{2}$ et J est élément de E d'après 2)a).

Le développement en série entière de cos donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall t \in \mathbb{R}, \cos\left(\sqrt{x}\cos t\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n \cos^{2n} t}{(2n)!}.$$

La série de fonction de terme général :

$$u_n \ : \ t \mapsto (-1)^n \frac{x^n \cos^{2n} t}{(2n)!}$$

converge normalement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ car $|u_n(t)| \leq \frac{x^n}{(2n)!}$ (terme général d'une série convergente quel que soit x fixé dans $\mathbb{R}_+$). Elle est donc uniformément convergente sur ce segment et on obtient :

$$J(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \frac{\cos^{2n} t}{(2n)!} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \mathrm{d}t$$

soit, d'après le résultat donné en rappel concernant l'intégrale de Wallis :

$$J(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Ce calcul étant valable quel que soit $x \in \mathbb{R}_+$, le rayon de convergence est $R = +\infty$ (ce qui peut aussi se vérifier directement).

En posant :

$$a_n = \frac{\pi}{2} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!},$$

le résultat précédent s'écrit :

$$J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

et, puisque φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de convergence dominée donne :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \varphi = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \varphi_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \varphi_n$$

c'est-à-dire :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

On pose $t = nu$, il vient :

$$\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n \,\mathrm{d}u$$

puis, par intégrations par parties successives ou par intégration par parties généralisée :

$$\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n \,\mathrm{d}u = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

d'où finalement :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}. \tag{i}$$

c) Par continuité de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on déduit de (i) :

$$\ln\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) \ \text{ avec } \ S_n(x) = x\ln n - \ln x - \sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) \quad (n \geqslant 1).$$

En posant :

$$u_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x) = x\ln\frac{n}{n-1} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right),$$

il vient :

$$\sum_{k=2}^n u_k(x) = \sum_{k=2}^n S_k(x) - S_{k-1}(x) = S_n(x) - S_1(x),$$

d'où :

$$S_n(x) = S_1(x) + \sum_{k=2}^n u_k(x) = -\ln x - \ln(x+1) + \sum_{k=2}^n u_k(x),$$

et enfin :

$$\begin{aligned}\ln\Gamma(x) &= -\ln x - \ln(x+1) + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x)\\ &= -\ln x - \ln(x+1) + \sum_{n=2}^{+\infty} x\ln\frac{n}{n-1} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right).\end{aligned} \tag{ii}$$

Les u_n sont clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$u_n'(x) = \ln\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n+x}.$$

De $\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \leqslant -\dfrac{1}{n}$ et $\ln\dfrac{n}{n-1} = \ln\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right) \leqslant \dfrac{1}{n-1}$, on déduit :

$$0 < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \leqslant u_n'(x) \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+x}.$$

Hidden page

6 La fonction dzeta de Riemann

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés de la fonction ζ, qui sera définie dans la première partie, et d'établir, pour s réel de l'intervalle $]0,1[$, l'équation fonctionnelle suivante :

$$(E) \quad \zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s) \quad \text{avec} \quad \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

On pose, dans tout le problème, pour tout entier naturel non nul N et pour tout réel $s > 0$:

$$S_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}, \quad H_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}, \quad K_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n-1)^s}$$

Partie A.
Définition et propriétés de ζ

I. Définition de ζ

Soit $s > 0$, n un entier naturel non nul. Posons : $u_n(s) = \dfrac{1}{n^s} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$.

1) Montrer que $0 \leqslant u_n(s) \leqslant \dfrac{s}{n^{s+1}}$.

2) Prouver que la série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $]0,+\infty[$ et que sa somme, qui sera notée U dans la suite, est une fonction continue sur $]0,+\infty[$.

3) Prouver que, pour $s \in\,]0,1[\, \cup\,]1,+\infty[$, la suite de terme général :

$$H_N(s) - \frac{N^{1-s}}{1-s}$$

possède une limite, notée $\zeta(s)$ que l'on exprimera à l'aide de $U(s)$.

4) Prouver que la suite de terme général : $H_N(1) - \ln N$ admet une limite strictement positive notée γ dans la suite du problème.

II. Autre expression de ζ

1) Soit s un réel strictement positif ; prouver que la série de fonctions de la variable réelle s :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

définit sur $]0,+\infty[$ une fonction de classe C^1 qui sera notée f dans la suite.

2) Exprimer $S_{2N}(s)$ à l'aide de $H_{2N}(s)$ et $H_N(s)$. En déduire, si $s \in\,]0,1[\, \cup\,]1,+\infty[$:

$$f(s) = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s).$$

3) En déduire, en décomposant autrement $S_{2N}(s)$ que, pour les mêmes valeurs de s, la suite de terme général :

$$K_N(s) - \frac{N^{1-s}}{2^s(1-s)}$$

a une limite que l'on exprimera à l'aide de $\zeta(s)$.

III. Calcul approché des valeurs de ζ

Dans cette question on négligera les erreurs d'arrondi.

1) Donner un algorithme de calcul approché de $f(s)$ à une précision ε fournie. L'appliquer au calcul de $\zeta(1/2)$ à 10^{-1} près.

2) Proposer un algorithme de calcul de $S_{2^p}(s)$ fondé sur la relation suivante, dont la vérification n'est pas demandée :

$$H_{4N}(s) = \left(1 + 2^{-s}\right) H_{2N}(s) - 2^{-s} H_N(s) + \sum_{n=N}^{2N-1} \frac{1}{(2n+1)^s}$$

Quels sont les avantages par rapport à l'algorithme de la question précédente ?

Calculer $\zeta(4/3)$ à 10^{-3} près.

IV. Étude au voisinage de $+\infty$

Quelle est la limite de f lorsque s tend vers $+\infty$?

V. Étude au voisinage de 1

1) Montrer que, lorsque s est au voisinage de 1 :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1).$$

2) Prouver, en calculant $f'(1)$ de deux façons, que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} = \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2}\right) \ln 2.$$

Partie B. Calcul de sommes de séries et d'intégrales

Soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[-\pi, \pi]$, à valeurs complexes. On pose, pour tout entier naturel :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \cos nt \, dt.$$

On notera ψ la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, telle que :

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad \psi(x) = \frac{\phi(x) + \phi(-x)}{2}.$$

I. Exprimer les coefficients de Fourier (en cosinus et sinus) de ϕ à l'aide des a_n. Pour $x \in \mathbb{R}$, prouver la convergence de la série de terme général $a_n \cos nx$ et calculer à l'aide de la fonction ϕ :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \text{ pour } -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

II. Montrer que la série de terme général a_n est absolument convergente.

III. Exprimer, à l'aide de $\phi(0)$, $\phi(\pi)$, $\phi(-\pi)$, les deux sommes suivantes :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}$$

IV. En choisissant comme fonction ϕ la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$ et en donnant au nombre complexe λ des valeurs adéquates, prouver les relations suivantes :

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + (2n+1)^2 \pi^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

V. Soit $s > 0$ et $x > -1$; prouver l'intégrabilité, sur $]0, +\infty[$ de $t \mapsto \dfrac{t^{s-1}}{e^t + x}$.

On désignera, dans la suite, par $\Gamma(s)$ la valeur de l'intégrale correspondante pour $x = 0$ (cf. préambule).

VI. Dans cette question, x est un réel tel que $|x| < 1$ et s est un réel strictement positif.

1) Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t + x} \mathrm{d}t = \Gamma(s) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)^s}.$$

2) En déduire la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t + 1} \mathrm{d}t = \Gamma(s) f(s).$$

VII. Dans cette question, x et s sont des réels de l'intervalle $]0, 1[$. On fixe s et on définit une suite (v_n) de fonctions définies sur l'intervalle $]0, 1]$ par :

$$\begin{cases} v_0(t) = t^{x-1} \\ v_n(t) = (-1)^n t^{n-1} \left[t^x - t^{-x}\right] \text{ si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

1) Calculer $\displaystyle\int_0^1 v_n(t)\mathrm{d}t$. Prouver la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

2) Soit a un réel strictement positif. Calculer les intégrales :

$$I(a, s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{a^2 + t^2} \mathrm{d}t \quad , \quad J(a, s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} \operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{t}\right) \mathrm{d}t.$$

et la conclusion résulte de :

$$\forall t \in [n, n+1], 0 \leqslant \frac{n+1-t}{t^{s+1}} \leqslant \frac{1}{t^{s+1}} \leqslant \frac{1}{n^{s+1}}.$$

2) Avec $s+1>1$ et le critère de domination, l'inégalité **(1)** donne la convergence de la série $\sum u_n(s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire la convergence simple sur $\mathbb{R}_+^*$ de $\sum u_n$.

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, $0 < a < b$, l'inégalité **(1)** donne :

$$\| u_n \|_\infty^{[a,b]} \leqslant \frac{b}{n^{a+1}}$$

d'où la convergence normale, donc uniforme de $\sum u_n$ sur tout intervalle compact $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$.

D'autre part pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction :

$$(t, s) \mapsto \frac{1}{t^s}$$

est continue sur $[n, n+1] \times \mathbb{R}_+^*$ donc :

$$s \mapsto \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et il en est de même pour u_n.

La convergence uniforme sur tout $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ permet alors de conclure à la continuité de la somme U sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) On a :

$$\begin{aligned} H_N(s) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{N} u_n(s) + \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \\ &= U_n(s) + \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^s} + \int_N^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \quad \text{où on a posé} \quad U_n(s) = \sum_{n=1}^{N} u_n(s) \\ &= U_n(s) + \frac{1}{1-s}\left(N^{1-s} - 1\right) + \int_N^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \end{aligned}$$

donc :

$$H_N(s) - \frac{N^{1-s}}{1-s} = \frac{1}{s-1} + U_n(s) + \int_N^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}.$$

Avec $0 \leqslant \int_N^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leqslant \frac{1}{N^s}$, on obtient $\lim\limits_{N \to +\infty} \int_N^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} = 0$, donc :

$$\lim_{N \to +\infty} H_N(s) - \frac{N^{1-s}}{1-s} = \frac{1}{s-1} + U(s).$$

On pose $\zeta(s) = \dfrac{1}{s-1} + U(s)$. (2)

4) Comme en 3) :

$$H_N(1) = U_N(1) + \ln N + \ln \frac{N+1}{N}.$$

En conséquence, $\lim\limits_{N \to +\infty} H_N(1) - \ln N = U(1)$.

Remarque. On vient de retrouver la constante d'Euler.

Il en résulte :

$$f'(1) = \lim_{s\to 1} \frac{f(s) - f(1)}{s - 1} = \left(\gamma - \frac{\ell n\, 2}{2}\right) \ell n\, 2.$$

En comparant les deux valeurs trouvées pour $f'(1)$, on a la formule annoncée.

Partie B

I. Coefficients de Fourier de ψ

ψ est paire donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n(\psi) = 0$ et on trouve $a_n(\psi) = a_n$.

ψ est continue sur $\mathbb{R}$, 2π périodique et C^1 par morceaux, donc d'après le théoérème de Dirichlet elle est somme de sa série de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx = \psi(x)$$

et pour $x \in \left[-\pi, \pi\right]$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx = \frac{\phi\,(x) + \phi(-x)}{2}.$$

II. Σa_n est absolument convergente

ψ étant continue et C^1 par morceaux, on est en effet dans les conditions du théorème de convergence normale.

III. Calcul de $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}$

En appliquant la formule du I. en 0, il vient :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \phi(0) \tag{5}$$

et en l'appliquant en π :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n = \frac{\phi\,(\pi) + \phi(-\pi)}{2}.$$

En retranchant ces deux égalités, il vient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} = \frac{\phi\,(0)}{2} - \frac{\phi\,(\pi) + \phi(-\pi)}{4} \tag{6}$$

IV.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2} \tag{7}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + (2n+1)^2 \pi^2} \tag{8}$$

Avec $\phi\ :\ t \mapsto e^{\lambda t}$, si $\lambda \notin i\mathbb{Z}$, il vient :

$$a_n = \frac{(-1)^n \lambda}{\pi\left(\lambda^2 + n^2\right)} \left(e^{\lambda\pi} - e^{-\lambda\pi}\right)$$

et la formule (5) se lit :

$$1 = \left(e^{\lambda\pi} - e^{-\lambda\pi}\right)\left[\frac{1}{2\lambda\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\lambda}{\pi\left(\lambda^2+n^2\right)}\right]$$

d'où la formule (7) avec $\lambda = ix$ (et $\lambda \notin i\mathbb{Z}$ correspond à $x \notin \mathbb{Z}$).

En appliquant la formule (6), il vient :

$$\frac{\left(e^{\lambda\pi} - e^{-\lambda\pi}\right)}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-\lambda}{\lambda^2+(2n+1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{e^{\lambda\pi}+e^{-\lambda\pi}}{4}$$

donc avec $x = \lambda\pi$ (ie $\lambda = \frac{x}{\pi}$) on a pour tout x réel $\lambda \notin i\mathbb{Z}^*$, les α_{2n+1} sont bien définis comme ci-dessus, et on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-2x}{x^2+(2n+1)^2\pi^2} = -\frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{2\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)} = -\frac{e^{x}-1}{2(e^x+1)}$$

(on remarque que $2 - e^x - e^{-x} = -(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2$) et enfin :

$$\frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2x}{x^2+(2n+1)^2\pi^2} = \frac{1}{e^x+1} \tag{8}$$

V. $s > 0$, $x > -1$. Intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de $t \mapsto \dfrac{t^{s-1}}{e^t+x}$

La fonction $h_{s,x}\ :\ t \mapsto \dfrac{t^{s-1}}{e^t+x}$ est continue, positive sur $]0,+\infty[$.

Au voisinage de 0 :

$$h_{s,x}(t) \sim \frac{t^{s-1}}{1+x}$$

donc $h_{s,x}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $1-s<1$ c'est-à-dire $s>0$ ce qui est vrai par hypothèse.

Au voisinage de $+\infty$, $h_{s,x}(t) = o\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)$ donc $h_{s,x}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

VI. $s > 0$, $|x| < 1$

1) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{t^{s-1}}{e^t+x} = \frac{t^{s-1}e^{-t}}{1+xe^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n t^{s-1}e^{-(n+1)t}.$$

Considérons la série de fonctions :

$$\sum_{n\geq 0} w_n \text{ avec } w_n\ :\ t \mapsto (-1)^n x^n t^{s-1}e^{-(n+1)t}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n est continue sur $]0,+\infty[$ et intégrable car :

$$|w_n(t)| \underset{t\to 0}{\sim} |x|^n t^{s-1} \quad \text{et} \quad w_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-\frac{t}{2}}\right).$$

VII. $x \in]0,1[$, $s \in]0,1[$

$$\int_0^1 v_0(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \quad , \quad \int_0^1 v_n(t)\mathrm{d}t = \frac{2x(-1)^n}{x^2 - n^2} \quad (n \geqslant 1)$$

1) Remarquons que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Alors le changement de variable défini par $t = \dfrac{1}{u}$ donne :

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{u^{-x}}{1+u}\mathrm{d}u \quad \text{donc} \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t}\right)\mathrm{d}t.$$

En remarquant que pour $t \in [0,1[$, $\dfrac{1}{1+t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n$, on en déduit :

$$\frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t} = t^{x-1} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n t^{n-1}\left(t^x - t^{-x}\right) \quad \text{donc} \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\mathrm{d}t.$$

Les fonctions v_n $(n \geqslant 0)$ sont continues et intégrables sur $]0,1[$, la somme de la série Σv_n, c'est-à-dire la fonction :

$$t \mapsto \frac{t^{x-1} + t^{-x}}{1+t}$$

est continue et intégrable sur $]0,1[$ et enfin la série de terme général :

$$\int_0^1 |v_n| = \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

est convergente, donc d'après le théorème de convergence dominée (pour les séries) il vient :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 v_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2}$$

D'après la formule (7), cette relation s'écrit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

2) ▪ Posons $t = a\sqrt{u}$, il vient :

$$I(a,s) = \frac{a^{s-1}}{2}\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{s-1}{2}}}{1+u}\mathrm{d}u = \frac{a^{s-1}}{2}\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{s+1}{2}-1}}{1+u}\mathrm{d}u.$$

Avec $\dfrac{s+1}{2} \in]0,1[$ on peut appliquer la formule (11) et il vient :

$$I(a,s) = \frac{\pi\, a^{s-1}}{2\sin\left(\pi\dfrac{s+1}{2}\right)} = \frac{\pi\, a^{s-1}}{2\cos\left(\dfrac{\pi s}{2}\right)}$$

Remarque. L'application :

$$t \mapsto \frac{t^2}{a^2}$$

est une bijection de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ sur lui-même. Dans ces conditions, l'intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de :

on a aussi :

$$J_n = -\int_0^1 \sum_{p=1}^{+\infty} n\frac{x^{n+p}}{p}\mathrm{d}x$$

(en utilisant le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$).
La série de terme général :

$$\int_0^1 \left|n\frac{x^{n+p}}{p}\right| \mathrm{d}x = \frac{n}{p(p+n+1)}$$

étant convergente, le théorème de convergence dominée pour les séries donne :

$$J_n = -\sum_{p=1}^{+\infty} \int_{[0,1[} n\frac{x^{n+p}}{p}\mathrm{d}x = -\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{n}{p(p+n+1)}$$

En écrivant :

$$\frac{n}{p(p+n+1)} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+n+1}\right),$$

la somme de cette série s'obtient par téléscopage :

$$J_n = -\frac{n}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}\right).$$

Finalement :

$$I_n = \frac{n}{n+1}\left(\ln n - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right) \quad \text{et} \quad \Gamma'(1) = \lim_{n\to+\infty} I_n = -\gamma.$$

3) D'après le 2) lorsque s tend vers 1 :

$$\Gamma(s) = 1 + (1-s)\,\gamma + o(1-s)$$

(c'est la formule de Taylor : $\Gamma(s) = \Gamma(1) + (s-1)\,\Gamma'(1) + o(s-1)$).

D'autre part, d'après A.5.1) : $\zeta(s) = \dfrac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$.

L'équation fonctionnelle (E) donne pour $s \in \left]0,1\right[$

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-s)\right)\Gamma(s)\,\zeta(s)$$

donc avec les développements :

$$(2\pi)^{-s} = \frac{1}{2\pi}e^{(1-s)\ln 2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[1 + (1-s)\ln(2\pi) + o(1-s)\right]$$

$$\Gamma(s) = 1 + (1-s)\,\gamma + o(1-s)$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-s)\right)\zeta(s) &= \left[\frac{\pi}{2}(1-s) + o\left((1-s)^2\right)\right]\left[\frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)\right]\\ &= \left[\frac{\pi}{2} + o(1-s)\right]\left[-1 + \gamma(1-s) + o(1-s)\right]\\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\,\gamma\,(1-s) + o(1-s)\end{aligned}$$

on obtient :

$$\zeta(1-s) = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2} + (1-s)\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\pi - \frac{\pi}{2}\gamma + \frac{\pi}{2}\gamma\right) + o(1-s)\right].$$

Enfin, en posant $1-s = x$, lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, il vient :

$$\zeta(x) = -\frac{1}{2} - \frac{x}{2}\ln(2\pi) + o(x).$$

7 Convergence des séries de Fourier Unicité du développement

Partie A. Continuité de la somme d'une série de fonctions

Dans cette partie $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est une série convergente à termes réels.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \quad \text{et} \quad \varepsilon_n = \sup\left\{ |r_k|, k \geqslant n \right\}.$$

Pour $t > 0$, on pose :

$$\varphi(t) = \frac{\sin^2(t)}{t^2} \quad \text{et} \quad \varphi(0) = 1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \geqslant 0$, on pose :

$$U_n(t) = u_n\, \varphi(nt).$$

1) Montrer que φ est de classe C^1 et que sa dérivée est intégrable sur $\left[0, +\infty\right[$.

2) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} U_n$ converge simplement sur $\left[0, +\infty\right[$.

Dans la suite, on note :

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(t) \text{ pour } t \geqslant 0.$$

3) Prouver que S est continue sur $\left]0, +\infty\right[$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \geqslant 0$. On pose :

$$R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k(t).$$

a) Établir que :

$$R_n(t) = r_n\, \varphi\big((n+1)t\big) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k \Big(\varphi\big((k+1)t\big) - \varphi(kt) \Big).$$

b) En déduire que :

$$|R_n(t)| \leqslant \varepsilon_n \left(1 + \int_0^{+\infty} |\varphi'(t)|\, dt \right).$$

c) Prouver que S est continue sur $\left[0, +\infty\right[$.

Partie B. Pseudo-dérivée seconde

On note E_0 l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $f \in E_0$ et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$D_2 f(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

lorsque cette limite existe. On dit alors que $D_2 f(x)$ est la pseudo-dérivée seconde de f en x.
On note E_2 l'ensemble des applications $f \in E_0$ ayant une pseudo-dérivée seconde en tout point de $\mathbb{R}$. Pour $f \in E_2$, on note $D_2 f$ l'application $x \mapsto D_2 f(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

5) Vérifier succinctement que E_2 est un sous-espace vectoriel de E_0 et que l'application $f \mapsto D_2 f$ de E_2 dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est linéaire.

6) Soit f une application de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f \in E_2$ et que $D_2 f = f''$.

7) Soit $f \in E_2$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que f admet un maximum local en x_0. Étudier le signe de $D_2 f(x_0)$.

8) Soit $f \in E_2$. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, D_2 f(x) > 0$.

a) Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Notons h l'application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$h(a) = f(a) \quad \text{et} \quad h(b) = f(b).$$

$f - h$ possède-t-elle un maximum local ? Étudier le signe de $(f-h)(x)$ lorsque $x \in \left]a, b\right[$.

b) En déduire que f est convexe.

9) Soit $f \in E_2$.

a) Montrer que f est convexe si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, D_2 f(x) \geqslant 0$.

Indication. On pourra poser $f_n(x) = f(x) + \dfrac{x^2}{n}$.

b) Montrer que $D_2 f = 0$ si et seulement si f est affine.

c) On suppose que $D_2 f$ est continue. Montrer que f est de classe C^2 et que $f'' = D_2 f$.

Partie C. Théorème de Cantor-Lebesgue

Soit $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = \rho_n \cos(nx + \theta_n).$$

On suppose que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers 0.
Le but de cette partie est de prouver que $\lim \rho_n = 0$. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que la suite $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

10) Établir l'existence d'une application j de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante et d'un réel $\alpha > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, |\rho_{j(n)}| \geqslant \alpha$.

11) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n \to +\infty} \cos\left(j(n)x + \theta_{j(n)}\right) = 0$.

12) En considérant $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2\left(j(n)x + \theta_{j(n)}\right)\mathrm{d}x$, obtenir une contradiction et conclure.

Partie D. Unicité du développement en série trigonométrique

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels.

On suppose que la série trigonométrique :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

converge simplement sur $\mathbb{R}$ et on pose :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

13) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers 0.

Indication. On pourra utiliser C.

14) On pose :

$$G(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)}{n^2}.$$

Prouver que G est définie sur $\mathbb{R}$, continue et 2π-périodique.

Quels sont les coefficients de Fourier trigonométriques de G ?

15) Prouver que $G \in E_2$ et que $D_2 G = f - \dfrac{a_0}{2}$.

Indication. On pourra utiliser A.4)c).

16) On suppose dans cette question que f est continue.

Montrer que G est de classe C^2 et trouver les coefficients de Fourier trigonométriques de G''.
En déduire les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

17) On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) = 0.$$

Montrer que les a_n et b_n sont tous nuls.

Une fonction 2π-périodique peut-elle être la somme (au sens de la convergence simple) de deux séries trigonométriques distinctes ?

Partie A. Continuité de la somme d'une série de fonctions

1) Il est acquis que φ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et continue en 0. On sait donc que pour prouver qu'elle est de classe C^1sur $[0,+\infty[$, il suffit de s'assurer que φ' admet une limite réelle en 0.

Formons :

$$\varphi'(t) = \frac{2\sin t(t\cos t - \sin t)}{t^3}.$$

Des développements limités de sin et cos en 0 donnent :

$$t\cos t - \sin t = t\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) - \left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) = -\frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

d'où :

$$\varphi'(t) \underset{0}{\sim} -\frac{2}{3}t \quad \text{puis} \quad \lim_{t\to 0^+} \varphi'(t) = 0$$

ce qui assure la conclusion.

φ' est intégrable sur $[0,+\infty[$. C'est une conséquence du fait que φ' est continue sur $[0,+\infty[$ et que :

$$\forall t \in [1,+\infty[,\quad |\varphi'(t)| \leqslant \frac{2(t+1)}{t^3} \leqslant \frac{4}{t^2}.$$

2) Pour $t = 0$, $U_n(0) = u_n$ et, par hypothèse, $\sum u_n$ est convergente.

Pour $t > 0$, la convergence de $\sum U_n(t)$ résulte de $|U_n(t)| \leqslant \dfrac{A}{n^2t^2}$ où on a posé $A = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n|$ (la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée puisque convergente).

> Remarquons que, ne sachant rien de la série $\sum |u_n|$, la majoration évidente $|U_n(t)| \leqslant |u_n|$ ne permet pas d'aboutir.

3) On a affaire à la somme d'une série de fonctions continues sur $]0,+\infty[$ qui converge normalement donc uniformément sur tout intervalle compact $[a,b] \subset]0,+\infty[$.

En effet $t \geqslant a > 0$ donne :

$$|u_n(t)| \leqslant \frac{A}{n^2a^2}.$$

4) a) Supposons $t > 0$. Alors $u_n = r_{n-1} - r_n$ donne :

$$R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(r_{k-1} - r_k\right)\frac{\sin^2 kt}{k^2t^2}.$$

La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (de limite 0), elle est donc bornée ; posons $B = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |r_n|$.

On obtient alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad |r_k \varphi(kt)| \leqslant \frac{B}{k^2 t^2} \quad \text{et} \quad |r_{k-1} \varphi(kt)| \leqslant \frac{B}{k^2 t^2}$$

ce qui assure la convergence des deux séries $\sum r_k \varphi(kt)$ et $\sum r_{k-1} \varphi(kt)$.
On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} R_n(t) &= \sum_{k=n}^{+\infty} r_k \varphi\big((k+1)t\big) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k \varphi\big(kt\big) \\ &= r_n \varphi\big((n+1)t\big) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k \Big[\varphi\big((k+1)t\big) - \varphi\big(kt\big)\Big] \end{aligned}$$

Pour $t = 0$, la formule reste vraie.

b) Par définition, $\forall k \geqslant n,\ |r_k| \leqslant \varepsilon_n$ donc :

$$|R_n(t)| \leqslant \varepsilon_n \left(1 + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left|\varphi\big((k+1)t\big) - \varphi\big(kt\big)\right|\right).$$

Or :

$$\left|\varphi\big((k+1)t\big) - \varphi\big(kt\big)\right| = \left|\int_k^{k+1} \varphi'\right| \leqslant \int_k^{k+1} |\varphi'|$$

d'où :

$$|R_n(t)| \leqslant \varepsilon_n \left(1 + \int_{n+1}^{+\infty} |\varphi'|\right) \leqslant \varepsilon_n \left(1 + \int_0^{+\infty} |\varphi'|\right).$$

c) Posons :

$$K = 1 + \int_0^{+\infty} |\varphi'|.$$

D'après le b), on a :

$$\| R_n \|_\infty^{[0,+\infty[} \leqslant K\varepsilon_n \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} \| R_n \|_\infty^{[0,+\infty[} = 0$$

et la série de fonctions $\sum U_n$ est uniformément convergente sur $[0, +\infty[$ ce qui assure la continuité de sa somme S en 0.

Partie B.
Pseudo dérivée seconde

$E_0 = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, E_2 est l'ensemble des $f \in E_0$ admettant une pseudo-dérivée seconde en tout point $x \in \mathbb{R}$.

5) Sans difficulté.

6) En effectuant les développements limités à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $h \mapsto f(x+h)$ et $h \mapsto f(x-h)$, on obtient :

$$\lim_{h\to0^+} \frac{1}{h^2}\big(f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)\big) = f''(x)\,;$$

d'où la conclusion.

7) Il existe $\eta < 0$ tel que $|h| < \eta \Rightarrow f(x_0 + h) \leqslant f(x_0)$.
Donc, pour $0 < h \leqslant \eta$, on a $f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0) \leqslant 0$ et il vient $D_2 f(x_0) \leqslant 0$.

- Synthèse

$D_2 f$ étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction g définie par :

$$g(x) = \int_0^x \left(\int_0^t D_2 f(u)\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t$$

est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ avec $g''(x) = D_2 f(x)$ donc $D_2 g = D_2 f$.

Il en résulte $D_2(f - g) = 0$ et, d'après b), $h = f - g$ est affine. En conséquence, $f = g + h$ est de classe C^2 en tant que somme de deux fonctions de classe C^2 et, dans ces conditions, on a déjà vu que $f'' = D_2 f$.

Partie C. Théorème de Cantor-Lebesgue.

$$f_n(x) = \rho_n \cos\left(nx + \theta_n\right) \qquad \left(f_n\right)_{\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } 0.$$

On suppose que ρ_n ne tend pas vers 0.

10) $\rho_n \not\to 0$ se traduit par : $\exists \alpha > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists p_n \geqslant n,\ |\rho_{p_n}| \geqslant \alpha$.

On construit $\left(j(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence en posant $j(0) = p_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $j(n+1) = p_{1+j(n)}$, on obtient ainsi une suite vérifiant :

$$\left|\rho_{j(n)}\right| \geqslant \alpha.$$

11) On a :

$$\left|\cos\left(j(n)x + \theta_{j(n)}\right)\right| = \frac{1}{\left|\rho_{j(n)}\right|}\left|f_{j(n)}(x)\right| \leqslant \frac{1}{\alpha}\left|f_{j(n)}(x)\right|,$$

donc de $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} j(n) = +\infty$, il résulte que :

$$\lim_{n\to+\infty} \cos\left(j(n)x + \theta_{j(n)}\right) = 0.$$

12) Les fonctions $g_n\ :\ x \mapsto \cos^2\left(j(n)x + \theta_{j(n)}\right)$ sont continues sur $\left[0, 2\pi\right]$ et on vient de voir que la suite $\left(g_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0.

D'autre part on a $\forall x \in [0, 2\pi],\ \ |g_n(x)| \leqslant 1$. La fonction constante, égale à 1, étant intégrable sur $[0, 2\pi]$, le théorème de convergence dominée donne :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} g_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Par ailleurs, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos^2(px + \theta) = \frac{1 + \cos(2px + 2\theta)}{2}$$

donc :

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(px + \theta)\mathrm{d}x = \pi$$

et la suite de terme général :

$$\int_0^{2\pi} g_n(x)\mathrm{d}x$$

est constante, égale à π, ce qui est évidemment contradictoire avec :

$$a_p(G) = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} f_n(x)\cos px\mathrm{d}x, \quad b_p(G) = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} f_n(x)\sin px\mathrm{d}x.$$

Compte tenu de :

$$\int_0^{2\pi}\cos nx\cos px\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq p \\ \pi & \text{si} \quad n = p \end{cases},$$

$$\int_0^{2\pi}\sin nx\sin px\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq p \\ \pi & \text{si} \quad n = p \end{cases},$$

$$\text{et} \quad \int_0^{2\pi}\sin nx\cos px\mathrm{d}x = 0,$$

on obtient :

$$a_p(G) = -\frac{a_p}{p^2} \quad \text{et} \quad b_p(G) = -\frac{b_p}{p^2}.$$

15) Formons :

$$\begin{aligned}\cos\big(n(x+h)+\theta_n\big) + \cos\big(n(x-h)+\theta_n\big) - 2\cos\big(nx+\theta_n\big) \\ &= 2\cos\big(nx+\theta_n\big)\cos\big(nh\big) - 2\cos\big(nx+\theta_n\big) \\ &= -4\cos\big(nx+\theta_n\big)\sin^2\left(n\frac{h}{2}\right),\end{aligned}$$

on en déduit :

$$\frac{1}{h^2}\big(G(x+h)+G(x-h)-2G(x)\big) = \sum_{n=1}^{+\infty}\rho_n\cos\big(nx+\theta_n\big)\frac{\sin^2 n\frac{h}{2}}{\left(n\frac{h}{2}\right)^2}.$$

Avec $u_n = \rho_n\cos\big(nx+\theta_n\big) = a_n\cos nx + b_n\sin nx$, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente par hypothèse.

On retrouve ainsi les conditions du A. et, avec les notations de cette partie A. :

$$\frac{1}{h^2}\big(G(x+h)+G(x-h)-2G(x)\big) = S\big(\frac{h}{2}\big).$$

On a vu que S est continue en 0 ce qui donne :

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\big(G(x+h)+G(x-h)-2G(x)\big) = S(0) = f(x) - \frac{a_0}{2},$$

donc G est élément de E_2 avec $D_2G = f - \frac{a_0}{2}$.

16) En supposant f continue, la question précédente montre que D_2G est continue, donc, d'après B.5).c), G est de classe C^2 et $D_2G = G''$.

Les fonctions G, G', G'' étant continues, on a :

$$\begin{aligned} a_n(G') &= nb_n(G) = -\frac{1}{n}b_n, & b_n(G') &= -na_n(G) = \frac{1}{n}a_n \\ a_n(G'') &= nb_n(G') = a_n, & b_n(G'') &= -na_n(G') = b_n. \end{aligned}$$

Puisque :

$$f = \frac{a_0}{2} + G'',$$

les coefficients de fourier trigonométriques de f sont les a_n, $n \geq 0$ et les b_n, $n \geq 1$.

On a ainsi prouvé que la série trigonométrique qui définit f est identique à la série de Fourier de f.

17) On suppose :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = 0.$$

On a ainsi afaire à une série trigonométrique dont la fonction somme est nulle donc continue sur $\mathbb{R}$ ce qui permet d'appliquer le résultat de la question précédente : les a_n et b_n sont les coefficients trigonométriques de la fonction nulle, ils sont donc tous nuls.

Application.

En supposant :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \\ &= \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n' \cos nx + b_n' \sin nx,\end{aligned}$$

il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{a_0 - a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_n') \cos nx + (b_n - b_n') \sin nx = 0,$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n' = a_n \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n' = b_n$$

Hidden page

Si f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ xf'(x) - 2\,|f(x)| = x \qquad (1)$$

d'où, en particulier, $f(0) = 0$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 1 + \frac{2}{x}\,|f(x)| > 0.$$

On en déduit que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et donc que :

$$\forall x > 0,\ f(x) > f(0) \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(x) > 0. \qquad (2)$$

Alors (1) donne :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ xf'(x) - 2f(x) = x$$

et, d'après le résultat préliminaire, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) = \lambda x^2 - x.$$

Donc, lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures, on a $f(x) \sim -x$ ce qui est bien sûr en contradiction avec (2).

On a ainsi prouvé, par l'absurde, que (E) n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

2) Remarquons que les théorèmes du programme ne nous permettent pas de dire s'il ya des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ (pas plus que sur $\mathbb{R}_-^*$). Nous allons donc procéder par analyse-synthèse. Dans l'analyse, on donne une description des solutions possibles, et dans la synthèse, on détermine quelles sont parmi les possibilités fournies par l'analyse celles qui donnent effectivement des solutions de (E).

- Analyse

Si f est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$ on montre, comme dans le 1), que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a donc trois cas de figure à considérer : $f > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $f < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, f s'annule une fois et une seule.

Comme dans le 1), on voit que le premier cas est à rejeter.

Dans le deuxième cas, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ f(x) = \frac{\lambda}{x^2} + \frac{x}{3}$$

d'où $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{3}$ ce qui est contradiction avec $f < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ce cas est donc également à rejeter.

Dans le troisième cas, f étant strictement croissante, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$f(x) < 0 \text{ sur }]0, \alpha[\quad , \quad f(\alpha) = 0 \quad , \quad f(x) > 0 \text{ sur }]\alpha, +\infty[.$$

Sur $]0, \alpha[$, on a $xf'(x) + 2f(x) = x$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in [0, \alpha[,\ f(x) = \frac{\lambda}{x^2} + \frac{x}{3}$$

et, avec $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x < \alpha}} f(x) = 0$, il vient $\lambda = -\dfrac{\alpha^3}{3}$ donc $f(x) = \dfrac{x^3 - \alpha^3}{3x^2}$.

Sur $]\alpha, +\infty[$, on a $xf'(x) - 2f(x) = x$. Il existe donc $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]\alpha, +\infty[,\ f(x) = \mu x^2 - x$$

et avec $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}} f(x) = 0$, il vient $\mu = \dfrac{1}{\alpha}$ donc $f(x) = \dfrac{x^2}{\alpha} - x$.

Pour α décrivant $\mathbb{R}_+^*$, on a là les seules solutions possibles de (E) sur $]0, +\infty[$.

- Synthèse

Étant donné $a \in \mathbb{R}_+^*$, soit f_a la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - a^3}{3x^2} & \text{pour } 0 < x < a \\ 0 & \text{pour } x = a \\ \dfrac{x^2 - ax}{a} & \text{pour } x > a \end{cases}$$

L'étude des équations (E_1) et (E_2) montre que $f_{a|]0,a[}$ est solution de (E) sur $]0,a[$ tandis que $f_{a|]a,+\infty[}$ est solution de (E) sur $]a,+\infty[$.

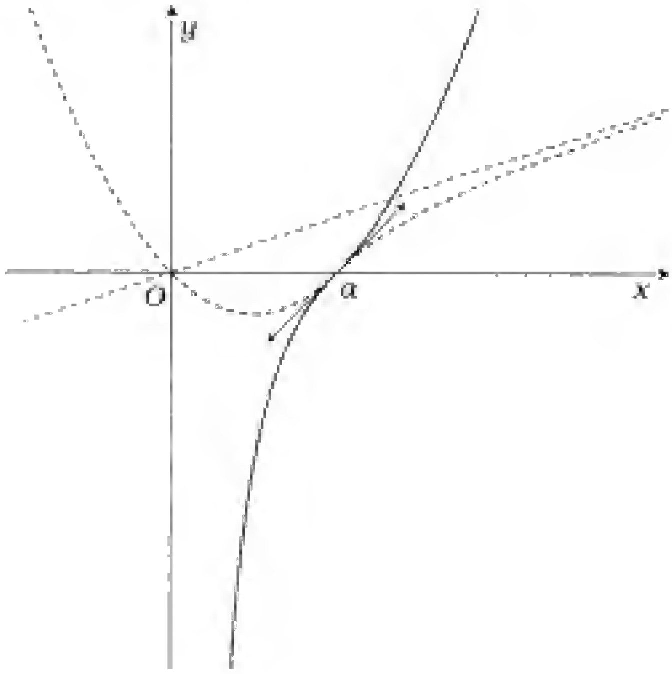
f_a étant évidemment continue en a avec $f_a(a) = 0$, la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{a\}, f_a'(x) = \frac{2}{x}|f_a(x)| + 1$$

montre que :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f_a'(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f_a'(x) = 1$$

et on en déduit que f_a est dérivable en a avec $f_a'(a) = 1$, et en fait de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, puis que f_a est solution de (E) sur $]0,+\infty[$.



3) - Analyse

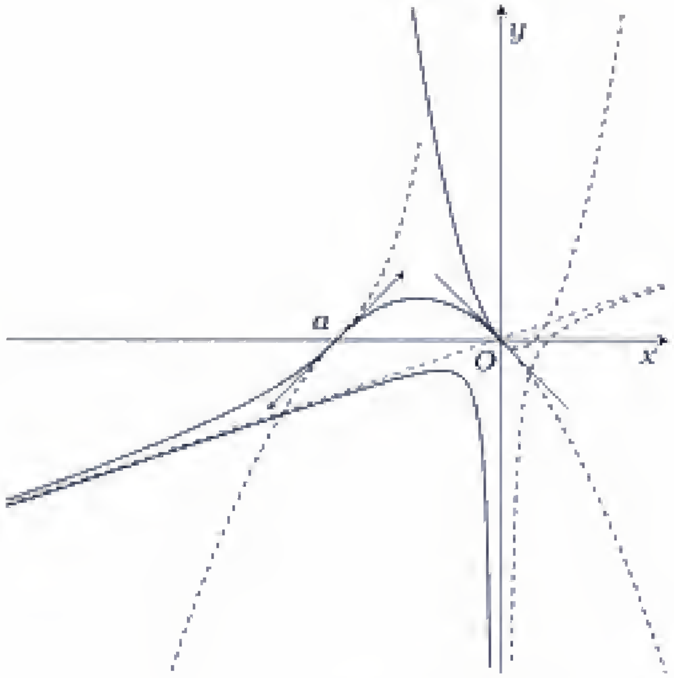
Soit f une solution de (E) sur $]-\infty,0[$. Envisageons encore trois cas.

Premier cas : $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, f(x) > 0$.

Alors $\forall x \in]-\infty,0[, xf'(x) - 2f(x) = x$. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, f(x) = \lambda x^2 - x.$$

De plus, en notant que pour $\lambda \neq 0$, $f(x) \underset{-\infty}{\sim} \lambda x^2$, on voit que l'on a nécessairement $\lambda \geqslant 0$.



Ex. 3

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) \geqslant 0.$$
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{\pi} f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$.

> L'hypothèse se lit $f'' - 2f' + 2f = g$ avec g continue, positive, et la méthode de variation des constantes permet de résoudre l'équation $y'' - 2y' + 2y = g$ au moyen d'intégrales.

Soit (H) l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0$.
Son équation caractéristique (C) : $r^2 - 2r + 2 = 0$ s'écrit aussi $(r-1)^2 + 1 = 0$; ses racines sont $1+i$ et $1-i$. Une base de $S(H)$, espace vectoriel des solutions de (H), est donc (φ_1, φ_2) avec :
$$\varphi_1 \ :\ x \mapsto e^{(1+i)x} \quad \text{et} \quad \varphi_2 \ :\ x \mapsto e^{(1-i)x}$$
et on sait que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, le déterminant wronskien :
$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix}$$
et non nul. (La vérification est facile : $W(x) = -2ie^{2x}$.)
Pour tout $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, il existe un couple unique (u, v) de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tel que :
$$\begin{cases} f = u\,\varphi_1 + v\varphi_2 \\ f' = u\,\varphi_1' + v\varphi_2' \end{cases}$$
et la condition $f'' - 2f' + 2f = g$ est alors équivalente à :
$$\begin{cases} u'\,\varphi_1 + v'\varphi_2 = 0 \\ u'\,\varphi_1' + v'\varphi_2' = g \end{cases}$$
ce qui donne :
$$u' = -\frac{1}{W}\,g\,\varphi_2 \quad , \quad v' = \frac{1}{W}\,g\,\varphi_1$$
c'est-à-dire :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = \frac{1}{2i}\,g(x)e^{-(1+i)x} \quad , \quad v'(x) = -\frac{1}{2i}\,g(x)e^{-(1+i)x}.$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = a + \frac{1}{2i}\int_0^x g(t)e^{-(1+i)t}\mathrm{d}t \quad , \quad v(x) = b - \frac{1}{2i}\int_0^x g(t)e^{-(1-i)t}\mathrm{d}t,\ (a,b)\in\mathbb{C}^2,$$

puis :

$$f(x) = a\,e^{(1+i)x} + b\,e^{(1-i)x} + \frac{1}{2i}\int_0^x \left(e^{(1+i)(x-t)} - e^{(1-i)(x-t)}\right)g(t)\mathrm{d}t$$

$$f(x) = a\,e^{(1+i)x} + b\,e^{(1-i)x} + \int_0^x e^{x-t}g(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t.$$

Sachant que f est réelle, il vient enfin :

$$f(x) = e^x(\lambda\cos x + \mu\sin x) + \int_0^x e^{x-t}g(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t, \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

Formons alors :

$$\begin{aligned} e^\pi f(x) + f(x+\pi) &= \int_0^x e^{\pi+x-t}g(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t - \int_0^{x+\pi} e^{x+\pi-t}g(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{x+\pi} e^{x+\pi-t}\sin(t-x)g(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

La positivité de $g(t)$ sur $\mathbb{R}$ et celle de $\sin(t-x)$ pour $t\in\left[x, x+\pi\right]$ donne la conclusion :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ e^\pi f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0.$$

Ex. 4

1) Écrire sous forme intégrale les solutions sur $\left]0, +\infty\right[$ de (L) : $y'' + y = \dfrac{1}{x}$.

2) Existe-t-il une solution ayant une limite en $+\infty$?

1) C'est pratiquement une question de cours : il s'agit de mettre en œuvre la méthode de variation des constantes.

Une base de l'espace vectoriel des solutions sur $\mathbb{R}$ de (H) : $y'' + y = 0$ est $(\cos, \sin)$ et on sait que $S(L)$, espace affine des solutions de (L) sur $\mathbb{R}_+^*$ est inclus dans $C^2\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$.

Étant donné $y\in C^2\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$, il existe $(u,v)\in C^1\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)^2$ unique, vérifiant :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ y = u\cos x + v\sin x \quad , \quad y' = -u\sin x + v\cos x \tag{1}$$

Comme il est d'usage, on écrit u, v, y, y' au lieu de $u(x), v(x), y(x)\ y'(x)$.

Dans ces conditions, le cours nous dit que $y\in S(L)$ si et seulement si :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*, 0 = u'\cos x + v'\sin x \quad , \quad \frac{1}{x} = -u'\sin x + v'\cos x \tag{2}$$

soit aussi :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ u' = -\frac{\sin x}{x} \quad , \quad v' = \frac{\cos x}{x} \tag{3}$$

À ce stade, nous considérons comme connu le résultat qui affirme que quel que soit $x > 0$, les intégrales :

$$\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$$

sont impropres convergentes. On pourra voir à ce propos le *Précis, Analyse PSI, chapitre 6*, Bréal.

Puisque les fonctions $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{\cos x}{x}$ sont continues sur $]0, +\infty[$, en écrivant :

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t - \int_\pi^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$$

$$G(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} \mathrm{d}t = \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t} \mathrm{d}t - \int_\pi^x \frac{\cos t}{t} \mathrm{d}t$$

on voit que les fonctions F et G ainsi définies sont de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et que ce sont respectivement des primitives de $x \mapsto -\dfrac{\sin x}{x}$ et $x \mapsto -\dfrac{\cos x}{x}$.

Les conditions (3) sont équivalentes à :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; u = a + \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \quad , \quad v = b - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} \mathrm{d}t$$

et les solutions de (L) sur $]0, +\infty[$ s'écrivent donc :

$$y = a \cos x + b \sin x + \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} \mathrm{d}t$$

soit aussi :

$$y = a \cos x + b \sin x + \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t - x)}{t} \mathrm{d}t$$

2) Sachant que :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} \mathrm{d}t = 0$$

(ce sont des restes d'intégrales convergentes), la solution :

$$y \; : \; x \mapsto a \cos x + b \sin x + \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t - x)}{t} \mathrm{d}t$$

admet une limite en $+\infty$ si et seulement si il en est de même pour $x \mapsto a \cos x + b \sin x$ donc si et seulement si $a = b = 0$.

Ainsi (L) admet une solution et une seule sur $]0, +\infty[$ ayant une limite en $+\infty$, il s'agit de :

$$x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t - x)}{t} \mathrm{d}t.$$

Ex. 5

Étudier l'équation différentielle :

$$(L) : \quad x^2 y'' + xy' - y = \frac{x^2}{1 - x^2}$$

Indication. On commencera par rechercher les solutions développables en série entière.

Soit $(H) : x^2 y'' + xy' - y = 0$ l'équation linéaire homogène associée à (L).

La continuité des fonctions coefficients $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x$, $x \mapsto -1$, $x \mapsto \dfrac{x^2}{1 - x^2}$, et le fait que x^2 s'annule au seul point 0 amènent à considérer quatre intervalles :

$$I_1 =]0, 1[, \quad I_2 =]-1, 0[, \quad I_3 =]1, +\infty[, \quad I_4 =]-\infty, -1[.$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (cas linéaire), pour $k = \{1, 2, 3, 4\}$, l'ensemble $S_k(L)$ des solutions de (L) sur I_k est un plan affine dont la direction est $S_k(H)$, plan vectoriel des solutions de (H) sur I_k.

Pour achever cette étude, il reste à étudier l'ensemble des solutions sur $\left]-1,1\right[$.

> En effet, les fonctions coefficients de (L) sont définies, continues sur les trois intervalles $\left]-\infty,-1\right[$, $\left]-1,1\right[$, $\left]1,+\infty\right[$ et le découpage de $\left]-1,1\right[$ en $\left]-1,0\right[$ et $\left]0,1\right[$ n'a été rendu nécessaire que par l'application du théorème de Cauchy-Lipschitz.
> Il est bien sûr à noter que sur $\left]-1,1\right[$ on a déjà connaissance des solutions $x \mapsto Bx + f_0(x)$.

Si y est solution de (L) sur $\left]-1,1\right[$, on a nécessairement $y|_{]0,1[} \in S_1(L)$ et $y|_{]-1,0[} \in S_2(L)$. Il existe donc des constantes réelles A_1, B_1, A_2, B_2 telles que :

$$\forall x \in \left]0,1\right[, \quad y = \frac{A_1}{x} + B_1 x + f_0(x)$$

$$\forall x \in \left]-1,0\right[, \quad y = \frac{A_2}{x} + B_2 x + f_0(x)$$

Sachant que f_0 est de classe C^∞ sur $\left]-1,1\right[$ avec $f_0(0) = f_0'(0) = 0$, la continuité de y en 0 nécessite $A_1 = A_2 = 0$, puis celle de y' donne $B_1 = B_2$.
Finalement, les solutions de (L) sur $\left]-1,1\right[$ sont les fonctions $x \mapsto Bx + f_0(x)$. Elles constituent une droite affine.

> Remarquer que, dans cette dernière partie de l'étude, la recherche de conditions nécessaires n'est pas suivie d'une réciproque puisque l'on sait déjà que les fonctions trouvées sont effectivement solutions sur $\left]-1,1\right[$.

Ex. 6

On considère l'équation différentielle :

$$x''(t) + p(t)\,x'(t) + q(t)\,x(t) = 0 \qquad (E)$$

où p et q sont respectivement continu et de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe x_1 et x_2 solutions de (E) telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x_1(t)\,x_2(t) = 1.$$

- *Condition nécessaire*

> En écrivant que (E) possède deux solutions inverses l'une de l'autre, on obtient deux relations différentielles vérifiées par une même fonction x. Il reste à éliminer x entre ces deux équations pour obtenir une condition nécessaire vérifiée par p et q.

Notons que, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, les solutions de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$.
S'il existe deux solutions x de y de (E) telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t)\,y(t) = 1$$

alors $x(t)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \frac{1}{x(t)}$$

c'est-à-dire que x et $\dfrac{1}{x}$ sont solutions de (E).

Avec $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{x'}{x^2}$ et $\left(\dfrac{1}{x}\right)'' = \dfrac{2x'^2 - xx''}{x^3}$ on en déduit que :

$$(1) \quad \forall t \in \mathbb{R},\ x''(t) + p(t)\,x'(t) + q(t)\,x(t) = 0$$

$$(2) \quad \forall t \in \mathbb{R},\ 2x'^2(t) - x(t)\,x''(t) - p(t)\,x(t)\,x'(t) + q(t)\,x^2(t) = 0$$

relations que nous écrirons plus simplement :

$$(1) \quad x'' + px' + qx = 0$$

$$(2) \quad 2x'^2 - xx'' - pxx' + qx^2 = 0.$$

En effectuant sur ces équations la transformation symbolisée par $(3) = (1) \times x + (2)$, on obtient :

$$(3) \quad x'^2 + qx^2 = 0$$

ce qui donne une première condition :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ q(t) \leqslant 0 \tag{i}$$

Puisque q, x et x' sont, au moins, de classe $\mathcal{C}^1$, l'équation (3) donne :

$$2x'x'' + 2xx'q + q'x^2 = 0 \quad \text{soit} \quad 2\frac{x'}{x}\left(\frac{x''}{x} + q\right) + q' = 0 \quad (4)$$

Or (1) s'écrit aussi :

$$\frac{x''}{x} + q = -p\frac{x'}{x}$$

d'où, avec (4), $-2p\dfrac{x'^2}{x^2} + q' = 0$ et, puisque d'après (3), $\dfrac{x'^2}{x^2} = -q$, il vient finalement :

$$2pq + q' = 0 \tag{ii}$$

- *Condition suffisante*

On suppose maintenant que p et q vérifient (i) et (ii).

En regardant (ii) comme une équation linéaire du premier ordre en q, il vient que si q s'annule en un point $t_0 \in \mathbb{R}$ alors q est identiquement nulle. Il y a donc deux cas à considérer :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ q(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ q(t) \neq 0.$$

• Premier cas : q est identiquement nulle.

Alors les fonctions constantes sont solutions de (E) et, quel que soit $k \in \mathbb{R}^*$, le couple (x_1, x_2) constitué des fonctions constantes égales à k et $\dfrac{1}{k}$ vérifie bien $x_1 x_2 = 1$.

• Deuxième cas : q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc, d'après (i), $\forall t \in \mathbb{R},\ q(t) < 0$.

> Dans l'étude des conditions nécessaires, une équation est particulièrement intéressante, c'est (3) car elle est du premier ordre et permet aisément d'expliciter x.

Posons :

$$u(t) = \int_0^t \sqrt{-q(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ x_1(t) = e^{u(t)},\ x_{-1}(t) = e^{-u(t)}.$$

x_1 et x_{-1} sont solutions de $x'^2 + qx^2 = 0$ avec :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x_1(t)\,x_{-1}(t) = 1.$$

Pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, on a :

$$x_\varepsilon(t) = e^{\varepsilon u(t)} \quad \text{donc} \quad x'_\varepsilon(t) = \varepsilon u'(t) e^{\varepsilon u(t)} = \varepsilon\sqrt{-q(t)}\,x_\varepsilon(t)$$

et, puisque q ne s'annule pas :

$$x''_\varepsilon(t) = \frac{-\varepsilon q'(t)}{2\sqrt{-q(t)}}x_\varepsilon(t) - q(t)x_\varepsilon(t).$$

Avec $q' = -2pq$, on en déduit :

$$x''_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon\, p(t)\, q(t)}{\sqrt{-q(t)}}x_\varepsilon(t) - q(t)\,x_\varepsilon(t) = -\,\varepsilon\, p(t)\sqrt{-q(t)}\,x_\varepsilon(t) - q(t)x_\varepsilon(t)$$

et enfin :

$$x_\varepsilon''(t) + p(t)x_\varepsilon'(t) + q(t)x_\varepsilon(t) = 0.$$

Ainsi x_1 et x_{-1} sont solutions de (E) telles que $x_1x_{-1} = 1$.

En conclusion, une condition nécessaire et suffisante est :

$$q \leqslant 0 \ \ (\mathrm{i}) \quad \text{et} \quad q' + 2pq = 0 \ \ (\mathrm{ii}).$$

On peut remarquer que (ii) donne $q = \lambda e^{-2P}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et :

$$P \ :\ t \mapsto \int_0^t p(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Les conditions (i) et (ii) sont donc équivalentes à :

$$q = \lambda e^{-2P},\ \ \lambda \leqslant 0,\ \ P \ :\ t \mapsto \int_0^t p.$$

Ex. 7

Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - 2x\int_0^x f(t)\cos(x-t)\mathrm{d}t = 1.$$

> Dans ce genre de situation, il est utile de commencer par constater que, si f est solution du problème, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
>
> Ceci étant fait, une démarche usuelle consiste à déterminer une équation différentielle dont f est solution. Dans certains exemples, il sera plus facile d'exhiber une équation différentielle vérifiée par une fonction F apparentée (simplement) à f, et c'est le cas ici avec :
>
> $$F \ :\ x \mapsto \int_0^x f(t)\cos(x-t)\mathrm{d}t.$$

- Si f est solution du problème, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = 1 + 2x\cos x\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t + 2x\sin x\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$$

donc, sachant que lorsque u est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x u(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, on obtient que f de classe $\mathcal{C}^n$ implique f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

En conséquence il vient, par récurrence, que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

- Étant donné $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, introduisons $F \ :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\cos(x-t)\mathrm{d}t$.

En écrivant, comme précédemment :

$$F(x) = \cos x\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t + \sin x\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t,$$

on voit que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = f(x) - \sin x\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t + \cos x\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$F''(x) = f'(x) - \cos x\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t - \sin x\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= f'(x) - \int_0^x f(t)\cos(x-t)\mathrm{d}t = f'(x) - F(x).$$

Ainsi, avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \underset{(e_i)}{\mathrm{mat}}\left(u_1, u_2, u_3\right)$, on a :

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$$

et le changement de fonction inconnue, défini par $X(t) = P\,Y(t)$, transforme le système différentiel en $Y'(t) = T\,Y(t)$ soit aussi, en posant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = y_2 + y_3 \\ y_3' = y_3 \end{cases}$$

Ce second système se résoud «en cascade» et on obtient successivement :

$$y_3 = \gamma e^t, \quad y_2 = (\beta + \gamma t)e^t, \quad y_1 = \left(\alpha + \beta t + \frac{\gamma}{2}t^2\right)e^t$$

d'où, avec $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \left[2\,\alpha + \beta + \gamma + (2\,\beta + \gamma)t + \gamma t^2\right]e^t \\ x_2 &= -\left[2\,\alpha + \beta + (2\,\beta + \gamma)t + \gamma t^2\right]e^t \\ x_3 &= -\left[2\,\alpha - \beta + (2\,\beta - \gamma)t + \gamma t^2\right]e^t \end{aligned}$$

La condition $X(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ donne alors :

$$\begin{cases} 2\,\alpha + \beta + \gamma = a \\ 2\,\alpha + \beta = -b \\ 2\,\alpha - \beta = -c \end{cases}$$

d'où on tire :

$$\alpha = -\frac{1}{4}(b + c), \quad \beta = -\frac{1}{2}(b - c), \quad \gamma = a + b$$

et finalement :

$$\begin{cases} x_1 = \left[a + (a + c)t + (a + b)t^2\right]e^t \\ x_2 = \left[b - (a + c)t - (a + b)t^2\right]e^t \\ x_3 = \left[c + (a + 2b - c)t - (a + b)t^2\right]e^t \end{cases}$$

En conséquence, la fonction $t \mapsto f(t) - kt$ ne s'annule pas sur $]0, a[$. Puisqu'elle est continue, elle est donc de signe constant. Or, $f(t) - kt < 0$ pour $0 < t < a$, donc :

$$\forall t \in]0, a[, f(t) - kt < 0.$$

c) Supposons $a < +\infty$.

La fonction f serait alors croissante et majorée sur $[0, a[$ (par ka), elle admettrait donc une limite ℓ en a et on aurait aussi :

$$\lim_{t \to a} f'(t) = \lambda + \frac{\ell^2}{1 + a^2}.$$

Ainsi la fonction $\tilde{f} :]-a, a] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\tilde{f}(t) = f(t) \text{ pour } -a < t < a \quad \text{et} \quad \tilde{f}(a) = \ell$$

serait solution de (E) sur $]-a, a]$ vérifiant $\tilde{f}(0) = 0$ et prolongeant strictement f, ce qui est contraire au caractère maximal de f.

En conséquence, on a $a = +\infty$ et donc $I = \mathbb{R}$.

Ex. 10

On considère l'équation différentielle (E) : $y'^2 - yy'' = 1$.

1) Soit f une solution de (E) sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur I.

En considérant la fonction $g = \dfrac{f'^2 - 1}{f^2}$, calculer f.

Indication. On montrera que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

2) f désigne maintenant une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Montrer que l'ensemble des zéros de f est un fermé de $\mathbb{R}$ dont tous les points sont isolés.

En déduire que cet ensemble a quatre formes possibles selon qu'il est fini ou infini, minoré ou non minoré, majoré ou non majoré.

3) Déterminer toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

1) En tant que solution de (E) sur I, f est deux fois dérivable et, puisqu'elle ne s'annule pas, on a $g \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$.

Le calcul donne :

$$g' = \frac{2f'}{f^3}(f f'' - f'^2 + 1) = 0.$$

On obtient donc :

$$\frac{f'^2 - 1}{f^2} = \lambda \quad \text{soit aussi} \quad \frac{f''}{f} = \lambda.$$

Ainsi, f est solution sur I de l'équation linéaire du second ordre :

$$y'' - \lambda y = 0 \quad \text{avec } 0 \notin f(I). \qquad (H)$$

On a alors trois cas possibles :

- $\lambda > 0$. On pose $\omega = \sqrt{\lambda}$, (H) s'écrit $y'' - \omega^2 y = 0$ et on a :
$$f(x) = \lambda \operatorname{ch} \omega x + \mu \operatorname{sh} \omega x\,;$$
- $\lambda < 0$. On pose $\omega = \sqrt{-\lambda}$, (H) s'écrit $y'' + \omega^2 y = 0$ et on a :
$$f(x) = A \sin\left[\omega\left(x - x_0\right)\right]\,;$$
- $\lambda = 0$. (H) s'écrit $y'' = 0$ et on a :
$$f(x) = A\left(x - x_0\right).$$

> Il faut prendre garde au fait que ce ne sont là que des conditions nécessaires. Il reste à examiner quelles sont, parmi ces fonctions, celles qui sont effectivement solutions de (E) et quelle(s) condition(s) imposer à I pour qu'elles ne s'annulent pas sur I.

- Dans le premier cas, $\lambda > 0$ avec $f(x) = \lambda \operatorname{ch} \omega x + \mu \operatorname{sh} \omega x$, on obtient :
$$f'^2(x) - f(x) f''(x) = \omega^2\left(\mu^2 - \lambda^2\right).$$

Donc f est solution de (E) si et seulement si $\omega^2\,\mu^2 - \omega^2\,\lambda^2 = 1$. Cette condition équivaut à l'existence de $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\omega\mu = \varepsilon \operatorname{ch}\left(\omega x_0\right)$ et $\omega\lambda = -\varepsilon \operatorname{sh}\left(\omega x_0\right)$ ($\varepsilon \in \{-1, 1\}$ est tel que $\mu = \varepsilon\,|\mu|$) et il vient finalement :
$$f(x) = \frac{\varepsilon}{\omega} \operatorname{sh}\left[\omega\left(x - x_0\right)\right] \quad \text{d'où} \quad I \subset \left]x_0\,, +\infty\right[\ \text{ ou } \ I \subset \left]-\infty, x_0\right[.$$

- Dans le deuxième cas, $\lambda < 0$ avec $f(x) = A \sin\left[\omega\left(x - x_0\right)\right]$, on obtient :
$$f'^2(x) - f(x) f''(x) = A^2 \omega^2.$$

Donc f est solution de (E) si et seulement si $A^2\omega^2 = 1$ et il vient :
$$f(x) = \frac{\varepsilon}{\omega} \sin\left[\omega\left(x - x_0\right)\right] \quad \text{d'où} \quad I \subset \left]x_0 + \frac{k\pi}{\omega}\,, x_0 + (k+1)\frac{\pi}{\omega}\right[,\ k \in \mathbb{Z}.$$

- Enfin, dans le troisième cas, avec $f(x) = A\left(x - x_0\right)$, on obtient :
$$f'^2(x) - f(x) f''(x) = A^2$$

et il vient :
$$f(x) = \varepsilon\left(x - x_0\right) \quad \text{d'où} \quad I \subset \left]x_0\,, +\infty\right[\ \text{ ou } \ I \subset \left]-\infty, x_0\right[.$$

2) Posons $Z_f = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = 0\right\}$.

Z_f est un fermé de $\mathbb{R}$ en tant qu'image réciproque du fermé $\{0\}$ par la fonction continue f.

Pour $x \in Z_f$, avec l'équation (E), on obtient $f'^2(x) = 1$, donc $f'(x) = \pm 1$ et la fonction continue f' reste de signe constant sur un intervalle $\left]x - \alpha, x + \alpha\right[$. Il en résulte que f est strictement monotone sur cet intervalle et donc $f(t) \neq 0$ pour tout $t \in \left]x - \alpha, x + \alpha\right[\setminus \{x\}$. On a ainsi montré que x est un point isolé de Z_f.

Précisons maintenant les possibilités pour l'ensemble Z_f.

Si Z_f est non vide et majoré, on sait qu'il admet une borne supérieure S. Cette borne supérieure est limite d'une suite de points de Z_f donc, par continuité de f, on a $f(S) = 0$, ce qui montre que S est le plus grand élément de Z_f.

De même, si Z_f est non vide et minoré, il admet un plus petit élément.

En conséquence, si Z_f est non vide, on a quatre possibilités :

(1) si Z_f est fini :

$$Z_f = \{x_1, \dots, x_n\} \quad \text{avec} \quad x_i < x_{i+1} ;$$

(2) si Z_f est infini minoré et non majoré :

$$Z_f = \{x_i \;/\; i \in \mathbb{N}\} \quad \text{avec} \quad x_i < x_{i+1} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty ;$$

(3) si Z_f est infini majoré et non minoré :

$$Z_f = \{x_i \;/\; i \in \mathbb{N}\} \quad \text{avec} \quad x_{i+1} < x_i \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty ;$$

(4) si Z_f est infini non majoré et non minoré :

$$Z_f = \{x_i \;/\; i \in \mathbb{Z}\} \quad \text{avec} \quad x_i < x_{i+1} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n\to-\infty} x_n = -\infty.$$

3) D'après le 1), le cas $Z_f = \varnothing$ est impossible car, lorsque f solution de (E) ne s'annule pas sur I, l'intervalle I n'est jamais égal à $\mathbb{R}$.

Il nous reste donc, pour Z_f, les quatre cas précédents. En tenant compte du 1) on exhibe les solutions f possibles.

Lorsque Z_f est minoré, si x_1 est le plus petit zéro de f, sur $]-\infty, x_1[$ on a nécessairement :

$$f(x) = \frac{\varepsilon_0}{\omega_0}\operatorname{sh}\Big(\omega_0\,(x_1 - x)\Big) \quad \text{ou} \quad f(x) = \varepsilon_0(x_1 - x), \quad \varepsilon_0 \in \{-1, 1\}.$$

Pour la suite, nous poserons :

$$f_{-\infty,1} \;:\; x \mapsto \frac{1}{\omega_0}\operatorname{sh}\Big(\omega_0\,(x_1 - x)\Big),$$
$$\text{et} \quad g_{-\infty,1} \;:\; x \mapsto x_1 - x.$$

De même, lorsque Z_f est majoré, si x_n est le plus grand zéro de f, sur $]x_n, +\infty[$ on a nécessairement :

$$f(x) = \varepsilon_n f_{n,+\infty}(x) \quad \text{ou} \quad f(x) = \varepsilon_n\, g_{n,+\infty}(x), \quad \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$$

avec $f_{n,\infty} \;:\; x \mapsto \dfrac{1}{\omega_n}\operatorname{sh}\Big(\omega_n\,(x - x_n)\Big)$ et $g_{n,+\infty} \;:\; x \mapsto x - x_n$.

Enfin, si $\operatorname{Card} Z_f \geqslant 2$ et si x_i, x_{i+1} sont deux zéros consécutifs, sur $]x_i, x_{i+1}[$ on a nécessairement :

$$f(x) = \varepsilon_i f_{i,i+1}(x) \quad \varepsilon_i \in \{-1, 1\}$$

où on a posé $f_{i,i+1} \;:\; x \mapsto \dfrac{1}{\omega_i}\sin\Big(\omega_i\,(x - x_i)\Big)$ avec $\omega_i = \dfrac{\pi}{x_{i+1} - x_i}$.

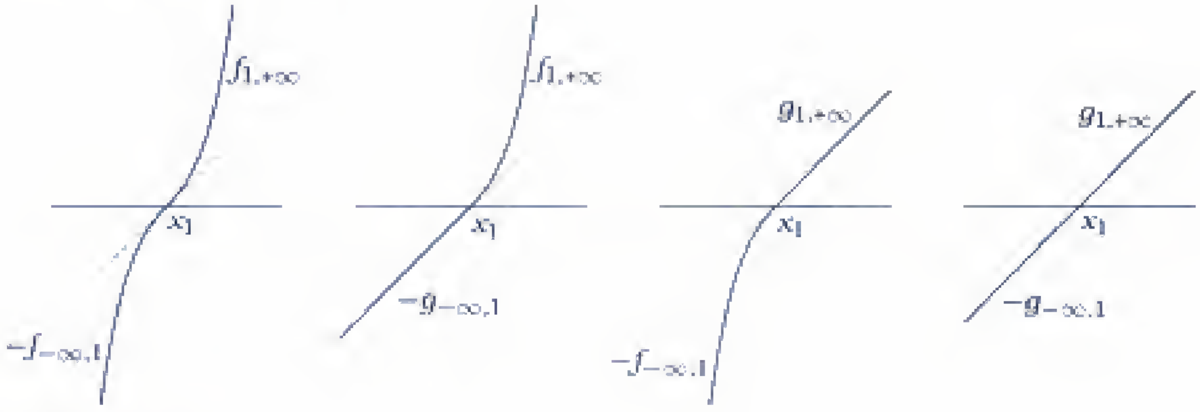
En fixant arbitrairement Z_f de l'une des quatre formes dégagées dans le 2), on obtient toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ par raccordement des fonctions précédentes.

On peut constater que, quel que soit le choix des constantes ε_i, on a affaire à des raccordements continus en chaque point x_i. Par contre, pour que la fonction f ainsi définie soit dérivable en x_i, il est nécessaire que $\omega_i = -\omega_{i-1}$. Ces conditions étant réalisées, il reste des fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ (en chaque point x_i, $f'(x_i) = \pm 1$ et $f''(x_i) = 0$) et solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Donnons ci-après les diverses courbes intégrales.

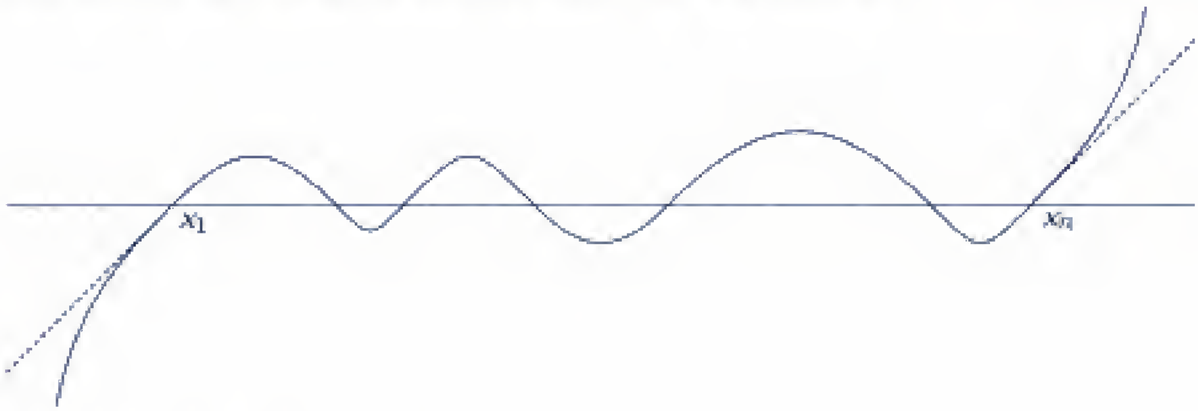
- 1[er] cas : Z_f est fini.

a) **Card** $Z_f = 1 : Z_f = \{x_1\}$.



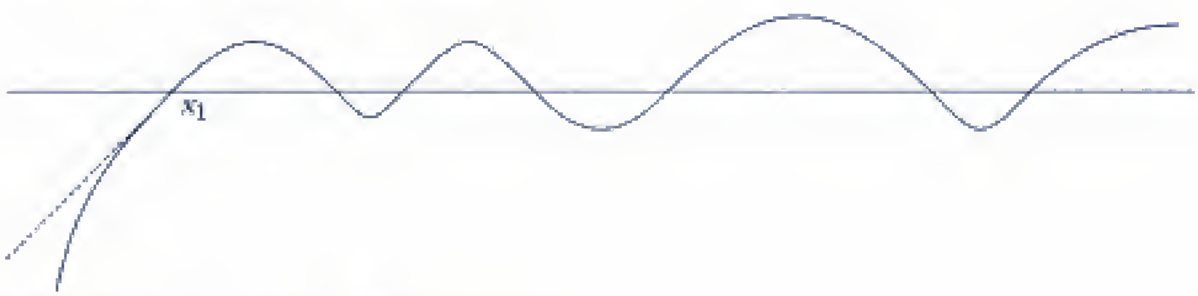
b) **Card** $Z_f = n \geqslant 2$

Sur chaque intervalle extrême on a deux cas possibles que l'on représente, l'un en trait plein, l'autre en pointillé. Le dessin suivant représente donc quatre courbes.

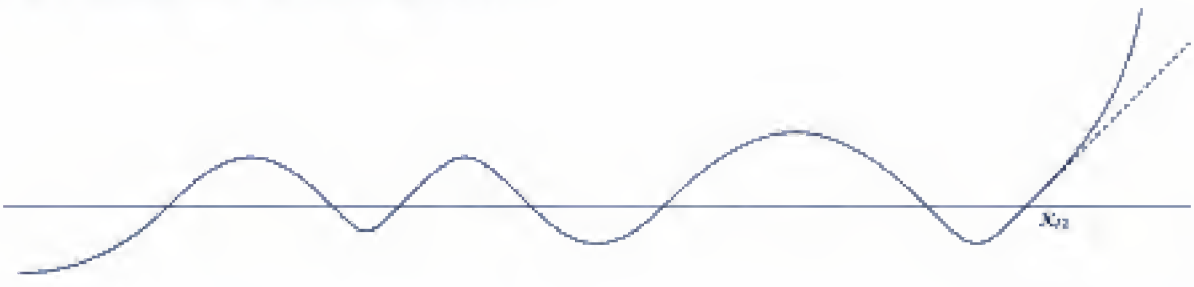


- 2[e] cas : Z_f est infini.

a) Z_f est minoré : x_1 est le plus petit zéro.



b) Z_f est majoré : x_n est le plus grand zéro.



c) Z_f n'est ni majoré ni minoré.

À ces courbes, il convient d'ajouter leurs symétriques par rapport à Ox.

Ⓒ Dérivées partielles – Différentielle – Gradient

Ex. 11

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x, 0) = 0$.

Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = y\,g(x, y).$$

> Pour x fixé, $f(x, y) = f(x, y) - f(x, 0)$ s'interprète comme l'accroissement sur $[0, y]$ de la fonction partielle $t \mapsto f(x, t)$. En ce qui concerne la définition de g, on est ainsi ramené à un problème de fonction d'une variable réelle.

Notons h la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

La continuité de $t \mapsto h(x, t)$ permet d'écrire :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = f(x, y) - f(x, 0) = \int_0^y h(x, t)\mathrm{d}t.$$

Pour $y \neq 0$, le changement de variable défini par $t = uy$ donne alors :

$$f(x, y) = y \int_0^1 h(x, uy)\,\mathrm{d}u.$$

En remarquant que cette égalité reste vraie lorsque $y = 0$, on obtient finalement :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = y\,g(x, y) \quad \text{avec} \quad g(x, y) = \int_0^1 h(x, uy)\,\mathrm{d}u.$$

> Il reste à démontrer que la fonction g ainsi définie est, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}^2$. Une démonstration par récurrence s'impose.

La fonction $(x, y, u) \mapsto h(x, uy)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ donc, l'intervalle d'intégration étant compact, en corollaire du théorème de dérivation sous le signe somme, on obtient que les fonctions partielles :

$$x \mapsto \int_0^1 h(x, uy)\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad y \mapsto \int_0^1 h(x, uy)\,\mathrm{d}u$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x}(x, uy)\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \int_0^1 u\frac{\partial h}{\partial y}(x, uy)\,\mathrm{d}u.$$

De même, l'intervalle d'intégration étant compact, la continuité sur $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ de :

$$(x,y,u) \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,uy) \quad \text{et} \quad (x,y,u) \mapsto u\frac{\partial h}{\partial y}(x,uy)$$

donne celle sur $\mathbb{R}^2$ de :

$$\frac{\partial g}{\partial x} \; : \; (x,y) \mapsto \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x}(x,uy)\,du \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y} \; : \; (x,y) \mapsto \int_0^1 u\frac{\partial h}{\partial y}(x,uy)\,du.$$

On a ainsi montré que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Supposons maintenant g de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \frac{\partial^n g}{\partial x^{n-k}\,\partial y^k}(x,y) = \int_0^1 u^k \frac{\partial^n h}{\partial x^{n-k}\,\partial y^k}(x,uy)\,du.$$

Chaque fonction :

$$(x,y,u) \mapsto u^k \frac{\partial^n h}{\partial x^{n-k}\,\partial y^k}(x,uy)$$

étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et l'intervalle d'intégration étant compact, on obtient, comme précédemment, que chaque :

$$\frac{\partial^n g}{\partial x^{n-k}\,\partial y^k}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc que g est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}^2$, avec :

$$\forall k \in [\![0,n+1]\!],\ \frac{\partial^{n+1} g}{\partial x^{n+1-k}\,\partial g^k}(x,y) = \int_0^1 u^k \frac{\partial^{n+1} h}{\partial x^{n+1-k}\,\partial g^k}(x,uy)\,du.$$

On a ainsi montré par récurrence que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}^2$, donc que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0,n]\!], \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^n g}{\partial x^{n-k}\,\partial g^k}(x,y) = \int_0^1 u^k \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n-k}\,\partial y^{k+1}}(x,uy)\,du.$$

Ex. 12

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ telle que $df_0 = 0$. On suppose de plus que la matrice $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de terme général :

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(0)$$

est définie-négative.

1) Prouver qu'il existe $(\alpha, r) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ tel que :

$$\forall x \in B(0,r),\ g(x) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \leqslant -\alpha \| x \|^2$$

où $B(0,r)$ désigne la boule ouverte de $\mathbb{R}^n$, de centre 0 et de rayon r.

Indication. Pour x fixé dans $\mathbb{R}^n$ et $i \in [\![1,n]\!]$, on pourra considérer la fonction :

$$\varphi \; : \; [0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx).$$

2) Soit $u \; : \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que, quel que soit $t \in \mathbb{R}$:

$$u'(t) = \left(\operatorname{grad} f\right)_{u(t)} \quad \text{avec } u(0) = x_0,\ x_0 \in B(0,r).$$

Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = 0$.

Indication. Montrer que la fonction $t \mapsto \| u(t) \|^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

1) On considère que $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

> La première chose à faire est bien sûr d'exprimer $g(x)$ en fonction des dérivées partielles :
> $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}.$$

Étant donné $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(tx)$.

On a $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ avec $\varphi'(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(tx)$ donc, puisque $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(tx)\mathrm{d}t,$$

$$\text{et}\quad g(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(tx)\mathrm{d}t.$$

d'où encore :

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j a_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(tx) - a_{ij}\right)\mathrm{d}t.$$

> Rappelons qu'une matrice $A = [a_{ij}]$ symétrique réelle d'ordre n est définie-positive (resp. définie-négative) lorsque l'application :
> $$q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$
> usuellement appelée une forme quadratique, vérifie $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $q(x) > 0$ (resp. $q(x) < 0$).

Soit q la forme quadratique définie par :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

pour $x \neq 0$, on a :

$$q(x) = \|x\|^2 q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \quad \text{et} \quad \frac{x}{\|x\|} \in S$$

où S désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. S étant un compact de $\mathbb{R}^n$ (fermé borné) et q étant continue sur S (fonction polynôme), il existe $v \in S$ tel que :

$$q(v) = \max_{x \in S} q(x).$$

q est définie-négative donc $q(v) < 0$ et il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $q(v) = -2a$, ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) \leqslant -2a\|x\|^2.$$

Chaque fonction $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}$ est continue en 0, donc il existe $r_{ij} > 0$ tel que :

$$\|x\| < r_{ij} \;\Rightarrow\; \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(0)\right| \leqslant \frac{a}{n^2}$$

et il en résulte :

$$\|x\| < r_{ij} \;\Rightarrow\; \forall t \in [0,1],\ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(tx) - a_{ij}\right| \leqslant \frac{a}{n^2}.$$

En posant $r = \min\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} r_{ij}$ on a $r > 0$ et :

$$\|x\| < r \Rightarrow \forall(i,j)\in [\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!], \forall t\in[0,1], \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(tx) - a_{ij}\right| \leqslant \frac{\alpha}{n^2}$$

donc :

$$\|x\| < r \Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(tx) - a_{ij}\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\alpha}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_i x_j\right| \leqslant \alpha\|x\|^2$$

(car $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_i x_j\right| = \|x\|^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{|x_i|}{\|x\|}\frac{|x_j|}{\|x\|} \leqslant n^2\|x\|^2$).

Finalement, pour $\|x\| < r$, on a $g(x) \leqslant -\alpha\|x\|^2$.

2) Il est raisonnalble d'espérer pouvoir utiliser le résultat du 1) et, pour ce faire, on va essayer de montrer que $u(t)\in \mathcal{B}(0,r)$ quel que soit $t\in\mathbb{R}_+$.

On a $g\big(u(t)\big) = \left\langle \operatorname{grad} f_{u(t)} \,\middle|\, u(t)\right\rangle = \left\langle u'(t)\,\middle|\,u(t)\right\rangle = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|^2$.

On va donc s'intéresser aux variations de $t\mapsto\|u(t)\|$.

Soit $A = \left\{\alpha\in\mathbb{R}_+ \;/\; \forall t\in[0,\alpha], \left\langle u'(t)\,\middle|\,u(t)\right\rangle \leqslant 0\right\}$.

- A est non vide car $\left\langle u'(0)\,\middle|\,u(0)\right\rangle = g\big(u(0)\big) \leqslant -\alpha\|u(0)\|^2 < 0$.
- Supposons A majoré. Alors il existe $\gamma\in\mathbb{R}_+$, $\gamma = \sup A$.

Par continuité de $t\mapsto\left\langle u'(t)\,\middle|\,u(t)\right\rangle$ on a $\left\langle u'(\gamma)\,\middle|\,u(\gamma)\right\rangle \leqslant 0$, et :

$$\forall t\in[0,\gamma], \left\langle u'(t)\,\middle|\,u(t)\right\rangle \leqslant 0.$$

Ainsi $t\mapsto\|u(t)\|^2$ est décroissante sur $[0,\gamma]$, donc $\|u(\gamma)\|\leqslant\|u(0)\|$ et $u(\gamma)\in\mathcal{B}(0,r)$; puis, par continuité de u, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t\in[\gamma,\gamma+\eta], u(t)\in\mathcal{B}(0,r)$$

($\mathcal{B}(0,r) = \left\{x\in\mathbb{R}^n, \|x\| < r\right\}$ est ouvert) donc :

$$\forall t\in[0,\gamma+\eta], \left\langle u'(t)\,\middle|\,u(t)\right\rangle \leqslant -\alpha\|u(t)\|^2 \leqslant 0$$

ce qui donne $\gamma+\eta\in A$, qui est en contradiction avec $\gamma = \sup A$.

En conséquence :

- A est non majoré et donc $A = \mathbb{R}_+$;
- $t\mapsto\|u(t)\|$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc admet une limite en $+\infty$;
- $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $u(t)\in\mathcal{B}(0,r)$, $g\big(u(t)\big)\leqslant -\alpha\|u(t)\|^2$.

On a alors $\|u(t)\|^2 - \|u(0)\|^2 = 2\displaystyle\int_0^t g\big(u(\xi)\big)\mathrm{d}\xi$, donc :

$$\|u(t)\|^2 \leqslant \|u(0)\|^2 - 2\alpha\int_0^t \|u(\xi)\|^2\mathrm{d}\xi$$

et, en posant $\lim\limits_{+\infty}\|u(\xi)\| = \ell \geqslant 0$, on obtient :

$$\forall\xi\in\mathbb{R}_+, \|u(\xi)\| \geqslant \ell$$

donc :

$$\forall t\in\mathbb{R}_+, \|u(t)\|^2 \leqslant \|u(0)\|^2 - 2\alpha t\ell^2,$$

ce qui nécessite $\ell = 0$ c'est-à-dire $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 0$.

donc :

$$f(x_n) \leqslant f(x) + \frac{1}{n}\left(\|x\| - \|x_n\|\right) \leqslant f(x) + \frac{1}{n}\|x - x_n\|.$$

Pour $u \in \mathbb{R}^k$, tel que $\|u\| = 1$ et $t \in \mathbb{R}$, l'inégalité précédente, avec $x = x_n + tu$, donne :

$$f(x_n) \leqslant f(x_n + tu) + \frac{1}{n}|t| \quad \text{soit} \quad f(x_n) - f(x_n + tu) \leqslant \frac{1}{n}|t|.$$

Imposons de plus $t < 0$, cette dernière inégalité devient :

$$\frac{f(x_n) - f(x_n + tu)}{-t} \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{soit} \quad \frac{f(x_n + tu) - f(x_n)}{t} \leqslant \frac{1}{n}.$$

En faisant tendre t vers 0, avec $t < 0$, on obtient alors :

$$df_{x_n}(u) \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left\langle \operatorname{grad} f(x_n) \,\middle|\, u \right\rangle \leqslant \frac{1}{n}.$$

Il reste à prendre :

$$u = \frac{\operatorname{grad} f(x_n)}{\left\|\operatorname{grad} f(x_n)\right\|}$$

pour obtenir :

$$\left\|\operatorname{grad} f(x_n)\right\| \leqslant \frac{1}{n}.$$

D Difféomorphismes

Ex. 14

Étant donné $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on suppose qu'il existe $k \in \left]0, 1\right[$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leqslant k$.

On pose :

$$F \;:\; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto \left(x + f(y), y + f(z), z + f(x)\right).$$

1) Montrer que F est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $F(\mathbb{R}^3)$.

2) On admet la propriété suivante : si $U \subset \mathbb{R}^3$ est une partie non vide, ouverte et fermée, alors $U = \mathbb{R}^3$.

Montrer que $F(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$ et conclure.

1) • F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ puisque chacune de ses composantes est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Vérifions, dans un premier temps, que $dF_{(x,y,z)}$, différentielle de F en (x, y, z), est inversible quel que soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire que $dF_{(x,y,z)} \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$.

Formons la matrice jacobienne de F en (x, y, z) :

$$JF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & f'(y) & 0 \\ 0 & 1 & f'(z) \\ f'(x) & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On a $\det JF(x, y, z) = 1 + f'(x)f'(y)f'(z)$ et, par hypothèse, $|f'(x)f'(y)f'(z)| \leqslant k^3$, donc :

$$JF(x, y, z) \geqslant 1 - k^3 > 0.$$

On en déduit que $JF(x, y, z) \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ donc que $dF_{(x,y,z)} \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$.

- L'injectivité de F peut se déduire d'une inégalité du type :

$$\|F(X+H) - F(X)\| \geqslant \lambda \|H\|, \quad (X, H) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

à condition, bien sûr, qu'elle soit présente.

Il faut donc commencer par choisir une norme sur $\mathbb{R}^3$.

Munissons $\mathbb{R}^3$ de la norme définie par :

$$\forall X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \| X \| = \max(|x|, |y|, |z|).$$

Avec l'hypothèse $|f'| \leqslant k$, l'inégalité des accroissements finis donne :

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(x')| \leqslant k|x - x'|.$$

On en déduit pour tous $X = (x, y, z)$ et $X' = (x', y', z')$ de $\mathbb{R}^3$:

$$|x - x' + f(y) - f(y')| \leqslant |x - x'| + k|y - y'| \leqslant (1+k)\|X - X'\|$$
$$|y - y' + f(z) - f(z')| \leqslant |y - y'| + k|z - z'| \leqslant (1+k)\|X - X'\|$$
$$|z - z' + f(x) - f(x')| \leqslant |z - z'| + k|x - x'| \leqslant (1+k)\|X - X'\|$$

donc $\|F(X) - F(X')\| \leqslant (1+k)\|X - X'\|$: F est $(1+k)$-lipschitzienne.

Soit maintenant $H = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ et $X' = X + h$.

Dans le cas où $\| H \| = |u|$, écrivons :

$$\| F(X+H) - F(X) \| \geqslant |u + f(y+v) - f(y)| \geqslant \Big| |u| - |f(y+v) - f(y)| \Big|,$$

or $|f(y+v) - f(y)| \leqslant k|v| \leqslant k\| H \|$ donc, compte tenu de $|u| = \| H \|$:

$$|u| - |f(y+v) - f(y)| \geqslant \| H \| - k\| H \| = (1-k)\| H \| \geqslant 0$$

ainsi :

$$\| F(X+H) - F(X) \| \geqslant (1-k)\| H \|.$$

Dans les cas $\| H \| = |v|$ ou $\| H \| = |w|$, on obtient le même résultat en partant de :

$$|F(X+H) - F(X)| \geqslant |v + f(z+w) - f(z)|$$

$$\text{ou de} \quad |F(X+H) - F(x)| \geqslant |w + f(x+u) - f(x)|.$$

Puisque $1 - k > 0$, cette inégalité montre que $H \neq 0 \Rightarrow F(X+H) - F(X) \neq 0$, donc que F est injective.

À ce niveau de l'étude, puisque F est une injection de classe $\mathcal{C}^1$ dont la différentielle est inversible en tout point de $\mathbb{R}^3$, on sait que $F(\mathbb{R}^3)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et que F est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur cet ouvert.

2) Montrons maintenant que $F(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$.

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(F(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $F(\mathbb{R}^3)$ convergeant vers V (donc $V \in \overline{F(\mathbb{R}^3)}$).

Puisqu'elle converge, la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, et :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \|Y_n - Y_p\| = \|F(X_n) - F(X_p)\| \geqslant (1-k)\|X_n - X_p\|$$

montre, avec $1 - k > 0$, que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également de Cauchy donc convergente ($\mathbb{R}^3$ est complet).

Posons $U = \lim\limits_{n\to+\infty} X_n$, par continuité de F en U on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} F(X_n) = F(U) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{n\to+\infty} Y_n = F(U) \quad \text{ou encore} \quad V = F(U).$$

On en déduit $V \in F(\mathbb{R}^3)$, et, par caractérisation séquentielle, $F(\mathbb{R}^3)$ est un fermé.

Finalement, $F(\mathbb{R}^3)$ est non vide, ouvert et fermé. Donc, d'après la propriété admise, on a $F(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$ et F est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$.

Ex. 15

On munit $E = \mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 et telle que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$.
On pose $F(x) = f(\| x \|)x$ pour tout x de E.

1) Montrer que F est de classe C^1 et exprimer sa différentielle.

2) Montrer que pour tous x, h de E, $\|\mathrm{d}F_x(h)\| \geqslant f(\| x \|)\| h \|$.

3) Montrer que F est un C^1-difféomorphisme de E sur E.

1) Pour montrer que F est différentiable en x, il suffit d'exhiber une application linéaire $L \in \mathcal{L}(E)$ telle que :

$$F(x+h) = F(x) + L(h) + o(h).$$

- Exprimons d'abord la différentielle de la fonction norme : $x \mapsto \| x \|$.

Sachant que $\| x \| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$, que $x \mapsto \langle x \mid x \rangle$ est de classe C^1 sur E, et que la fonction racine est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut affirmer que $\| \cdot \|$ est de classe C^1 sur $E \setminus \{0\}$.
Plus précisément, avec :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \sqrt{a+u} = \sqrt{a} + \frac{u}{2\sqrt{a}} + o(u), \quad u \in \mathbb{R},\ |u| < a$$

$$\text{et} \quad \forall x \in E,\ \langle x+h \mid x+h \rangle = \langle x \mid x \rangle + 2\langle x \mid h \rangle + o(h), \quad h \in E$$

on obtient :

$$\| x+h \| = \| x \| + \frac{\langle x \mid h \rangle}{\| x \|} + o(h) \quad \text{si} \quad \| x \| > 0.$$

La différentielle de $\| \cdot \|$ en $x \neq 0$ est donc $h \mapsto \dfrac{\langle x \mid h \rangle}{\| x \|}$.

- f étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on peut alors dire que, sur $E \setminus \{0\}$, F est de classe C^1 en tant que produit et composée de fonctions de classe C^1.

Sachant que $\forall a \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}, f(a+u) = f(a) + uf'(a) + o(u)$, pour $x \in E \setminus \{0\}$, on obtient :

$$\begin{aligned} F(x+h) &= f\left(\| x \| + \frac{\langle x \mid h \rangle}{\| x \|} + o(h)\right)(x+h) \\ &= \left(f(\| x \|) + \frac{\langle x \mid h \rangle}{\| x \|} f'(\| x \|)\right)(x+h) \\ &= F(x) + f(\| x \|)h + \frac{\langle x \mid h \rangle}{\| x \|} f'(\| x \|)x + o(h) \end{aligned}$$

donc :

$$\mathrm{d}F_x(h) = f(\| x \|) + \frac{\langle x \mid h \rangle}{\| x \|} f'(\| x \|)x.$$

Avec cette expression, la continuité sur $E \setminus \{0\}$ de la différentielle $\mathrm{d}F : x \mapsto \mathrm{d}F_x$ est évidente.

- Pour l'étude en 0, formons :

$$\begin{aligned} F(h) &= f(\|h\|)h \\ &= \left(f(0) + \|h\| f'(0) + o(h)\right) h \end{aligned}$$

$$\text{soit} \quad F(h) = \left(1 + o(h)\right) h = h + o(h).$$

Ainsi F est différentiable en 0 avec $\mathrm{d}F_0(h) = h$ c'est-à-dire $\mathrm{d}F_0 = \mathrm{Id}_E$.

Pour conclure, il reste à montrer la continuité de $\mathrm{d}F$ en 0, c'est-à-dire que $|||\mathrm{d}F_x - \mathrm{d}F_0|||$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

> $|||\cdot|||$ désigne la norme sur $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à la norme euclidienne $\|\cdot\|$ de E.

Pour $x \in E \setminus \{0\}$ et $h \in E$, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\langle x \mid h\rangle\right| \leqslant \|x\| \, \|h\|$$

on obtient :

$$\|\mathrm{d}F_x(h) - \mathrm{d}F_0(h)\| \leqslant \left|1 - f(\|x\|)\right| \|h\| + \|x\| \, \|h\| \, \left|f'(\|x\|)\right|$$

donc :

$$|||\mathrm{d}F_x - \mathrm{d}F_0||| \leqslant \left|1 - f(\|x\|)\right| + \|x\| \, \left|f'(\|x\|)\right|$$

et il en résulte $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F_0$. Donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E.

2) Pour $x = 0$, $\|\mathrm{d}F_0(h)\| = \|h\|$ et $f(0)\|h\| = \|h\|$: l'inégalité est vérifiée dans ce cas.

Pour $x \neq 0$, posons $r = \|x\|$ et $u = \dfrac{x}{\|x\|}$. Il vient alors :

$$\mathrm{d}F_x(h) = f(r)h + r\langle u \mid h\rangle f'(r)u$$

$$\begin{aligned} \text{puis} \quad \|\mathrm{d}F_x(h)\|^2 &= \langle \mathrm{d}F_x(h) \mid \mathrm{d}F_x(h)\rangle \\ &= f(r)^2\|h\|^2 + r^2\langle u \mid h\rangle^2 f'(r)^2 + 2rf(r)f'(r)\langle u \mid h\rangle^2 \end{aligned}$$

Par hypothèse sur f on a $f'(r) \geqslant 0$ (f est croissante) et $f(r) > 0$ (car f est croissante et $f(0) > 0$) donc :

$$\|\mathrm{d}F_x(h)\|^2 \geqslant f(r)^2\|h\|^2 \quad \text{soit aussi} \quad \|\mathrm{d}F_x(h)\| \geqslant f(\|x\|)\|h\|.$$

3)

> Sans doute s'agit-il ici d'utiliser la caractérisation des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes parmi les injections de classe $\mathcal{C}^1$.

Avec l'inégalité du 2), on voit que $\mathrm{d}F_x(h) = 0$ donne $f(\|x\|)\|h\| = 0$ donc $h = 0$ car on sait que $f(\|x\|) \geqslant f(0) = 1$.

Ainsi $\operatorname{Ker} \mathrm{d}F_x = \{0\}$, l'endomorphisme $\mathrm{d}F_x$ de E est injectif et puisque E est de dimension finie, c'est un automorphisme.

Pour montrer que F est une bijection, considérons d'abord la fonction :

$$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \; r \mapsto r f(r).$$

g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ avec :

$$g'(r) = f(r) + rf'(r) \geqslant f(r) \geqslant f(0) = 1$$

donc g est strictement croissante : c'est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $g([0, +\infty[)$. Or $g'(r) \geqslant 1$ donne $g(r) - g(0) \geqslant r$ soit aussi $g(r) \geqslant r$, il en résulte $\lim\limits_{r \to +\infty} g(r) = +\infty$ et, avec $g(0) = 0$, g est une bijection de $[0, +\infty[$ sur lui-même.

Pour tout $y \in E$, l'équation $y = f(\| x \|)x$, $x \in E$, donne $\| y \| = g(\| x \|)$ donc :

$$\| x \| = g^{-1}(\| y \|) \quad \text{puis} \quad x = \frac{y}{f(g^{-1}(\| y \|))}.$$

Ce calcul nous montre l'injectivité de F car chaque y a au plus un antécédent.

Par ailleurs, par définition, on a $g\left[g^{-1}(\| y \|)\right] = \| y \|$, c'est-à-dire :

$$g^{-1}(\| y \|) f\left(g^{-1}(\| y \|)\right) = \| y \| \quad \text{et donc} \quad \frac{\| y \|}{f\left(g^{-1}(\| y \|)\right)} = g^{-1}(\| y \|).$$

Ainsi, en posant $x = \dfrac{y}{f\left(g^{-1}(\| y \|)\right)}$, on obtient $\| x \| = g^{-1}(\| y \|)$ d'où :

$$x = \frac{y}{f(\| x \|)} \quad \text{soit aussi} \quad y = f(\| x \|)x = F(x).$$

Ce second calcul prouve que F est surjective et finalement F est bijective.

En tant que bijection de classe $\mathcal{C}^1$ dont la différentielle est inversible en tout point ($\forall x \in E$, $dF_x \in GL(E)$), F est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de E sur E.

(E) Équations aux dérivées partielles

Ex. 16

1) Soit $U = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,/\, u - v > 0\right\}$ et $\Phi \;:\; U \to \mathbb{R}^2$, $(u, v) \mapsto \left(u^2 + v^2, u + v\right)$.

Montrer que Φ est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de U sur un ouvert V à préciser.

2) Déterminer les applications $f \in \mathcal{C}^2(V, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (x, y) \in V,\; 2\left(y^2 - x\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left(y^2 - x\right) = 0 \qquad (E)$$

1) Déterminons $V = \Phi(U)$.

$(x, y) \in V$ si et seulement si il existe $(u, v) \in U$ tel que :

$$x = u^2 + v^2, \quad y = u + v.$$

Avec $u^2 + v^2 = (u + v)^2 - 2uv$, le système précédent équivaut à :

$$u + v = y, \quad 2uv = y^2 - x.$$

Ainsi, on a $(x, y) \in V$ si et seulement si l'équation :

$$T^2 - yT + \frac{y^2 - x}{2} = 0$$

admet deux solutions réelles distinctes donc si et seulement si :

$$y^2 - 4\left(\frac{y^2 - x}{2}\right) > 0 \quad \text{soit aussi} \quad 2x - y^2 > 0 : V = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x - y^2 > 0\right\}.$$

Pour tout $(x, y) \in V$, les couples $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x, y) = \Phi(u, v)$ sont (a, b) et (b, a) où a et b sont les racines distinctes de :

$$T^2 - yT + \frac{y^2 - x}{2} = 0.$$

Un seul de ces deux couples est dans U, donc Φ est injective, et finalement c'est une bijection de U sur V.

Formons la matrice jacobienne de Φ :

$$J\,\Phi\,(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

on obtient :

$$\det J\,\Phi\,(u,v) = 2(u-v) \neq 0 \text{ sur } U.$$

Puisqu'elle est de classe C^2 et que son jacobien ne s'annule pas sur U, la bijection Φ est un C^2-difféomorphisme de U sur V.

> Remarquons que, dans ce cas, on peut exprimer Φ^{-1} ce qui permet de vérifier directement que cette application est de classe C^2 sur V.

2) Pour $f \in C^2(V,\mathbb{R})$, on pose $g = f \circ \Phi$ donc :

$$\forall (u,v) \in U,\ g(u,v) = f\left(u^2+v^2, u+v\right).$$

On obtient alors pour tout $(u,v) \in U$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= 2u\frac{\partial f}{\partial x}\left(u^2+v^2, u+v\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(u^2+v^2, u+v\right)\\
\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= 2v\frac{\partial f}{\partial x}\left(u^2+v^2, u+v\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(u^2+v^2, u+v\right)\\
\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}(u,v) &= 4uv\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(u^2+v^2, u+v\right) + (2u+2v)\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\left(u^2+v^2, u+v\right)\\
&\qquad + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(u^2+v^2, u+v\right)\\
&= 2\left(y^2-x\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)
\end{aligned}$$

Donc f est solution de (E) sur V si et seulement si :

$$\forall (u,v) \in U,\ \frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}(u,v) = 2uv. \tag{1}$$

Puisque U est convexe, il vient :

$$\begin{aligned}
(1) &\iff \forall (u,v) \in U,\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = uv^2 + \lambda(u), \quad \lambda \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\\
&\iff \forall (u,v) \in U,\ g(u,v) = \frac{u^2v^2}{2} + A(u) + B(v), \quad (A,B) \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})^2
\end{aligned}$$

et finalement, f est solution de (E) sur V si et seulement si il existe A et B dans $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tels que :

$$\forall (x,y) \in V,\ f(x,y) = \frac{1}{8}\left(y^2-x\right)^2 + A\left(\frac{y+\sqrt{2x-y^2}}{2}\right) + B\left(\frac{y-\sqrt{2x-y^2}}{2}\right).$$

donc, f est solution de (E) sur U si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in U,\ x^2 \frac{\partial g}{\partial u}\left(x, \frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) = f(x,y) \tag{1}$$

c'est-à-dire :

$$\forall (u,v) \in V,\ u^2 \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = g(u,v) \tag{2}$$

soit encore :

$$\forall (u,v) \in V,\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{1}{u^2} g(u,v) = 0 \tag{3}$$

et enfin :

$$\forall (u,v) \in V,\ \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{1}{u^2} g(u,v)\right) e^{\frac{1}{u}} = 0. \tag{4}$$

Cette dernière équation s'écrit :

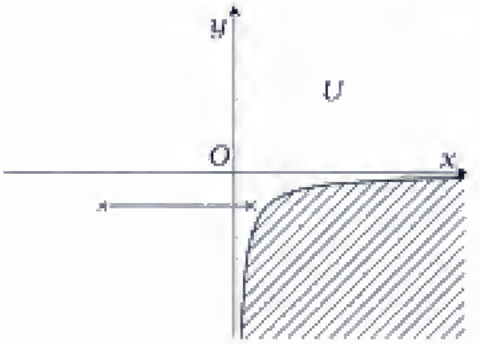
$$\forall (u,v) \in V,\ \frac{\partial}{\partial u}\left(e^{\frac{1}{u}} g(u,v)\right) = 0. \tag{4}$$

En remarquant que, quels que soient (u_1, v) et (u_2, v) éléments de V, le segment $[(u_1, v), (u_2, v)]$ est inclus dans V, on obtient que (4) équivaut à l'existence de $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que :

$$\forall (u,v) \in V,\ e^{\frac{1}{u}} g(u,v) = h(v)$$

soit finalement :

$$\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = e^{-\frac{1}{x}} h\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right).$$



F Intégrales doubles – Intégrales curvilignes

Ex. 18

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \int_0^x \int_0^y f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Comment aborder cette question ?

Une idée naturelle est de remarquer que si f est solution, alors elle est de classe C^2 avec :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = f(x,y)$$

ce qui constitue une équation dont on ne sait pas tirer grand'chose !

Cette première piste n'étant pas la bonne, on peut alors se proposer d'étudier le problème analogue relatif aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: trouver les fonctions $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Si f est solution, elle est nécessairement de classe C^1 et vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$$

ce qui, avec $f(0) = 0$, donne $f = 0$ (fonction nulle).

Ainsi, on peut avoir idée de montrer que la seule solution du problème est la fonction nulle et, pour ce faire, on opère par majoration.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, le pavé $D(x,y) = [0,x] \times [0,y]$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ ce qui, avec la continuité de f, assure l'existence de :

$$M(x,y) = \sup_{(u,v)\in D(x,y)} |f(u,v)|.$$

Avec $f(x,y) = \iint_{D(x,y)} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$, on obtient alors :

$$|f(x,y)| \leqslant M(x,y)\,|x|\,|y|.$$

Pour tout $(u,v) \in D(x,y)$, on a $D(u,v) = [0,u] \times [0,v] \subset D(x,y)$ donc $M(u,v) \leqslant M(x,y)$ et :

$$|f(u,v)| \leqslant M(x,y)\,|u|\,|v|$$

$$\text{puis}\quad |f(x,y)| \leqslant M(x,y)\iint_{D(x,y)} |u|\,|v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = M(x,y)\frac{|x|^2}{2}\frac{|y|^2}{2}.$$

Étant donné $k \in \mathbb{N}$, en supposant :

$$|f(x,y)| \leqslant M(x,y)\frac{|x|^k}{k!}\frac{|y|^k}{k!}$$

on obtient de même :

$$\begin{aligned}|f(x,y)| &\leqslant \iint_{D(x,y)} M(u,v)\frac{|u|^k}{k!}\frac{|v|^k}{k!}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\ &\leqslant M(x,y)\iint_{D(x,y)} \frac{|u|^k}{k!}\frac{|v|^k}{k!}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\ &= M(x,y)\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}\frac{|y|^{k+1}}{(k+1)!}\end{aligned}$$

et on a ainsi prouvé par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(x,y)| \leqslant M(x,y)\frac{|x|^n}{n!}\frac{|y|^n}{n!}.$$

Étant donné que $\dfrac{|x|^n}{n!}$ et $\dfrac{|y|^n}{n!}$ sont les termes généraux de séries convergentes, ils tendent vers 0 quand $n \to +\infty$ et on a donc $f(x,y) = 0$.

Ceci est vrai pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, donc $f = 0$.

Ex. 19

$\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, prouver l'existence et calculer :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\left(\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}x.$$

L'existence ne pose pas de problème particulier.

Pour le calcul, on remarque d'abord que :

$$I = \mathrm{Re} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \left(\int_0^{\pi} e^{ix \sin \theta} \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}x$$

puis on s'aperçoit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{x(-\alpha + i \sin \theta)} \mathrm{d}x$ se calcule facilement.

Le calcul de I serait donc immédiat si on avait le droit de permuter les intégrations. Cependant le théorème permettant cette opération (Fubini) ne figure au programme que dans le cas des intégrales doubles sur un pavé compact, alors que l'on a affaire ici à une intégrale sur $[0, +\infty[\times [0, \pi]$! En conséquence, pour se mettre en mesure d'utiliser ce résultat, nous allons remarquer que :

$$I = \lim_{a \to +\infty} \left(\mathrm{Re} \int_0^{a} \left(\int_0^{\pi} e^{x(-\alpha + i \sin \theta)} \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}x \right)$$

et que l'on peut appliquer le théorème de Fubini à l'intégrale sur $[0, a] \times [0, \pi]$.

- La fonction $(x, \theta) \mapsto \cos(x \sin \theta)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0, \pi]$, donc, l'intervalle d'intégration étant compact, la fonction :

$$f \;:\; x \mapsto \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta) \mathrm{d}\theta$$

est continue sur $\mathbb{R}$, et il en est de même pour $x \mapsto e^{-\alpha x} f(x)$.

On a de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left| e^{-\alpha x} f(x) \right| \leqslant \pi e^{-\alpha x}$, or $x \mapsto e^{-\alpha x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (d'après l'hypothèse $\alpha > 0$), il en est donc de même pour $x \mapsto e^{-\alpha x} f(x)$.

Rappelons qu'une fonction $f \;:\; I \to \mathbb{C}$, continue par morceaux sur I, est intégrable sur I si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_I |f|$ est convergente.

Le même raisonnement montre que $x \mapsto e^{-\alpha x} \displaystyle\int_0^{\pi} e^{ix \sin \theta} \mathrm{d}\theta$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et on a :

$$I = \mathrm{Re}(J) \text{ avec } J = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \left(\int_0^{\pi} e^{ix \sin \theta} \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}x.$$

Pour tout $a > 0$, posons $J_a = \displaystyle\int_0^{a} \mathrm{d}x \int_0^{\pi} e^{x(-\alpha + i \sin \theta)} \mathrm{d}\theta$; on a alors $J = \displaystyle\lim_{a \to +\infty} J_a$.

La fonction $(\theta, x) \mapsto e^{x(-\alpha + i \sin \theta)}$ étant continue sur $[0, \pi] \times [0, a]$, on peut intervertir les intégrations, d'où :

$$J_a = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{a} e^{x(-\alpha + i \sin \theta)} \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{e^{a(-\alpha + i \sin \theta)} - 1}{-\alpha + i \sin \theta} \mathrm{d}\theta.$$

En majorant :

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{e^{a(-\alpha + i \sin \theta)}}{-\alpha + i \sin \theta} \mathrm{d}\theta \right| \leqslant \int_0^{\pi} \frac{e^{-\alpha a}}{\sqrt{\alpha^2 + \sin^2 \theta}} \mathrm{d}\theta \leqslant \int_0^{\pi} \frac{e^{-\alpha a}}{\alpha} \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha a},$$

il vient :

$$\lim_{a \to +\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{a(-\alpha + i \sin \theta)}}{-\alpha + i \sin \theta} \mathrm{d}\theta = 0 \quad (\text{car } \alpha > 0).$$

Ainsi, on obtient $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} J_a = \int_0^{\pi} \frac{1}{\alpha - i \sin \theta} \mathrm{d}\theta$ et $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \sin^2 \theta} \mathrm{d}\theta$, ou encore :

Avec :

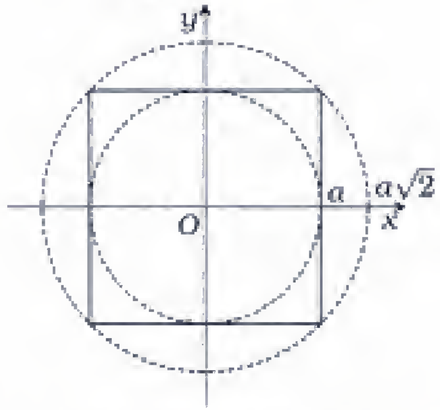
$$e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2} \cdot e^{-y^2},$$

le théorème de Fubini nous donne :

$$J_a = \iint_{C_a} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\mathrm{d}x \int_{-a}^{a} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2$$

et, puisqu'il s'agit de réels positifs :

$$I_a = \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{J_a}.$$



La double inclusion $D_a \subset C_a \subset D_{a\sqrt{2}}$ et la positivité de $(x, y) \mapsto e^{-x^2-y^2}$ donnent alors

$$\iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_{C_a} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_{D_{a\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

soit :

$$K_a \leqslant J_a \leqslant K_{a\sqrt{2}} \quad (i) \quad \text{où on a posé } K_a = \iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Effectuons le changement de variables défini par :

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta,\ \ 0 \leqslant r \leqslant a,\ \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

il vient :

$$K_a = \iint_{\Delta_a} re^{-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \quad \text{avec} \quad \Delta_a = [0, a] \times [0, 2\pi]$$

donc :

$$K_a = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{a} re^{-r^2}\,\mathrm{d}r = 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a = \pi\left(1 - e^{-a^2}\right).$$

L'inégalité (i) devient alors :

$$\pi\left(1 - e^{-a^2}\right) \leqslant J_a \leqslant \pi\left(1 - e^{-2a^2}\right)$$

et on en déduit $\lim\limits_{a\to+\infty} J_a = \pi$, d'où finalement :

$$I = \lim_{a\to+\infty} \sqrt{J_a} = \sqrt{\pi}.$$

Ex. 21

Soit $a > 0$ et $D_a = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + 2xy + 2y^2 \leqslant a^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0\right\}$. Calculer :

$$I_a = \iint_{D_a} (2x^2 + 5xy + y^2)e^{-(x^2+2xy+2y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

En écrivant $x^2+2xy+2y^2=(x+y)^2+y^2$, on constate que la forme quadratique :

$$q\ :\ (x,y)\mapsto x^2+2xy+2y^2$$

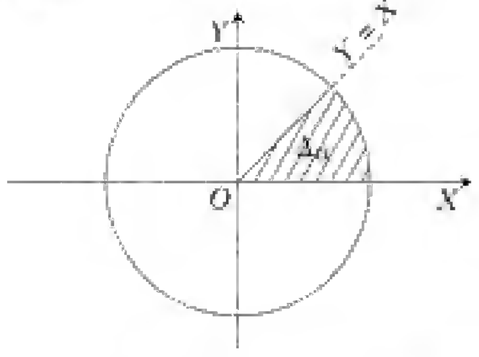
est définie-positive.

De plus, le changement de variable linéaire défini par $X=x+y$, $Y=y$ induit une bijection de D_a sur :

$$\Delta_a=\left\{(X,Y)\in\mathbb{R}^2\ /\ X^2+Y^2\leqslant a^2, X-Y\geqslant 0, Y\geqslant 0\right\}.$$

Avec $\dfrac{D(X,Y)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$ et donc $\dfrac{D(x,y)}{D(X,Y)}=1$, on obtient :

$$I_a=\iint_{\Delta_a}\left(2X^2+XY-2Y^2\right)e^{-(X^2+Y^2)}\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y.$$



On passe alors aux coordonnées polaires : $X=r\cos\theta$, $Y=r\sin\theta$, avec :

$$\Delta_a'=\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2\ /\ 0\leqslant r\leqslant a, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\},$$

il vient :

$$I_a=\iint_{\Delta_a'}\Big(2\big(\cos^2\theta-\sin^2\theta\big)+\sin\theta\cos\theta\Big)r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,$$

donc :

$$I_a=\left(\int_0^a r^3e^{-r^2}\,\mathrm{d}r\right)\times\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\cos 2\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\mathrm{d}\theta\right).$$

Le changement de variable défini par $u=r^2$ donne :

$$\int_0^a r^3e^{-r^2}\,\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_0^{a^2}ue^{-u}\,\mathrm{d}u$$

puis en intégrant par parties :

$$\int_0^a r^3e^{-r^2}\,\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\big[-u\,e^{-u}\big]_0^{a^2}+\frac{1}{2}\int_0^{a^2}e^{-u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\big(1-e^{-a^2}-a^2e^{-a^2}\big).$$

D'autre part :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\cos 2\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\mathrm{d}\theta=\left[\sin 2\theta-\frac{1}{4}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{5}{4}$$

d'où finalement :

$$I_a=\frac{5}{8}\big(1-e^{-a^2}-a^2e^{-a^2}\big).$$

on obtient :

$$\int_\Gamma \omega = \int_0^\pi e^{-b\sin\theta}\cos(b\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta - \int_0^\pi e^{-a\sin\theta}\cos(a\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta + 2\int_a^b \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

donc :

$$2\int_a^b \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^\pi e^{-a\sin\theta}\cos(a\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta - \int_0^\pi e^{-b\sin\theta}\cos(b\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Puis, sachant que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ est impropre convergente, on obtient :

$$\begin{aligned} 2\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x &= \lim_{\substack{a\to 0\\ b\to+\infty}} 2\int_a^b \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{a\to 0}\int_0^\pi e^{-a\sin\theta}\cos(a\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta - \lim_{b\to+\infty}\int_0^\pi e^{-b\sin\theta}\cos(b\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \quad \text{(i)}\end{aligned}$$

Une majoration évidente donne :

$$\left|\int_0^\pi e^{-b\sin\theta}\cos(b\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_0^\pi e^{-b\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-b\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

et la concavité de sin sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ fournit sur cet intervalle $\sin\theta \geqslant \dfrac{2}{\pi}\theta$, donc :

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-b\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \leqslant 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2b\theta}{\pi}}\,\mathrm{d}\theta \leqslant 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{2b\theta}{\pi}}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{b}$$

puis :

$$\left|\int_0^\pi e^{-b\sin\theta}\cos(b\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \frac{\pi}{b} \quad \text{et} \quad \lim_{b\to+\infty}\int_0^\pi e^{-b\sin\theta}\cos(b\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0. \qquad \text{(ii)}$$

En remarquant que la fonction de deux variables :

$$(a,\theta)\mapsto e^{-a\sin\theta}\cos(a\cos\theta)$$

est continue sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$, le théorème de continuité sous le signe somme avec un intervalle d'intégration compact donne que :

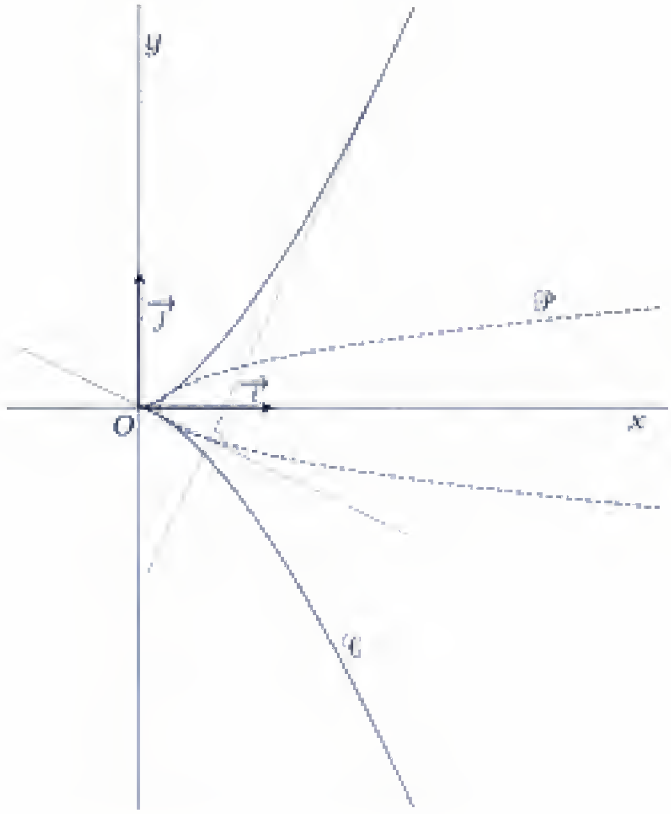
$$a \mapsto \int_0^\pi e^{-a\sin\theta}\cos(a\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

est continue sur $\mathbb{R}$. Donc :

$$\lim_{a\to 0}\int_0^\pi e^{-a\sin\theta}\cos(a\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta = \pi. \qquad \text{(iii)}$$

En conclusion, les propositions (i), (ii), (iii) donnent :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$



Ex. 24

On donne $a \in \mathbb{R}_+^*$. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, représenter la courbe d'équation :

$$x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$$

et calculer l'aire de la boucle.

> Pour la construction il faut évidemment paramétrer la courbe en polaires, ou bien par $y = tx$. Pour préciser la boucle, on prendra soin de repérer les paramètres du point double.

Passons en repérage polaire :

$$M(\theta) = O + \rho(\theta)\overrightarrow{u_\theta} \quad , \quad \rho(\theta) = a\,\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}\,.$$

On a $M(\theta) = M(\theta + \pi)$ et $M(-\theta)$ est l'image de $M(\theta)$ dans la réflexion d'axe Ox.

Il suffit donc d'étudier l'arc sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et de symétriser par rapport à Ox la courbe obtenue.

M est une fonction continue de θ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $M\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Donc la courbe admet pour tangente en O la droite d'angle polaire $\frac{\pi}{4}$ modulo π.

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} \rho(\theta) = -\infty \quad , \quad \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} x(\theta) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \rho(\theta)\cos\theta = -a.$$

Le rayon polaire est positif pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et négatif pour $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$. La courbe est donc dans la zone délimitée par les demi-droites d'angle polaire 0 et $\frac{\pi}{4}$ pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, alors qu'elle passe dans la zone délimitée par les demi-droites d'angle polaire $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{2}$ pour $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

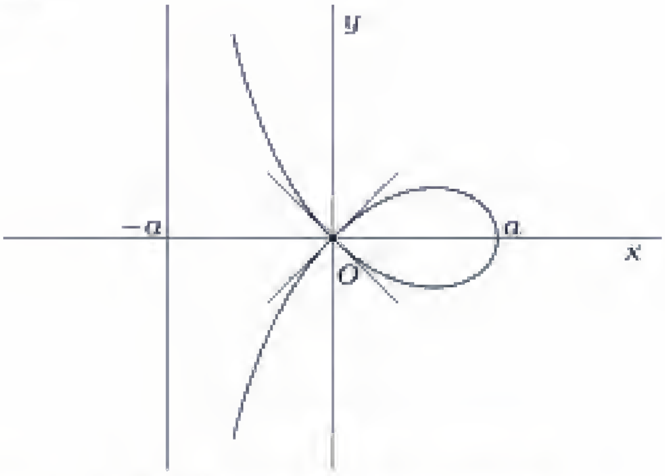
Il est simple d'étudier les variations de ρ.

En écrivant $\rho(\theta) = a\left(2\cos\theta - \dfrac{1}{\cos\theta}\right)$, on obtient :

$$\forall\, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\quad \rho'(\theta) = -a\left(2\sin\theta + \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right) < 0$$

donc ρ est décroissante et il n'y a pas de point où la tangente soit perpendiculaire au rayon vecteur.

D'où l'allure de la courbe :



La boucle correspond à $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et son aire est donnée par :

$$\mathcal{A} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\rho(\theta)} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 2\theta}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$\frac{\cos^2 2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{(2\cos^2\theta - 1)^2}{\cos^2\theta} = 4\cos^2\theta - 4 + \frac{1}{\cos^2\theta} = 2\cos 2\theta - 2 + \frac{1}{\cos^2\theta}$$

donc :

$$\mathcal{A} = a^2\left[\sin 2\theta - 2\theta + \tan\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

Ex. 25

Soit $\mathscr{C}$ le cercle d'équations $y = 0$, $(x-a)^2 + z^2 - R^2 = 0$ dans le repère orthonormal $\mathcal{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

1) Former une équation de la surface Σ engendrée par la rotation de $\mathscr{C}$ autour de l'axe Oz.

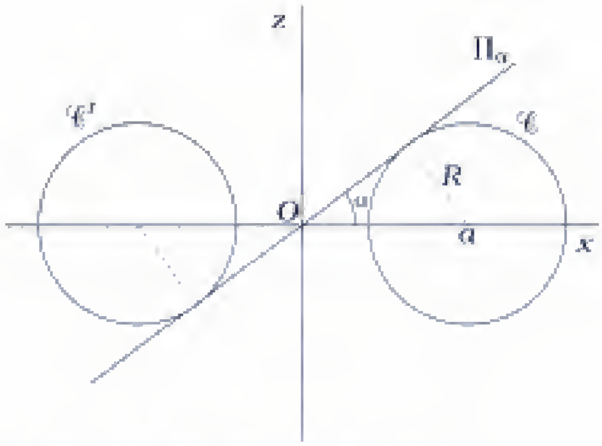
2) On suppose $0 < R < a$ et on note $\alpha = \operatorname{Arcsin}\dfrac{R}{a}$.

Déterminer l'intersection de Σ avec le plan Π_α : $z = x\tan\alpha$.

1) On peut commencer par déterminer une équation cylindrique de Σ en utilisant une méridienne, c'est-à-dire l'intersection de Σ avec un plan méridien.

Soit $\mathscr{C}'$ le cercle symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à O :

$$\mathscr{C}' : y = 0, (x+a)^2 + z^2 - R^2 = 0.$$



Une méridienne de Σ est la réunion des deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
$\mathscr{C} \cup \mathscr{C}'$ a pour équations :

$$y = 0, \left(x^2 + z^2 + a^2 - R^2\right)^2 - 4a^2x^2 = 0.$$

L'image de cette méridienne, par la rotation d'axe $\left(O, \overrightarrow{k}\right)$ et d'angle θ, a pour équation dans le repère $\left(O, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{k}\right)$ (avec $\overrightarrow{u}_\theta = \overrightarrow{i} \cos\theta + \overrightarrow{j} \sin\theta$) :

$$\left(r^2 + z^2 + a^2 - R^2\right)^2 - 4a^2r^2 = 0,$$

ce qui constitue une équation cylindrique de Σ.
Sachant que $r^2 = x^2 + y^2$, on en déduit une équation cartésienne :

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - R^2\right)^2 - 4a^2\left(x^2 + y^2\right) = 0.$$

2) Pour obtenir l'intersection du tore Σ par le plan $\Pi_\alpha(x \sin\alpha - z\cos\alpha = 0)$, faisons le changement de repère orthonormal associé aux formules :

$$\begin{cases} X = x\cos\alpha + z\sin\alpha \\ Y = y \\ Z = -x\sin\alpha + z\cos\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} x = X\cos\alpha - Z\sin\alpha \\ y = Y \\ z = X\sin\alpha + Z\cos\alpha \end{cases}$$

$$\Sigma \cap \Pi_\alpha \;:\; Z = 0, \left(X^2 + Y^2 + a^2 - R^2\right)^2 - 4a^2\left(X^2\cos^2\alpha + Y^2\right) = 0.$$

Considérons la seconde équation, avec $a^2 - R^2 = a^2\cos^2\alpha$, et développons :

$$X^4 + 2X^2\left(Y^2 - a^2\cos^2\alpha\right) + \left(Y^2 + a^2\cos^2\alpha\right)^2 - 4a^2Y^2 = 0.$$

Formons un carré :

$$\left(X^2 + Y^2 - a^2\cos^2\alpha\right)^2 + 4a^2Y^2\cos^2\alpha - 4a^2Y^2 = 0.$$

Factorisons :

$$\left(X^2 + Y^2 - 2aY\sin\alpha - a^2\cos^2\alpha\right)\left(X^2 + Y^2 + 2aY\sin\alpha - a^2\cos^2\alpha\right) = 0.$$

Le plan Π_α coupe le tore Σ suivant deux cercles Γ et Γ' symétriques par rapport à O.
Γ a pour centre Ω ($x = 0, y = R, z = 0$) et pour rayon a.

> *Remarque.* Il s'agit des cercles d'Yvon Villarceau, intersection d'un tore à collier avec un plan bitangent passant par le centre du tore.

Ex. 26

Soit Σ la surface définie par $z^3 = xy$.
Trouver les plans tangents à Σ qui contiennent la droite $\mathscr{D}$ d'équations :

$$(x = 2, y = 3z - 3).$$

Ainsi $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec $\Gamma_1 = \Sigma \setminus \{O\} \cap (x=0)$ et $\Gamma_2 = \Sigma \setminus \{O\} \cap (2x^2 - 3y = 0)$.

Γ_1 a pour équations $x = 0$, $z = 0$, $y \neq 0$, c'est l'axe Oy privé de O.

Γ_2 peut se paramétrer par $x = t$, $y = \frac{2}{3}t^2$, $z = t^3$, $t \neq 0$.

L'axe Oy, c'est-à-dire $\Gamma_1 \cup \{O\}$, est tracé sur Σ, c'est une partie du cône cherché. L'autre partie du cône, notée $\mathscr{C}'$, de courbe directrice Γ_2, peut se paramétrer par :

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (\lambda, t) \mapsto x = \lambda t, y = \frac{2}{3}\lambda t^2, z = \lambda t^3.$$

En éliminant les paramètres λ et t, une équation cartésienne apparait :

$$\mathscr{C}' : 9y^2 - 4xz = 0$$

et on reconnait un cône du second degré.

Ex. 28

Σ est la surface d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = 2z - 1$ dans un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1) S étant un point du plan $z = 0$, déterminer le cône $\mathscr{C}_S$ circonscrit à Σ et de sommet S.

2) Montrer que l'intersection de Σ et de $\mathscr{C}_S$ est une ellipse $\mathscr{E}_S$ et déterminer l'ensemble des centres de $\mathscr{E}_S$ quand S décrit le plan $z = 0$.

1) Pour traduire que la droite :

$$\Delta = S + \mathbb{R}\overrightarrow{u} = \{S + t\overrightarrow{u} \ / \ t \in \mathbb{R}\}$$

est tangente à Σ, on écrit que l'équation aux paramètres t des points d'intersection de Σ et Δ a une racine double.

Σ est un paraboloïde de révolution d'axe $O + \mathbb{R}\overrightarrow{k}$.

Soit S un point du plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de coordonnées $(a, b, 0)$ dans $\mathcal{R}$, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de composantes (X, Y, Z) dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Soit M_t le point de la droite $\Delta = S + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ de coordonnées :

$$(a + tX, b + tY, tZ)$$

Δ est tangente à Σ si et seulement si l'équation de la variable t :

$$(a + tX)^2 + (b + tY)^2 = 2tZ - 1$$

ou $$t^2(X^2 + Y^2) + 2t(aX + bY - Z) + a^2 + b^2 + 1 = 0$$

admet une racine double.

En annulant le discriminant réduit de cette équation du second degré en t, on obtient l'équation homogène du second degré en (X, Y, Z) traduisant que le point $M = S + \overrightarrow{u}$ appartient à $\mathscr{C}_S$.

Le point de $\Delta \cap \Sigma$ correspondant à la racine double est :

$$M_t = S + t\overrightarrow{u} \quad \text{avec} \quad t = -\frac{aX + bY - Z}{X^2 + Y^2}.$$

$\mathscr{C}_S$ a donc pour équation dans $\mathcal{R}_S = (S, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$:

$$(aX + bY - Z)^2 - (a^2 + b^2 + 1)(X^2 + Y^2) = 0$$

2) En repérant M_1 par ses coordonnées $(x, y, z) = t(X, Y, Z)$ dans $\mathcal{R}_S$, on a :

$$\begin{cases} ax + by - z = t\left(aX + bY - Z\right) = -\dfrac{\left(aX + bY - Z\right)^2}{X^2 + Y^2} = -\left(a^2 + b^2 + 1\right) \\ \text{et} \quad x^2 + y^2 = \dfrac{\left(ax + by - z\right)^2}{a^2 + b^2 + 1} = a^2 + b^2 + 1 \end{cases}$$

$\mathscr{E}_S = \mathscr{C}_S \cap \Sigma$ est donc une courbe incluse dans le plan Π_S dont une équation dans $\mathcal{R}_S$ est :

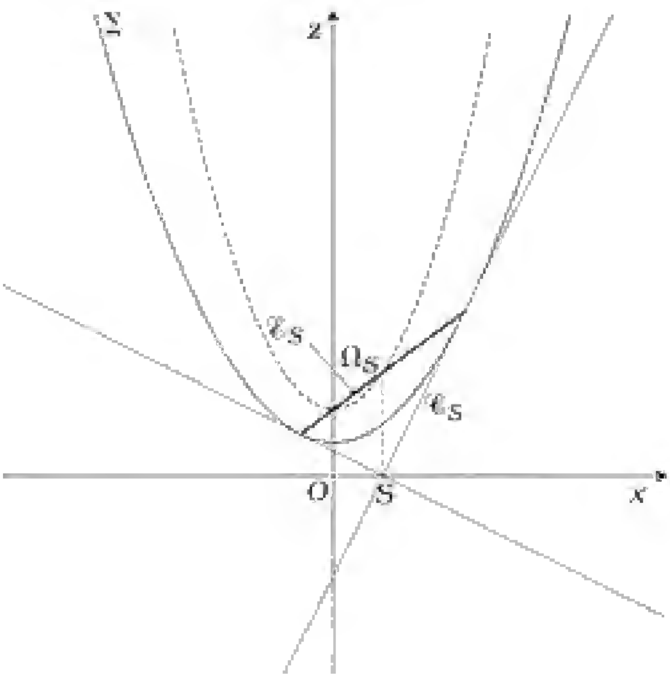
$$ax + by - z = -\left(a^2 + b^2 + 1\right)$$

Ce plan passe par $A = O + \overrightarrow{k}$ et il est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{k}$.

$\mathscr{E}_S$ se projette orthogonalement sur le plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ en le cercle de centre S, d'équation dans le repère $\left(S, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$:

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2 + 1$$

$\mathscr{E}_S$ est donc une ellipse du plan Π_S dont le centre Ω_S est le point de Π_S se projetant en S. Les coordonnées de Ω_S dans $\mathcal{R}$ sont donc (a, b, c) avec $c = a^2 + b^2 + 1$, et l'ensemble des centres Ω_S des ellipses $\mathscr{E}_S$ est le paraboloïde de révolution d'équation $z = x^2 + y^2 + 1$ dans le repère $\mathcal{R}$.



Thèmes d'étude - Problèmes

1 Lemme de Gronwall Majoration de solutions

Le but de cet exercice est d'établir des majorations des fonctions solutions de l'équation différentielle :

$$y''(t) + \varphi(t)\, y(t) = 0. \qquad (E)$$

1) *Le lemme de Gronwall*

Soit M un réel strictement positif ($M > 0$) et a un réel. Soit f et g deux fonctions positives, définies et continues sur la demi-droite $[a, +\infty[$, telles que, pour tout réel t de la demi-droite $[a, +\infty[$, l'inégalité ci-après soit vérifiée :

$$f(t) \leqslant M + \int_a^t f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Établir, en considérant par exemple la fonction F, définie sur la demi-droite $[a, +\infty[$ par la relation :

$$F(t) = \int_a^t f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x,$$

la propriété :

$$f(t) \leqslant M \exp\left(\int_a^t g(x)\, \mathrm{d}x\right).$$

Dans la suite le réel a est strictement positif ($a > 0$) ; soit y une fonction réelle, définie et continue sur la demi-droite $[a, +\infty[$, vérifiant l'équation différentielle (E) :

$$y''(t) + \varphi(t)\, y(t) = 0. \qquad (E)$$

où φ est une fonction réelle, définie et continue sur la demi-droite $[a, \infty[$, telle que la fonction $t \mapsto t\,\varphi(t)$ est intégrable sur la demi-droite $[a, +\infty[$.

2) *Majoration de la fonction* $\dfrac{|y(t)|}{t}$

a) Déterminer une fonction affine A : $t \mapsto A(t)$, définie sur la demi-droite $[a, +\infty[$, telle que, pour tout réel t de cette demi-droite, la relation ci-après soit vérifiée :

$$y(t) = A(t) - \int_a^t (t - x)\, y(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x.$$

b) Démontrer que la fonction j définie par la relation :

$$j(t) = \frac{y(t)}{t},$$

est bornée lorsque le réel t croît vers l'infini. C'est-à-dire : il existe deux réels strictement positifs C et D tels que, pour tout t supérieur ou égal à C ($t \geqslant C$), il vient : $|j(t)| \leqslant D\, t$.

3) *Limites de $y'(t)$ et de $y(t)/t$*

Démontrer, en utilisant les résultats précédents que la fonction dérivée $y' : t \mapsto y'(t)$ a une limite lorsque le réel t croît vers l'infini ; soit ℓ cette limite :

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} y'(t).$$

a) En déduire que l'expression $j(t) = \dfrac{y(t)}{t}$ a pour limite ℓ lorsque le réel t croît vers l'infini.

Solution

1) *Lemme de Gronwall*

On introduit en plus G primitive, nulle en a, de g. Puisque g est positive sur l'intervalle $[a, +\infty[$, l'inégalité proposée en hypothèse donne :

$$g(t)f(t) \leqslant g(t)M + g(t)F(t) \quad \text{soit encore} \quad F'(t) - G'(t)F(t) \leqslant g(t)M.$$

Enfin, puisque $e^{-G(t)}$ est positif cette inégalité s'écrit encore :

$$e^{-G(t)}\big(F'(t) - G'(t)F(t)\big) \leqslant MG'(t)e^{-G(t)}.$$

Alors, en intégrant de a à t, il vient :

$$e^{-G(t)}F(t) \leqslant M\big(1 - e^{-G(t)}\big) \quad \text{puis} \quad F(t) \leqslant M\big(e^{G(t)} - 1\big).$$

En combinant ce résultat avec l'inégalité $f(t) \leqslant M + F(t)$ donnée en hypothèse, on obtient :

$$f(t) \leqslant M\, e^{G(t)}.$$

2) *Majoration de* $\dfrac{|y(t)|}{t}$

a) Avec $y''(t) = -y(t)\,\varphi(t)$, la formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$y(t) = y(a) + (t-a)y'(a) - \int_a^t (t-x)y(x)\,\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

La fonction affine $A : t \mapsto y(a) + (t-a)y'(a)$ répond donc à la question.

b) Pour $t \geqslant a$, on obtient :

$$\frac{y(t)}{t} = \frac{y(a)}{t} + \left(1 - \frac{a}{t}\right) y'(a) - \int_a^t \left(1 - \frac{x}{t}\right) \frac{y(x)}{x}\, x\,\varphi(x)\mathrm{d}x$$

d'où :

$$|j(t)| \leqslant |j(a)| + \left|y'(a)\right| + \int_a^t x\,|j(x)|\; |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Les hypothèses du lemme de Gronwall sont satisfaites pour $|j|$ et il conduit à :

$$|j(t)| \leqslant \left(\left|j(a)\right| + \left|y'(a)\right|\right) \exp\left(\int_a^t x\,|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x\right)$$

d'où :

$$\forall t \geqslant a, \quad |j(t)| \leqslant \left(\left|j(a)\right| + \left|y'(a)\right|\right) \exp\left(\int_a^{+\infty} x\,|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x\right) = D.$$

3) *Limites de $y'(t)$ et $j(t)$ en $+\infty$*

a) On a :

$$\forall t \geqslant a, \quad y'(t) = y'(a) + \int_a^t y''(x)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \left|y''(t)\right| = |y(t)\,\varphi(t)| \leqslant Dt\,\varphi(t)$$

donc la fonction continue y'' est intégrable sur $[a, +\infty[$ par application du critère de domination.

Par suite, l'identité $\forall t \geqslant a,\ y'(t) = y'(a) + \displaystyle\int_a^t y''(x)\mathrm{d}x$ montre qu'il existe $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} y'(t) = \ell$.

b) En remplaçant $y(t)$ par $y(t) - \ell t$, on est ramené à démontrer le résultat dans le cas où $\ell = 0$. On a alors $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} y'(t) = 0$ donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists T > a,\ \forall t \geqslant T,\ |y'(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et :

$$|y(t) - y(T)| \leqslant (t - T)\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{avec l'inégalité des accroissements finis.}$$

On en déduit pour $t \geqslant T$:

$$|y(t)| \leqslant |y(T)| + |y(t) - y(T)| \leqslant |y(T)| + (t - T)\frac{\varepsilon}{2}$$

et donc :

$$|f(t)| \leqslant \frac{|y(T)|}{t} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Avec $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{y(T)}{t} = 0$, on obtient l'existence de $T_1 \geqslant T$ tel que :

$$\forall t \geqslant T_1,\ \frac{|y(T)|}{t} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où finalement :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists T_1 > a,\ \forall t \geqslant T_1,\ |f(t)| \leqslant \varepsilon.$$

En conclusion :

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0.$$

2 Zéros des solutions d'une équation linéaire

Partie A

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des fonctions définies sur la droite réelle par la relation suivante :

$$u_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^2}.$$

Soit g la fonction somme de la série entière de terme général $u_n(x)$, définie dans l'intervalle de convergence de cette série par la relation suivante :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^2}.$$

Le but de cette partie est l'étude de la fonction g.

1) *Rayon de convergence*

Déterminer le rayon de convergence R de la série de terme général $u_n(x)$.

a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'une ou l'autre des bornes de I en restant dans I.

b) On suppose φ impaire. Que peut-on dire de I ? Calculer la dérivée $\varphi^{(n)}(0)$ lorsque n n'est pas de la forme $4k+3$.

3) Soit f une fonction de $\mathcal{F}$ non identiquement nulle.

a) Soit x_0 un zéro de f. Montrer qu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel f ne s'annule qu'en x_0.

b) Montrer que l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$ des zéros de f n'est pas borné ni supérieurement ni inférieurement.

c) Comment varie f entre deux zéros consécutifs ?

Solution

Partie A

1) La fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il existe une unique solution maximale (I, φ) de (E_1) vérifiant $\varphi(x_0) = y_0$. L'intervalle I est ouvert.

2) a) φ est strictement croissante. On a en effet :

$$\forall x \in I \setminus \{0\}, \varphi'(x) \geqslant x^2 > 0.$$

b) On suppose qu'il existe $x_0 \in I, \varphi(x_0) > 0$.

φ est croissante sur I donc :

$$\forall x \geqslant x_0, \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0) > 0 \quad \text{et} \quad \varphi^2(x) \geqslant \varphi^2(x_0) > 0$$

alors $\varphi'(x) = x^2 + \varphi^2(x)$ donne :

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} \geqslant 1 + \frac{x^2}{\varphi^2(x)} \geqslant 1.$$

On en déduit :

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(t)}{\varphi^2(t)} \mathrm{d}t \geqslant x - x_0 \text{ pour tout } x \geqslant x_0,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\varphi(x_0)} - \frac{1}{\varphi(x)} \geqslant x - x_0 \text{ soit } \quad x \leqslant \frac{1}{\varphi(x_0)} + x_0 - \frac{1}{\varphi(x)}.$$

Or, pour tout $x \geqslant x_0$, on a :

$$\varphi(x) > 0 \text{ donc } \forall x \in I \cap [x_0, +\infty[\,, \quad x < \frac{1}{\varphi(x_0)} + x_0$$

et I est majoré.

c) On suppose qu'il existe $x_1 \in I, \varphi(x_1) < 0$.

- Soit $\psi\ :\ -I \to \mathbb{R}, x \mapsto -\varphi(-x)$. ψ est solution maximale définie sur $-I$.
- $\psi(-x_1) = -\varphi(x_1) > 0$ donc, d'après le b), $-I$ est majoré et I est *minoré*.

d) ▪ $\varphi \neq 0$ donc il existe $x_0 \in I$ tel que $\varphi(x_0) > 0$ ou $\varphi(x_0) < 0$.

- Si $\varphi(x_0) > 0$, d'après le b), I est majoré.

Hidden page

La courbe étant orientée dans le sens des x croissants, la courbure en ce point est donnée par :

$$c = \frac{\left[\overrightarrow{M'(t)}, \overrightarrow{M''(t)}\right]}{\left\|\overrightarrow{M'(t)}\right\|^3}.$$

On obtient donc :

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ t^2 & 2t \end{vmatrix}}{\left(1+t^4\right)^{3/2}} = \frac{2t}{\left(1+t^4\right)^{3/2}}.$$

Partie B

1) Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire permet d'affirmer que les solutions de (E_2) sont définies sur $\mathbb{R}$ et que $\dim \mathcal{S} = 2$.

2) a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Si sa somme S est solution de (E_2) sur $]-R, R[$, on a nécessairement :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} = 0 \tag{1}$$

soit :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} = 0 \tag{2}$$

d'où, par unicité du développement en série entière de la fonction nulle :

$$a_2 = a_3 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2, (n+4)(n+3)a_{n+4} a_n = 0. \tag{3}$$

Réciproquement, pour $(a_0, a_1) \neq (0, 0)$ les relations (3) définissent une suite (a_n) telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+4}}{a_n} = 0.$$

Les séries $\sum a_{4n}x^{4n}$, $\sum a_{4n+1}x^{4n+1}$ ont donc un rayon de convergence infini et, puisque $a_{4n+2} = a_{4n+3} = 0$, le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est également $R = +\infty$. Il reste à noter que les relations (3) donnent alors (1) pour tout x réel, pour conclure que la somme S est solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire élément de $\mathcal{S}$.

On termine le calcul des a_n :

$$\frac{a_{4n}}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{4(k+1)}}{a_{4k}} = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(4k+4)(4k+3)}$$

$$\frac{a_{4n+1}}{a_1} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{4k+5}}{a_{4k+1}} = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(4k+5)(4k+4)}$$

b) ▪ $f_1(0) = 1, f_1'(0) = 0$

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ f_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{4n} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(4k+4)(4k+3)} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{2^{2n} n! \prod_{k=1}^{n}(4k-1)}$$

- $f_2(0) = 0$, $f_2'(0) = 1$

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ f_2(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{4n+1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(4k+5)(4k+4)} = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{2^{2n} n! \prod_{k=1}^{n} (4k+1)}$$

c) Pour étudier la position du graphe par rapport à la tangente en $(0, a)$ d'équation $y = a + bx$, on forme $f(x) - (a + bx)$.

$$f(x) - (a + bx) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} x^{4n} \left(\frac{a}{\prod_{k=1}^{n} 4k - 1} + \frac{bx}{\prod_{k=1}^{n} 4k + 1} \right).$$

Pour $a \neq 0$, on obtient :

$$f(x) - (a + bx) \underset{0}{\sim} \frac{-ax^4}{12}$$

donc $f(x) - (a + bx)$ est localement du signe de $-a$: on a affaire à un point ordinaire.
Pour $a = 0$ donc $b \neq 0$, on obtient :

$$f(x) - bx \sim \frac{-bx^5}{20}$$

donc $f(x) - bx$ change de signe et il s'agit d'un point d'inflexion.

3) Posons $u_n = a_{4n} x^{4n}$, il vient :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{x^4}{(4n+4)(4n+3)} \leqslant \frac{16}{8 \times 7} \text{ pour } |x| \leqslant 2 \text{ et } n \geqslant 1,$$

donc la série vérifie le critère des séries alternées et :

$$f_1(x) \geqslant 1 + \sum_{n=1}^{3} \frac{(-1)^n x^{4n}}{2^{2n} n! \prod_{k=1}^{n} 4k - 1}$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad f_1(x) \geqslant 1 - \frac{x^4}{4 \times 3} + \frac{x^8}{4 \times 3 \times 8 \times 7} - \frac{x^{12}}{4 \times 3 \times 8 \times 7 \times 12 \times 11}$$

Posons $g(x) = 1 - \dfrac{x^4}{4 \times 3} + \dfrac{x^8}{4 \times 3 \times 8 \times 7} - \dfrac{x^{12}}{4 \times 3 \times 8 \times 7 \times 12 \times 11}$.

$$g'(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{4 \times 3 \times 7} - \frac{x^{11}}{4 \times 3 \times 8 \times 7 \times 11} = -\frac{x^3}{3} \left(1 - \frac{x^4}{4 \times 3 \times 7} + \frac{x^8}{4 \times 3 \times 8 \times 7 \times 11} \right)$$

$$h(x) = 1 - \frac{x^4}{4 \times 3 \times 7} + \frac{x^8}{4 \times 3 \times 8 \times 7 \times 11} = 1 - \frac{x^4}{4 \times 3 \times 7} \left(1 - \frac{x^4}{8 \times 11} \right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^4}{8 \times 11} \in \left[0, \dfrac{16}{8 \times 11}\right] \to 0 < 1 - \dfrac{x^4}{8 \times 11} < 1 \\[2em] \dfrac{x^4}{4 \times 3 \times 7} \in \left[0, \dfrac{16}{4 \times 3 \times 7}\right] \to 0 < \dfrac{x^4}{4 \times 3 \times 7} < 1 \end{array}\right\} \frac{x^4}{4 \times 3 \times 7} \left(1 - \frac{x^4}{8 \times 11} \right) \in \left]0, 1\right[$$

donc $h(x) > 0$, donc $g'(x) < 0$ pour $x \in [0, 2]$: g est décroissante sur $[0, 2]$.

D'autre part, g est *paire*, ainsi $g(x) \geqslant g(2)$ pour $x \in [-2, 2]$

$$\begin{aligned}
g(2) &= 1 - \frac{2^4}{4 \times 3} + \frac{2^8}{4 \times 3 \times 8 \times 7} - \frac{2^{12}}{4 \times 3 \times 8 \times 7 \times 12 \times 11} \\
&= 1 - \frac{4}{3} + \frac{8}{3 \times 7} - \frac{32}{3 \times 7 \times 3 \times 11} \\
&= 1 - \frac{20}{3 \times 7} - \frac{32}{3^2 \times 7 \times 11} \\
&= 1 - \frac{32 + 3 \times 20 \times 11}{3^2 \times 7 \times 11} \\
&= 1 - \frac{692}{693} > 0.
\end{aligned}$$

Donc $\forall x \in [-2, 2]$, $g(x) \geqslant \dfrac{1}{693}$ ce qui assure $f_1(x) > 0$.

Partie C

1) $f = e^{-\Phi}$, $f' = -\varphi\, e^{-\Phi}$, $f'' = (-\varphi' + \varphi^2)e^{-\Phi}$ donc :

$$f''(x) + x^2 f(x) = 0 \iff -\varphi'(x) + \varphi^2(x) + x^2 = 0 \iff \varphi'(x) = x^2 + \varphi^2(x).$$

Ainsi f est solution de (E_2) si et seulement si φ est solution de (E_1).

2) a) ▪ D'après A.1), on a $I =]a, b[$ avec a et b finis, $\varphi(I) = \mathbb{R}$, et φ est strictement croissante.

▪ Les solutions maximales de l'équation linéaire (E_2) sont définies sur $\mathbb{R}$ donc f solution de (E_2) sur I est prolongeable en une solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$.

Notons g ce prolongement. g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$:

$$g(b) = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} e^{-\Phi(x)}, \quad g'(b) = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} -\varphi(x)e^{-\Phi(x)}$$

On sait que $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x \in I}} \varphi(x) = +\infty$ donc l'existence de :

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x \in I}} \varphi(x)e^{-\Phi(x)} \quad \text{exige que} \quad \lim_{\substack{x \to b \\ x \in I}} e^{-\Phi(x)} = 0$$

donc $g(b) = 0$ c'est-à-dire :

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x \in I}} f(x) = 0.$$

De même en considérant $g(a)$ et $g'(a)$ avec $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in I}} \varphi(x) = -\infty$, on obtient :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in I}} f(x) = 0.$$

b) I est ouvert et symétrique par rapport à 0.

$0 \in I$ donc on peut prendre Φ tel que $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t$ ce qui donne :

$$f(0) = e^{-\Phi(0)} = 1 \quad \text{donc} \quad f = f_1.$$

Alors $\varphi(x) = -\dfrac{f_1'(x)}{f_1(x)}$.

$$f_1'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n-1}}{2^{2n-2}(n-1)!\prod_{k=1}^{n}(4k-1)} \quad , \quad f_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{2^{2n} n! \prod_{k=1}^{n}(4k-1)}.$$

Tout développement limité de $\varphi(x)$ ne contient que des termes de la forme x^{4n-1} donc, pour tout $n \in \{4k+3 \ / \ k \in \mathbb{N}\}$ on a $\varphi^{(n)}(0) = 0$.

3) a) $f'(x_0) \neq 0$ sinon par unicité au problème de Cauchy, $f = 0$. Donc f est strictement monotone au voisinage de x_0.

b) Supposons que $f^{-1}(\{0\})$ soit majoré, alors puisque $f^{-1}(\{0\})$ est un ensemble de points isolés, $f^{-1}(\{0\})$ admettrait un plus grand d'élément x_0.

Sur $]x_0, +\infty[$, on a $f > 0$ ou $f < 0$.

Au besoin en remplaçant f par $-f$, sur $]x_0, +\infty[$, on peut supposer $f > 0$, alors avec $\Phi(x) = -\ln f(x)$, on a :

$$f(x) = e^{-\Phi(x)}$$

et puisque f est solution de E_2, d'après C.1), $\varphi = \Phi'$ est solution de (E_1) sur $]x_0, +\infty[$ intervalle non borné. C'est contradictoire avec A.1).

Ainsi $f^{-1}(\{0\})$ n'est pas borné supérieurement.

De même $f^{-1}(\{0\})$ est non borné inférieurement.

4) Soit a et b deux zéros consécutifs.

Sur $]a, b[$ on a $f > 0$ ou $f < 0$. On suppose $f > 0$.

Alors f' s'annule au moins une fois sur $]a, b[$ d'après le théorème de Rolle.

$$\varphi = -\frac{f'}{f}$$

est solution de (E_1) sur $]a, b[$ donc est strictement croissante et s'annule au plus une fois.

Finalement f' s'annule une fois et une seule sur $]a, b[$ d'où les variations de f :

x	a				b
f'		$+$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

A.3) Soit f un élément de $L(E)$, x_0 un élément de $\operatorname{Ker} f^2$ n'appartenant pas à $\operatorname{Ker} f$ et x la f-trajectoire de x_0. Exprimer $x(t)$ en fonction de x_0, $f(x_0)$, t et préciser la nature géométrique de cette trajectoire.

A.4) Soit f un élément de $L(E)$, x_0 un élément de $E \setminus \{0\}$. On suppose qu'il existe un réel ϕ n'appartenant pas à $\pi\mathbb{Z}$ et un réel k strictement positif tels que :

$$\left(f^2 - 2k\cos\phi f + k^2 \operatorname{Id}_E\right)(x_0) = 0.$$

On note $t \mapsto x(t)$ la f-trajectoire de x_0.

a) Montrer que la famille $(x_0, f(x_0))$ est libre et justifier l'existence de deux applications u et v de $\mathbb{R}$ dans E, telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = u(t)x_0 + v(t)f(x_0).$$

b) Montrer que u et v sont de classe C^2. Former une équation différentielle linéaire du second ordre, avec deux conditions initiales, vérifiée par u. En déduire l'expression de u.

c) Montrer que x est bornée si et seulement si $\cos\phi = 0$. Dans ce cas, décrire géométriquement la f-trajectoire x. À quelles conditons cette trajectoire est-elle un cercle ?

A.5) Soit k un réel strictement positif, f un élément de $L(E)$, $g = f^2 + k^2 \operatorname{Id}_E$ et x_0 un élément de $\operatorname{Ker} g^2$. On désigne par G la famille :

$$G = \{x_0, f(x_0), g(x_0), gf(x_0)\}.$$

a) Montrer que $F = \operatorname{Vect}(G)$ est stable par f.

b) Montrer que G est libre si et seulement si $g(x_0) \neq 0$.

c) On suppose que $g(x_0) \neq 0$. Montrer que la f-trajectoire de x_0 peut s'écrire sous la forme :

$$x(t) = u(t)x_0 + v(t)f(x_0) + w(t)g(x_0) + h(t)gf(x_0).$$

Déterminer $u(t)$, $v(t)$, puis $w(t)$, puis $h(t)$. Montrer que cette trajectoire n'est pas bornée.

Partie B. Études des endomorphismes à trajectoires bornées

Dans les questions B.1) à B.4) incluses, f désigne un endomorphisme de E tel que toutes les f-trajectoires sont bornées : $f \in B(E)$.

B.1) Soit λ une valeur propre réelle de f. Montrer que $\lambda = 0$.

B.2) Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ et $E = \operatorname{Im} \oplus \operatorname{Ker} f$.

B.3) Exhiber, sans démonstration, un polynôme non nul, à coefficients réels, qui annule f. Démontrer qu'il existe un polynôme unitaire à coefficients réels qui est de degré minimal parmi les polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$ annulant f.

Dans toute la suite de la section B.3), ce polynôme est noté P.

a) Soit Q ($Q \in \mathbb{R}[X]$) un diviseur non constant de P. Montrer que $Q(f)$ ne peut pas être inversible.

b) On suppose que P admet une racine réelle λ. Montrer que $\lambda = 0$ et, en s'aidant de la question B.2), que l'ordre de multiplicité de cette racine de P est égal à 1.

c) Que dire de f si P est scindé sur $\mathbb{R}$?

d) On suppose que P possède une racine complexe λ non réelle. On écrit λ sous forme trigonométrique : $\lambda = ke^{i\phi}$, avec k et ϕ réels, $k > 0$ et ϕ n'appartenant pas à $\pi\mathbb{Z}$. Démontrer qu'il existe un vecteur $x_0 \neq 0$ tel que :

$$\left(f^2 - 2k(\cos\phi)f + k^2\,\mathrm{Id}_E\right)(x_0) = 0.$$

En déduire la valeur de $\cos\phi$. Qu'en conclure sur les racines non réelles de P ?

e) Soit $k > 0$, montrer que $\mathrm{Ker}\left(f^2 + k^2\,\mathrm{Id}_E\right)^2 = \mathrm{Ker}\left(f^2 + k^2\,\mathrm{Id}_E\right)$.

f) On suppose $f \neq 0$; démontrer qu'il existe un entier $s \geq 1$ et des réels $a_1, a_2, \ldots, a_s$ strictement positifs et distincts tels que P soit de l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$P = \prod_{i=1}^{s}\left(X^2 + a_i^2\right) \quad \text{ou} \quad X\prod_{i=1}^{s}\left(X^2 + a_i^2\right).$$

B.4) Prouver que f vérifie les deux propriétés suivantes :

i) l'endomorphisme f^2 est diagonalisable et ses valeurs propres sont des réels négatifs ou nuls ;

ii) $\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, f^2$.

Prouver que les dimensions des sous-espaces propres de f^2 associés à ses valeurs propres strictement négatives sont paires.

B.5) Réciproquement, soit f un élément de $L(E)$, non nul et vérifiant les deux propriétés i) et ii) de la question B.4). Établir l'exitence d'un entier s strictement positif, de s sous-espaces $E_1, E_2, \ldots, E_s$ tous non réduits à $\{0\}$, de dimensions paires et stables par f et de s réels $a_1, a_2, \ldots, a_s$, strictement positifs et distincts, tels que :

$$\mathrm{Ker}\, f \oplus \left[\bigoplus_{i=1}^{s} E_i\right] = E \tag{1}$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, s\},\ \forall x \in E_i,\ f^2(x) = -a_i^2 x \tag{2}$$

Étudier la f-trajectoire d'un vecteur appartenant à l'un des E_i et en conclure que $f \in B(E)$.

Solution

Partie A. Étude de trajectoires

A.1) Notons f_F l'endomorphisme de F induit par f.

Pour tout $x_0 \in F$, l'équation $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f_F(x)$, $f_F \in \mathcal{L}(F)$ possède une unique trajectoire (T) passant par x_0 : $\{x_0\} \subset (T) \subset F$.

(T) est aussi une trajectoire de $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$, $f \in \mathcal{L}(E)$ donc, si (T_E) est la trajectoire de $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$, $f \in \mathcal{L}(E)$, passant par x_0, (T) et (T_E) ont le point x_0 en commun et sont de ce fait confondues.
En conséquence, $(T_E) = (T) \subset F$.

A.2) $F = \mathbb{R}x_0$ est stable par f donc, d'après A.1), la f-trajectoire de x_0 est incluse dans F et, puisque (x_0) est une base de F, il existe $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t) = u(t)x_0$.
Avec $x'(t) = u'(t)x_0 = f(x(t)) = u(t)f(x_0) = \lambda u(t)x_0$, il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ u'(t) = \lambda u(t) \quad \text{donc} \quad u(t) = \alpha e^{\lambda t} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Enfin, $x(0) = x_0$ donne $u(0) = 1$ donc $\alpha = 1$ et $u(t) = e^{\lambda t}$ soit :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = e^{\lambda t}x_0.$$

A.3) Pour $x_0 \in \operatorname{Ker} f^2 \setminus \operatorname{Ker} f$, on constate que $(x_0, f(x_0))$ est libre et que $F = \operatorname{Vect}(x_0, f(x_0))$ est un plan stable par f donc, d'après A.1), la f-trajectoire de x_0 est incluse dans F et, puisque $(x_0, f(x_0))$ est une base de F, il existe u et v dans $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = u(t)x_0 + v(t)f(x_0).$$

Alors $x'(t) = f(x(t))$ s'écrit $u'(t)x_0 + v'(t)f(x_0) = u(t)f(x_0)$ ce qui équivaut à :

$$u'(t) = 0 \quad , \quad v'(t) = u(t),$$

soit :

$$u(t) = a \quad , \quad v(t) = at + b \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

donc :

$$x(t) = ax_0 + (at + b)f(x_0).$$

Avec $x(0) = x_0$, il vient alors $ax_0 + bf(x_0) = x_0$ donc $a = 1$, $b = 0$ et finalement $x(t) = x_0 + t f(x_0)$: la trajectoire est une droite affine.

A.4)

a) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda x_0 + \mu f(x_0) = 0.$ (1)

En composant par f, il vient :

$$\lambda f(x_0) + \mu\left(2k\cos\phi f(x_0) - k^2x_0\right) = 0$$

$$\text{c'est-à-dire} \qquad -\mu k^2 x_0 + (\lambda + 2\mu k\cos\phi)f(x_0) = 0 \tag{2}$$

En combinant (1) et (2), on obtient $\left(\lambda(\lambda + 2\mu k\cos\phi) + \mu^2k^2\right)x_0 = 0$, donc :

$$\lambda^2 + 2k\lambda\mu\cos\phi + \mu^2k^2 = 0. \tag{3}$$

Avec $\lambda^2 + 2k\lambda\mu\cos\phi + \mu^2k^2 = (\lambda + \mu k\cos\phi)^2 + \mu^2k^2\sin^2\phi$, on voit que la relation (3) donne $\mu k\sin\phi = 0$ et $\lambda + \mu k\cos\phi = 0$, donc $\lambda = \mu = 0$ car $k > 0$ et $\sin\phi \neq 0$.
On a ainsi montré que $(1) \Rightarrow \lambda = \mu = 0$ donc $(x_0, f(x_0))$ est libre.
Soit $F = \operatorname{Vect}(x_0, f(x_0))$. Par hypothèse, on a $f^2(x_0) = 2k\cos\phi f(x_0) - k^2x_0 \in F$, donc F est stable par f et, d'après A.1), la f-trajectoire de x_0 est incluse dans F. Ainsi, puisque $(x_0, f(x_0))$ est une base du plan F, il existe u et v dans $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = u(t)x_0 + v(t)f(x_0).$$

b) x étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, l'identité $x' = f \circ x$ avec $f \in \mathcal{L}(E)$ montre que x' est de classe C^1 donc x de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ avec $x'' = f \circ x'$, et il en est de même pour les fonctions coordonnées u et v.

En fait, $x \in C^n(\mathbb{R},\mathbb{R}) \Rightarrow x \in C^{n+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ donc, puisque $x \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on obtient par récurrence que $x \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

La relation $x'(t) = f\left(x(t)\right)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} u'(t)x_0 + v'(t)f\left(x_0\right) &= u(t)f\left(x_0\right) + v(t)f^2\left(x_0\right) \\ &= -k^2 v(t)x_0 + \left(u(t) + 2k\cos\phi\, v(t)\right)f\left(x_0\right) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$u'(t) = -k^2 v(t) \quad \text{et} \quad v'(t) = u(t) + 2k\cos\phi\, v(t)$$

donc :

$$u''(t) = -k^2 v'(t) = -k^2 u(t) + 2k\cos\phi\, u'(t)$$

Ainsi, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ u''(t) - 2k\cos\phi\, u'(t) + k^2 u(t) = 0 \qquad (\mathscr{E})$$

D'autre part, la condition $x(0) = x_0$ donne $u(0) = 1$ et $v(0) = 0$ donc $u'(0) = 0$.

Pour résoudre $(\mathscr{E})$, on considère l'équation caractéristique :

$$r^2 - 2rk\cos\phi + k^2 = 0$$

dont les racines sont $k\left(\cos\phi \pm i\sin\phi\right)$ c'est-à-dire $ke^{i\phi}$ et $ke^{-i\phi}$, on en déduit l'existence de a et b réels tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ u(t) = e^{kt\cos\phi}\left[a\cos(kt\sin\phi) + b\sin(kt\sin\phi)\right]$$

On a donc aussi :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R},\ u'(t) = k\cos\phi e^{kt\cos\phi}&\left[a\cos\left(kt\sin\phi\right) + b\sin\left(kt\sin\phi\right)\right] \\ &+ k\sin\phi e^{kt\cos\phi}\left[-a\sin(kt\sin\phi) + b\cos(kt\sin\phi)\right] \end{aligned}$$

et les conditions initiales $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$ donnent $a = 1$ et $a\cos\phi + b\sin\phi = 0$.

Finalement, on obtient :

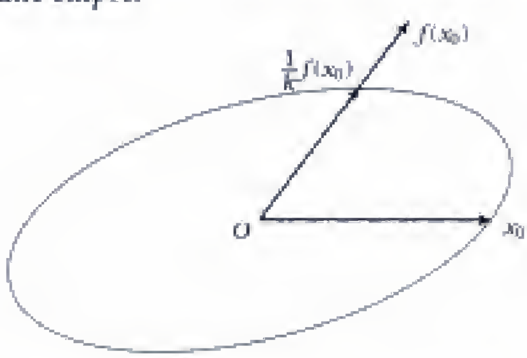
$$\forall t \in \mathbb{R},\ u(t) = e^{kt\cos\phi}\frac{\sin\left(\phi - kt\sin\phi\right)}{\sin\phi}.$$

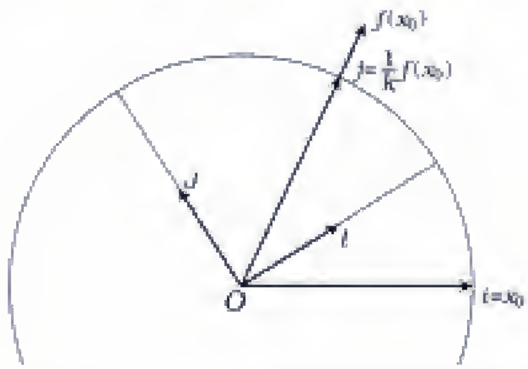
c) Si x est bornée, sa première fonction composante, u, l'est aussi et il en est de même pour $t \mapsto e^{kt\cos\phi}$ donc $\cos\phi = 0$, c'est-à-dire $\phi = \pm\frac{\pi}{2} \bmod 2\pi$.

Réciproquement, si $\phi = \pm\frac{\pi}{2} \bmod 2\pi$, alors :

$$u(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - kt\right) = \cos(kt) \quad \text{donc} \quad v(t) = -\frac{1}{k^2}u'(t) = \frac{1}{k}\sin(kt)$$

et la trajectoire est bornée. Elle a pour équation $u^2 + k^2v^2 = 1$ dans le repère $\left(O, x_0, f\left(x_0\right)\right)$: c'est une ellipse.





Par ailleurs, $x(0) = x_0$ donne $h(0) = 0$ et $h'(0) = w(0) = 0$ d'où $c = 0$, $d = \dfrac{1}{2k^3}$ et, enfin :

$$h(t) = -\frac{t}{2k^2}\cos kt + \frac{1}{2k^3}\sin kt$$

et $$w(t) = h'(t) = \frac{t}{2k}\sin kt.$$

Cette trajectoire est non bornée puisque ni w ni h ne le sont.

Partie B. Études des endomorphismes à trajectoires bornées

B.1) Nous notons $\mathrm{Sp}(f)$ l'ensemble des valeurs propres ou spectre de f. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ et x_0 un vecteur propre associé.

D'après A.2), la f-trajectoire de x_0 est définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t) = e^{\lambda t}x_0$ et le fait qu'elle est bornée donne $\lambda = 0$.

On a ainsi montré que $\mathrm{Sp}(f) \subset \{0\}$.

B.2) On sait que $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2$.

D'après A.3), si $\mathrm{Ker}\, f \subsetneq \mathrm{Ker}\, f^2$, pour $x_0 \in \mathrm{Ker}\, f^2 \setminus \mathrm{Ker}\, f$, la f-trajectoire de x_0 est définie par $x(t) = x_0 + t f(x_0)$ donc est non bornée, ce qui est contraire à l'hypothèse. En conséquence, $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$.

D'après le théorème du rang, on a $\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim E$. Donc, pour conclure à $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$, il suffit de vérifier que $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.

Soit alors $x \in \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f$: il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$ et on a $f(x) = 0$ donc $f^2(y) = 0$, ce qui donne $y \in \mathrm{Ker}\, f^2$ donc $y \in \mathrm{Ker}\, f$ puis $x = f(y) = 0$. Ceci montre que $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ et la conclusion en résulte.

B.3) D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique χ_f défini par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_f(\lambda) = \det\left(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E\right)$$

est annulateur de f, et bien sûr non nul, à coefficients réels.

On peut alors affirmer que l'ensemble $I_f = \left\{A \in \mathbb{R}[X] \;/\; A \neq 0,\ A(f) = 0\right\}$ est non vide, donc $J_f = \left\{\deg A \;/\; A \in I_f\right\}$ est également non vide et, puisqu'il est inclus dans $\mathbb{N}$, il admet un plus petit élément que nous notons p. Par définition, il existe $A_p \in I_f$ tel que $p = \deg A_p$ et, en notant α_p le coefficient dominant de A_p et $P = \dfrac{1}{\alpha_p}A_p$ on a $P \in I_f$, P unitaire, P de degré minimal dans I_f.

Montrons maintenant l'unicité de ce polynôme P.

Soit Q un élément de I_f, unitaire, de degré minimal, donc tel que $\deg Q = p$.

Avec $P(f) = 0$ et $Q(f) = 0$, on obtient $(P - Q)(f) = 0$ et, en supposant $P \neq Q$, on aurait $P - Q \in I_f$ donc $\deg(P - Q) \geqslant p$.

Or P et Q étant unitaires, de même degré p, on a $\deg(P - Q) < p$.

En conséquence, il vient $P = Q$ et I_f contient un, et un seul, polynôme unitaire de degré minimal p.

$$P = X\prod_{k=1}^{s}\left(X^2+a_k^2\right)^{m_k} \quad \text{ou} \quad P = \prod_{k=1}^{s}\left(X^2+a_k^2\right)^{m_k}$$

selon que 0 est, ou n'est pas, racine de P.

La question présente revient ainsi à montrer que :

$$\forall k \in [\![1,s]\!],\ m_k = 1.$$

Considérons donc ia et $-ia$, avec $a>0$, deux racines de P imaginaires conjuguées, de multiplicité $m \geqslant 1$. On a alors :

$$P(X) = \left(X^2+a^2\right)^m Q(X) \quad \text{avec} \quad Q \in \mathbb{R}[X],\ Q(ia) \neq 0.$$

En posant $g = f^2 + a^2\,\mathrm{Id}_E$ on obtient $0 = P(f) = Q(f)\circ g^m$.

D'après B.3)c), on a $\operatorname{Ker} g^2 = \operatorname{Ker} g$. Alors, la propriété montrée en B.2) nous donne $E = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} g$, puis, comme en B.3)b), il vient :

$$\forall k \geqslant 1,\ \operatorname{Im} g^k = \operatorname{Im} g.$$

On conclut comme en B.3)b) : pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$ tel que $g(x) = g^m(y)$ donc :

$$\big(Q(f)\circ g\big)(x) = Q(f)\big(g(x)\big) = Q(f)\big(g^m(y)\big) = P(f)(y) = 0$$

et le polynôme $\left(X^2+a^2\right)Q(X)$ appartient à I_f ce qui donne $m \leqslant 1$, d'où finalement $m=1$.

Ainsi, chaque m_k est égal à 1 et on a :

$$P = X\prod_{k=1}^{s}\left(X^2+a_k^2\right) \quad \text{ou} \quad P = \prod_{k=1}^{s}\left(X^2+a_k^2\right).$$

B.4) $P(f)=0$ donne $f\circ P(f) = 0$ et $f^2\circ P(f)=0$ donc, dans tous les cas :

$$f^2 \circ \prod_{i=1}^{s}\left(f^2 + a_i^2\,\mathrm{Id}_E\right) = 0$$

ce qui montre que le polynôme $R = X\prod_{i=1}^{s}\left(X+a_i^2\right)$ est annulateur de f^2.

- Puisque les a_i sont strictement positifs et deux à deux distincts, R est simplement scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et f^2 est diagonalisable.
- Les valeurs propres de f^2 sont réelles, négatives ou nulles car ce sont aussi des racines de R.
- On a vu que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$, donc $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2$.
- f^2 et f permutent, donc si $-a_i^2$ est une valeur propre strictement négative de f^2, le sous-espace propre $E_i = \operatorname{Ker}\left(f^2 + a_i^2\,\mathrm{Id}_E\right)$ est stable par f qui, de ce fait, induit un endomorphisme f_i de E_i.

La relation $\forall x \in E_i,\ f^2(x) + a_i^2 x = 0$ donne alors $f_i^2 + a_i^2\,\mathrm{Id}_{E_i} = 0$ d'où :

$$\det f_i^2 = \det\left(-a_i^2\,\mathrm{Id}_{E_i}\right)$$

ce qui s'écrit aussi, en posant $p_i = \dim E_i$, $(-1)^{p_i}a_i^{2p_i} = \left(\det f_i\right)^2$ et exige que p_i est pair.

> *Remarque.* On peut aussi noter que le polynôme $X^2 + a_i^2$ est annulateur de f_i et que, ce polynôme n'ayant pas de racine réelle, f_i n'a pas de valeur propre réelle ce qui impose que $\dim E_i$ est paire.

B.5) Avec $f \neq 0$ et $\operatorname{rg} f^2 = \operatorname{rg} f$, on a aussi $f^2 \neq 0$. Donc, puisque f^2 est diagonalisable, son spectre n'est pas réduit à $\{0\}$ et d'après la condition (i), il existe $s \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\operatorname{Sp}\left(f^2\right) = \left\{0, -a_1^2, \dots, -a_s^2\right\} \quad \text{ou} \quad \operatorname{Sp}\left(f^2\right) = \left\{-a_1^2, \dots, -a_s^2\right\}$$

avec $\forall i \in [\![1, s]\!]$, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+^*$. Dans les deux cas, puisque f^2 est diagonalisable, on a :

$$E = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \left[\bigoplus_{i=1}^{s} \operatorname{Ker}\left(f^2 + \alpha_i^2 \operatorname{Id}_E\right)\right]$$

or $\operatorname{rg} f^2 = \operatorname{rg} f$ donne $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$, donc, en posant $E_i = \operatorname{Ker}\left(f^2 + \alpha_i^2 \operatorname{Id}_E\right)$, on obtient :

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \left[\bigoplus_{i=1}^{s} E_i\right].$$

Enfin, on montre, comme dans la question précédente, que chaque E_i est stable par f et de dimension paire, non nulle (puisque ce sont des sous-espaces propres de f^2).

E_i étant stable par f, pour $x_0 \in E_i$, la trajectoire de x_0 est incluse dans E_i et on se retrouve dans les conditions du A.4) avec $\cos\phi = 0$ et $k = \alpha_i$. D'après A.4)c), cette trajectoire est bornée, d'équation $u^2 + \alpha_i^2 v^2 = 1$ dans le repère $\left(O, x_0, f(x_0)\right)$.

Étant donné que :

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \left[\bigoplus_{i=1}^{s} E_i\right],$$

tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique :

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i \quad \text{avec } x_0 \in \operatorname{Ker} f \text{ et } \forall i \in [\![1, s]\!], x_i \in E_i.$$

De même, pour toute fonction vectorielle $x : \mathbb{R} \to E$, $t \mapsto x(t)$, nous appelons $x_0, x_1, \dots, x_s$ ses fonctions composantes sur la somme directe précédente.

Pour $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$, avec $\dfrac{dx}{dt} = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \dfrac{dx_i}{dt}$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{s} f(x_i)$, étant donné que $\operatorname{Ker} f$ et chaque E_i est stable par f, on obtient que :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

est équivalent à :

$$\forall i \in [\![0, s]\!],\ \frac{dx_i}{dt} = f(x_i) \quad , \quad x_i(0) = x_{0,i}$$

Les composantes de x_0 sont notées $x_{0,0}, x_{0,1}, \dots, x_{0,s}$.

soit aussi à :

$$\forall i \in [\![0, s]\!],\ \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i) \quad , \quad x_i(0) = x_{0,i}$$

où, en ayant posé $\operatorname{Ker} f = E_0$ pour harmoniser les notations, f_i, avec $0 \leqslant i \leqslant s$, désigne l'endomorphisme de E_i induit par f.

Ainsi, x est une f-trajectoire de x_0 si et seulement si chaque x_i, $0 \leqslant i \leqslant s$, est une f_i-trajectoire de $x_{0,i}$.

Comme on a vu que chacune de ces f_i-trajectoires (incluse dans E_i) est bornée, il en résulte que x est également bornée.

5 Ovales de Cassini

$\mathscr{E}$ est un espace affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormal de sens direct $R = \left(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On choisit O comme pôle et $(O, \vec{i})$ comme axe polaire.

Soit $(\lambda, c) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, F et F' deux points de $\mathscr{E}$, de coordonnées $(\lambda, 0)$ et $(-\lambda, 0)$ dans R ; (Γ_c) est l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que :

$$MF \cdot MF' = 2\,\lambda\, c.$$

1) Montrer qu'un point M appartient à (Γ_c) si et seulement si ses coordonnées (x, y) dans R vérifient :

$$\left(x^2 + y^2 + \lambda^2\right)^2 = 4\,\lambda^2\left(x^2 + c^2\right).$$

2) ρ et θ sont les coordonnées polaires d'un point de (Γ_c).

a) Exprimer ρ^2 en fonction de θ.

b) Montrer que :

si $\lambda \leqslant 2c$, (Γ_c) peut être représenté par une équation polaire de la forme $\rho = f(\theta)$;

si $\lambda > 2c$, (Γ_c) est réunion de deux courbes (Γ'_c) et (Γ''_c) ;

et que chacune des courbes (Γ_c) est réunion d'au plus deux arcs de classe C^1.

c) Déterminer les points de (Γ_c) où la tangente est dirigée par le vecteur $\vec{i}$ et ceux où la tangente est dirigée par le vecteur $\vec{j}$.

3) Représenter graphiquement les différentes courbes (Γ_c).

Solution

1) Soit $M \in \mathscr{E}$ de coordonnées (x, y) dans R.

$$MF^2 = (x-\lambda)^2 + y^2 \quad , \quad MF'^2 = (x+\lambda)^2 + y^2.$$

$$\begin{aligned}
M \in (\Gamma_c) &\iff \left((x-\lambda)^2 + y^2\right)\left((x+\lambda)^2 + y^2\right) = 4\,\lambda^2\, c^2 \\
&\iff \left(x^2 + y^2 + \lambda^2 - 2x\,\lambda\right)\left(x^2 + y^2 + \lambda^2 + 2x\,\lambda\right) = 4\,\lambda^2\, c^2 \\
&\iff \left(x^2 + y^2 + \lambda^2\right) - 4x^2\lambda^2 = 4\,\lambda^2\, c^2 \\
&\iff \left(x^2 + y^2 + \lambda)^2\right)^2 = 4\,\lambda^2\left(x^2 + c^2\right) \text{ est une équation cartésienne de } (\Gamma_c)
\end{aligned}$$

2) a) Soit (ρ, θ) un couple de coordonnées polaires d'un point M de $\mathscr{E}$, alors :

$$x = \rho\cos\theta$$

$$y = \rho\sin\theta$$

$$\begin{aligned}
M \in (\Gamma_c) &\iff \left(\rho^2 + \lambda^2\right)^2 - 4\,\lambda^2\,\rho^2\cos^2\theta = 4\,\lambda^2\, c^2 \\
&\iff \rho^4 + 2\,\rho^2\,\lambda^2\left(1 - 2\cos^2\theta\right) + \lambda^4 - 4\,\lambda^2\, c^2 = 0 \\
&\iff \rho^4 + 2\,\rho^2\,\lambda^2\cos 2\theta + \lambda^4 - 4\,\lambda^2\, c^2 = 0 \\
&\iff \begin{cases} X = \rho^2 \\ X^2 - 2\,\lambda^2\,(\cos 2\theta)X + \lambda^2\left(\lambda^2 - 4c^2\right) = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Étudions l'équation du second degré :

$$X^2 - 2\lambda^2(\cos 2\theta)X + \lambda^2\left(\lambda^2 - 4c^2\right) = 0. \qquad (*)$$

Le discriminant réduit est :

$$\begin{aligned}\Delta' &= \lambda^4\cos^2 2\theta - \lambda^4 + 4\lambda^2c^2\\ &= \lambda^2\left(4c^2 - \lambda^2\sin^2 2\theta\right)\end{aligned}$$

Comme le discrimant dépend de θ, pour étudier l'existence et le signe de cette équation, nous allons associer à l'étude du signe de Δ', le signe du terme constant (qui est ici le produit des racines) :

$$P = \lambda^2\left(\lambda^2 - 4c^2\right).$$

- 1^{er} cas : $0 < \lambda < 2c \iff P < 0$

Donc $\Delta' > 0$ et $(*)$ admet deux racines X_1 et X_2, non nulles, de signe contraire :

$$X_1 = \lambda^2\cos 2\theta + \lambda\sqrt{4c^2 - \lambda^2\sin^2\theta}$$

$$X_2 = \lambda^2\cos 2\theta - \lambda\sqrt{4c^2 - \lambda^2\sin^2 2\theta}$$

$X_2 < X_1$, donc $X_1 > 0$, $X_2 < 0$, et :

$$\rho^2 = \lambda^2\cos\theta 2\theta + \lambda\sqrt{4c^2 - \lambda^2\sin^2 2\theta}.$$

- 2^{e} cas : $\lambda = 2c \iff P = 0$

Et $\Delta' = 4c^2\lambda^2\cos^2 2\theta = \lambda^4\cos^2 2\theta$; $(*)$ admet deux racines, l'une est nulle, l'autre est positive si et seulement si $\cos 2\theta \geqslant 0$, et alors :

$$\rho^2 = 2\lambda^2\cos 2\theta.$$

- 3^{e} cas : $\lambda > 2c \iff P > 0$

Si $(*)$ admet des racines, alors elles sont de même signe ; or $(*)$ admet des racines si et seulement si $\Delta' \geqslant 0$, donc $(*)$ admet des racines si et seulement si :

$$|\sin 2\theta| \leqslant \frac{2c}{\lambda}.$$

> Bien sûr : $\lambda > 2c \iff \dfrac{2c}{\lambda} < 1.$

Le signe (commun) de ces racines est alors donné par le signe de leur somme :

$$S = 2\lambda^2\cos 2\theta$$

et donc est positif si et seulement si $\cos 2\theta \geqslant 0$ et, dans ce cas, on a :

$$\rho_1^2 = \lambda^2\cos 2\theta + \lambda\sqrt{4c^2 - \lambda^2\sin^2 2\theta}$$

$$\rho_2^2 = \lambda^2\cos 2\theta - \lambda\sqrt{4c^2 - \lambda^2\sin^2 2\theta}$$

b) • $\lambda \leqslant 2c$

Posons :

$$g(\theta) = \sqrt{\lambda^2\cos 2\theta + \lambda\sqrt{4c^2 - \lambda^2\sin^2 2\theta}}$$

alors $\rho = \pm g(\theta)$ et $\left(\Gamma_c\right) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ où Γ_1 (resp. Γ_2) est la courbe dont une équation polaire est :

$$\rho = g(\theta) \qquad (\text{resp. } \rho = -g(\theta)).$$

Comparons Γ_1 et Γ_2.

Soit $M \in \Gamma_1$ de coordonnées polaires $\left(\theta, g(\theta)\right)$, ce même point M admet aussi pour coordonnées polaires $\left(\theta + \pi, -g(\theta)\right)$.

Or la fonction g est périodique de période π :

$$g(\theta) = g(\theta + \pi).$$

C'est le point $O(0,0)$; or ce point est un point de (Γ_c) si et seulement si $\lambda = 2c$ et alors, en ce point, il y a deux tangentes dont les équations polaires sont :

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad , \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$$

or elles ne sont donc pas dirigées par $\vec{\imath}$ ou $\vec{\jmath}$. Ainsi

(i) la tangente en un point est dirigée par le vecteur $\vec{\imath}$ si et seulement si :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0 ;$$

on est donc amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left(x^2 + y^2 + \lambda^2\right)^2 - 4\lambda^2\left(x^2 + c^2\right) = 0 \\ 4x\left(x^2 + y^2 - \lambda^2\right) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \left(\begin{cases} y^2 = \lambda(2c - \lambda) \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x^2 = \lambda^2 - c^2 \\ x^2 + y^2 = \lambda^2 \end{cases} \right)$$

d'où la discussion :

– si $\lambda \leqslant c$, il y a deux points en lesquels la tangente est dirigée par $\vec{\imath}$. Ce sont les points de coordonnées :

$$\left(0, -\sqrt{\lambda(2c - \lambda)}\right) \quad , \quad \left(0, +\sqrt{\lambda(2c - \lambda)}\right) ;$$

– si $c < \lambda < 2c$, il y a six points en lesquels la tangente est dirigée par $\vec{\imath}$. Ce sont les points de coordonnées :

$$\left(0, -\sqrt{\lambda(2c - \lambda)}\right) \quad , \quad \left(0, \sqrt{\lambda(2c - \lambda)}\right) \quad , \quad \left(\sqrt{\lambda^2 - c^2}, c\right) \quad , \quad \left(\sqrt{\lambda^2 - c^2}, -c\right) \quad ,$$
$$\left(-\sqrt{\lambda^2 - c^2}, c\right) \quad , \quad \left(-\sqrt{\lambda^2 - c^2}, -c\right) ;$$

– si $\lambda \geqslant 2c$, il y a quatre points en lesquels la tangente est dirigée par $\vec{\imath}$. Ce sont les points de coordonnées :

$$\left(\sqrt{\lambda^2 - c^2}, c\right) \quad , \quad \left(\sqrt{\lambda^2 - c^2}, -c\right) \quad , \quad \left(-\sqrt{\lambda^2 - c^2}, c\right) \quad , \quad \left(-\sqrt{\lambda^2 - c^2}, -c\right).$$

(ii) La tangente en un point est dirigée par le vecteur $\vec{\jmath}$ si et seulement si :

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0.$$

On est amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left(x^2 + y^2 + \lambda^2\right)^2 - 4\lambda^2\left(x^2 + c^2\right) = 0 \\ 4y\left(x^2 + y^2 + \lambda^2\right) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left(x^2 + \lambda^2\right)^2 - 4\lambda^2\left(x^2 + c^2\right) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Or $\left(x^2 + \lambda^2\right)^2 - 4\lambda^2\left(x^2 + c^2\right) = \left(x^2 - \lambda^2\right)^2 - 4\lambda^2 c^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc :

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - \lambda^2 = 2\lambda c \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = \lambda(2c + \lambda) \\ y = 0 \end{cases}$$

Il y a deux points en lesquels la tangente est dirigée par $\vec{j}$. Ce sont les points de coordonnées :

$$\left(\sqrt{\lambda(2c+\lambda)}, 0\right) \quad , \quad \left(-\sqrt{\lambda(2c+\lambda)}, 0\right).$$

3) *Variations de* ρ

a) Les fonctions $\theta \mapsto \rho(\theta)$ sont π-périodiques, la période de description des courbes étant 2π, le pôle O est centre de symétrie : il suffit donc d'étudier les fonctions dans un intervalle de longueur π, puis de faire une symétrie par rapport à O.

$\theta \mapsto \rho(\theta)$ sont pairs, l'axe polaire est donc axe de symétrie : il suffit d'étudier les fonctions dans l'intervalle $[0, \pi/2]$ puis de faire une symétrie par rapport à l'axe polaire et enfin par rapport au pôle pour obtenir les différents tracés des courbes.

b) $\theta \mapsto \rho(\theta)$ est dérivable en tout point $\theta \in [0, \pi/2]$ en lequel :

$$\lambda^2 \cos 2\theta + \varepsilon\lambda\sqrt{4c^2 - 2\lambda^2 \sin^2 2\theta} > 0 \quad (\varepsilon \in \{-1, +1\}) \quad \text{et} \quad 4c^2 - \lambda^2 \sin^2 2\theta > 0$$

et on a alors :

$$\rho\rho' = -\lambda^2 \sin 2\theta + \frac{\varepsilon\left(-\lambda^3 \sin 2\theta \cos 2\theta\right)}{\sqrt{4c^2 - \lambda^2 \sin^2 2\theta}}$$

$$= \frac{-\varepsilon\lambda \sin 2\theta + \varepsilon\lambda\sqrt{4c^2 - \lambda^2 \sin^2 2\theta})}{\sqrt{4c^2 - \lambda^2 \sin^2 2\theta}}$$

$$= \frac{-\varepsilon\lambda \sin 2\theta}{\sqrt{4c^2 - \lambda^2 \sin^2 2\theta}}\rho^2$$

or $\rho(\theta) \neq 0$, donc :

$$\rho' = \frac{-\varepsilon\lambda \sin 2\theta}{\sqrt{4c^2 - \lambda^2 \sin^2 2\theta}}\rho.$$

- 1^{er} cas : $0 < \lambda < 2c$ (alors $\varepsilon = \pm 1$)

θ	0	$\pi/2$
Variations de $\rho(\theta)$	$\sqrt{\lambda(2c+\lambda)}$ $\searrow$	$\sqrt{\lambda(2c-\lambda)}$

- 2^{e} cas : $\lambda = 2c$

θ	0	$\pi/4$
Variations de $\rho(\theta)$	$\lambda\sqrt{2}$ $\searrow$	0

Partie A

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On note B_n^k les polynômes définis par :

$$B_n^k(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$
$$B_n^k = 0 \text{ si } k \geqslant n+1 \text{ et, par convention, si } k < 0$$

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_n^k(x) = 1$, et que pour tout k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ on a :

$$B_n^k(x) = (1-x)B_{n-1}^k(x) + x\,B_{n-1}^{k-1}(x)$$

2) Soit i un entier $(0 \leqslant i \leqslant n)$. Montrer que : $C_n^i x^i = \displaystyle\sum_{k=i}^{n} C_k^i B_n^k(x)$.

3) Montrer que les polynômes B_n^k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4) Établir la formule pour $k = 0, 1, \ldots, n$: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B_n^k(x) = n\left(B_{n-1}^{k-1}(x) - B_{n-1}^k(x)\right)$ et en déduire la décomposition du polynôme $\displaystyle\int_0^x B_n^i(t)\mathrm{d}t$ sur la base formée par les polynômes $B_{n+1}^k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n+1)$.

Partie B

On rappelle que les paraboles sont les courbes dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$t \mapsto M(t) = A + t\overrightarrow{V} + t^2\overrightarrow{W} \quad \text{où } \overrightarrow{V} \text{ et } \overrightarrow{W} \text{ sont deux vecteurs indépendants.}$$

L'axe d'une telle parabole $\mathcal{P}$ admet $\overrightarrow{W}$ comme vecteur directeur et passe par le sommet S de $\mathcal{P}$ caractérisé par la propriété suivante : la tangente en S à $\mathcal{P}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{W}$.

1) Soit trois points A_0, A_1, A_2 distincts. On définit B_0 barycentre des points A_0 et A_1 affectés des coefficients $(1-t)$ et t : $B_0 = (1-t)A_0 + tA_1$. De même, on définit :

B_1 barycentre de A_1 et A_2 affectés des coefficients $(1-t)$ et t.

C_0 barycentre de B_0 et B_1 affectés des coefficients $(1-t)$ et t.

Exprimer $C_0(t)$ au moyen des polynômes $B_2^k(t)$ $(k = 0, 1, 2)$ et des points A_0, A_1, A_2 et montrer que la courbe décrite par le point $C_0(t)$ est une parabole $\mathcal{P}$ si et seulement si les trois points A_0, A_1, A_2 ne sont pas alignés.

Montrer que toute parabole peut être générée par un tel procédé.

2) Montrer que la parabole $\mathcal{P}$ passe par les points A_0 et A_2. Quels sont les vecteurs tangents à $\mathcal{P}$ en A_0 et A_2 ? Reconnaître la tangente au point $C_0(t)$.

Exemple. L'espace étant muni d'un repère orthonormé, d'origine O, représenter soigneusement sur une même figure les paraboles dans les trois cas suivants :

$$A_0(1,0,0) \;;\; A_1(0,2,0) \;;\; A_2(3,0,0)$$
$$A_0(1,0,0) \;;\; A_1(1,1,0) \;;\; A_2(3,0,0)$$
$$A_0(1,0,0) \;;\; A_1(4,2,0) \;;\; A_2(3,0,0)$$

On propose de démontrer que le minimum de l'intégrale $\int_0^1 \left\|N''(u)\right\|^2 du$ est atteint par la courbe Γ, définie au D.5)a). Montrer que :

$$\int_0^1 \left\|N''\right\|^2 du = \int_0^1 \left\|M''\right\|^2 du + \int_0^1 \left\|N'' - M''\right\|^2 du + 2\int_0^1 \left(M'' \mid N'' - M''\right) du$$

Conclure en intégrant par parties la dernière de ces intégrales.

Le petit point de la culture. Au début des années 60, P. Bézier et P. De Casteljau, alors ingénieurs chez Renault et Citroën, développèrent, indépendamment l'un de l'autre, ces procédés de génération de courbes et de surfaces pour obtenir une méthode de numérisation des formes des pièces utilisées dans l'industrie automobile. Depuis, cela n'a cessé de se développer...

Solution

Partie A

1) En développant avec la formule du binôme, il vient :

$$1 = \left(x + (1-x)\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} B_n^k(x).$$

De même, avec $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_{n-1}^k + \mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$ (formule du triangle de Pascal), on obtient :

$$(1-x)B_{n-1}^k(x) + x\,B_{n-1}^{k-1}(x) = \mathrm{C}_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-k} + \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = B_n^k(x).$$

2) On remarque que : $\mathrm{C}_k^i \mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{i!\,(n-i)!}\,\dfrac{(n-i)!}{(k-i)!\,(n-k)!} = \mathrm{C}_n^i \mathrm{C}_{n-i}^{k-i}$.

Il vient donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=i}^{n} \mathrm{C}_k^i B_n^k(x) &= \sum_{k=i}^{n} \mathrm{C}_k^i \mathrm{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \mathrm{C}_n^i \sum_{k=i}^{n} \mathrm{C}_{n-i}^{k-i} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \mathrm{C}_n^i x^i \sum_{k=i}^{n} \mathrm{C}_{n-i}^{k-i} x^{k-i} (1-x)^{n-i-(k-i)} = \mathrm{C}_n^i x^i \sum_{k=0}^{n-i} \mathrm{C}_{n-i}^{k} x^k (1-x)^{n-i-k} \\
&= \mathrm{C}_n^i x^i \left(x + (1-x)\right)^{n-i} \\
&= \mathrm{C}_n^i x^i\,.
\end{aligned}$$

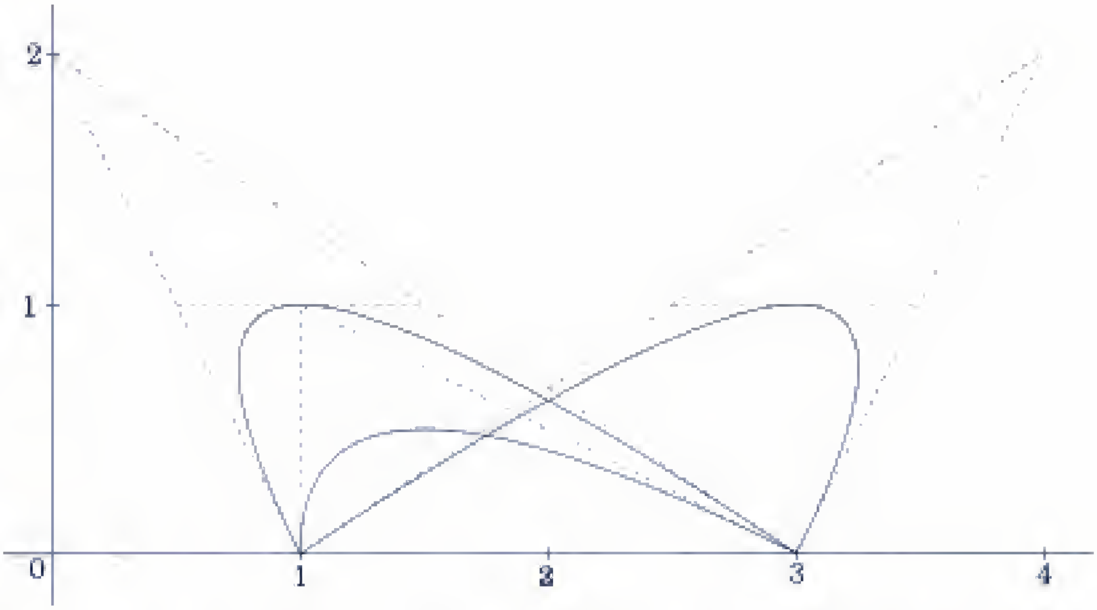
3) D'après 2) $\left(B_n^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est un système générateur de $\mathbb{R}_n[X]$. Puisqu'il contient $n+1$ vecteurs et que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, il constitue une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(B_n^k(x)\right) = k\,\mathrm{C}_n^k x^{k-1}(1-x)^{n-1-(k-1)} - (n-k)\mathrm{C}_n^k x^k (1-x)^{n-1-k}$,

donc, $k\,\mathrm{C}_n^k = n\,\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$ et $(n-k)\mathrm{C}_n^k = n\,\mathrm{C}_{n-1}^k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, donne :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(B_n^k(x)\right) = n\left(B_{n-1}^{k-1}(x) - B_{n-1}^k(x)\right),$$

formule qui reste vraie pour $k = 0$ et $k = n$ avec les conventions $B_{n-1}^{-1} = 0$ et $B_{n-1}^n = 0$.



3) $B_0 = (1-t)A_0 + tA_1$ donne $(1-t)(B_0 - A_0) + t(B_0 - A_1) = 0$ donc, puisque $t \neq 1$:

$$\frac{\overline{A_0B_0}}{\overline{B_0A_1}} = \frac{t}{t-1}.$$

Ainsi :

$$\frac{\overline{A_0B_0}}{\overline{B_0A_1}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1A_2}} = \frac{\overline{B_0C_0}}{\overline{C_0B_1}} = \frac{t}{1-t}.$$

4) ▪ $A_0 + A_2 = 2A_1'$ d'où $C_0\left(\dfrac{1}{2}\right) = A_0 + (A_1 - A_0) + \dfrac{1}{4}(2A_1' - 2A_1) = A_1 + \dfrac{1}{2}(A_1' - A_1)$ et, avec $C = C_0\left(\dfrac{1}{2}\right)$, on obtient $C = \dfrac{A + A_1'}{2}$: C est le milieu de $[A_1, A_1']$.

▪ $$\begin{aligned}\overrightarrow{C_0(t)C_0(1-t)} &= C_0(1-t) - C_0(t)\\ &= t^2A_0 + 2t(1-t)A_1 + (1-t)^2A_2 - (1-t)^2A_0 - 2t(1-t)A_1 - t^2A_2\\ &= \left[(1-t)^2 - t^2\right](A_2 - A_0) = (1-2t)\overrightarrow{A_0A_2}\end{aligned}$$

▪ $$\begin{aligned}\frac{C_0(1-t) + C_0(t)}{2} &= t^2\frac{A_0 + A_2}{2} + (1-t)^2\frac{A_0 + A_2}{2} + 2t(1-t)A_1\\ &= (1 - 2t + 2t^2)A_1' + (2t - 2t^2)A_1\end{aligned}$$

donc $\dfrac{1}{2}\left(C_0(1-t) + C_0(t)\right)$ est barycentre de A_1' $(1 - 2t + 2t^2)$ et A_1 $(2t - 2t^2)$.

▪ Les cordes parallèles à (A_0A_2) sont les segments $[C_0(t), C_0(1-t)]$, le lieu cherché est l'ensemble des points $(1 - 2t + 2t^2)A_1' + (2t - 2t^2)A_1$, c'est-à-dire l'ensemble des points $(1-u)A_1' + uA_1$, $u \in \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$ (car $u = 2t(1-t)$ décrit $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$ quand t décrit $\mathbb{R}$).

On reconnait la demi-droite $[C, A_1'[$.

5) ▪ $B_0' = \dfrac{1}{2}\left(A_0 + C_0(t)\right) = A_0 + t(A_1 - A_0) + t^2\left(\dfrac{A_0 + A_2}{2} - A_1\right) = B_0 + t^2(A_1' - A_1)$ d'où :

$$B_0' - B_0 = t^2(A_1' - A_1).$$

Application. Le sommet S est caractérisé par $\overrightarrow{B_0B_1^1} \cdot \overrightarrow{A_1A_1^1} = 0$. En identifiant un vecteur et la colonne de ses composantes, on obtient :

$$\overrightarrow{B_0B_1^1} = (1-t)\big(A_1 - A_0\big) + t\big(A_2 - A_1\big) = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1-2t \\ 2t \end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{A_1A_1^1} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\overrightarrow{B_0B_1^1} \cdot \overrightarrow{A_1A_1^1} = \frac{9}{2}t - \frac{3}{2}$$

et $\overrightarrow{B_0B_1^1} \cdot \overrightarrow{A_1A_1^1} = 0$ donne $t = \dfrac{1}{3}$. D'où :

$$S = C_0\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{9}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/9 \\ 4/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}.$$

6) $M(t) = (1-t)^2A_0 + 2t(1-t)A_1 + t^2A_2$ et $N(u) = (1-u)^2A_1 + 2u(1-u)A_2 + u^2A_0$ donnent :

$$\overrightarrow{A_0M(t)} = 2t(1-t)\overrightarrow{A_0A_1} + t^2\overrightarrow{A_0A_2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A_0N(u)} = (1-u)^2\overrightarrow{A_0A_1} + 2u(1-u)\overrightarrow{A_0A_2}$$

et $M(t) = N(u)$ équivaut à $\begin{cases} 2t(1-t) = (1-u)^2 \\ t^2 = 2u(1-u) \end{cases}$ donc aussi à $\begin{cases} 2t - t^2 = 1 - u^2 \\ t^2 = 2u(1-u) \end{cases}$

soit encore $\begin{cases} (1-t)^2 = u^2 \\ t^2 = 2u(1-u) \end{cases}$ donc $\begin{cases} t = 1-u \ \text{ ou } \ t = 1+u \\ t^2 = 2u(1-u) \end{cases}$

Pour $t = 1-u$, on obtient $(1-u)(1-3u) = 0$, d'où les solutions $(t, u) = (0, 1)$ ou $(t, u) = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

Pour $t = 1+u$, il vient $1 + 3u^2 = 0$ et il n'y a pas de solution correspondant à ce cas.

En conclusion, les paraboles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécantes en $M(0) = A_0$ et $M(2/3)$.

Calculons $M\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{9}A_0 + \dfrac{4}{9}A_1 + \dfrac{4}{9}A_2 = \dfrac{1}{9}A_0 + \dfrac{8}{9}\dfrac{A_1 + A_2}{2}$.

Ainsi $M\left(\dfrac{2}{3}\right)$ est barycentre de $\left(A_0, \dfrac{1}{9}\right)$ $\left(\dfrac{A_1 + A_2}{2}, \dfrac{8}{9}\right)$.

Partie C

1) • Par définition, on a : $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $A_i^1 = (1-t)A_i + tA_{i+1} = B_1^0(t)A_i + B_1^1(t)A_{i+1}$ donc :

$$A_i^1 = \sum_{j=0}^{n-i} B_1^j(t)A_{i+j}$$

Pour $k \geqslant 1$, nous nous proposons de prouver par récurrence la propriété :

$$(\mathcal{P}_k) \ : \ \forall i \in [\![0, n-k]\!], \ A_i^k = \sum_{j=0}^{n-i} B_k^j(t)A_{i+j}.$$

Avec $\Delta_j^3 = A_{j+3} - 3A_{j+2} + 3A_{j+1} - A_j$, on a de même :

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} A_0^n(t) = n(n-1)(n-2) \sum_{j=0}^{n-3} B_{n-3}^j(t) \Delta_j^3 .$$

Les vecteurs tangents en A_0 et A_1 sont :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_0^n(0) = n\Delta_0 = n\left(A_1 - A_0\right) = n\overrightarrow{A_0A_1}$$

$$\text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_0^n(1) = n\Delta_{n-1} = n\left(A_n - A_{n-1}\right) = n\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$$

3) ▪ On suppose les points $(A_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ alignés.

Puisque $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} B_n^j(t) = 1$, la relation :

$$A_0^n(t) = \sum_{j=0}^{n} B_n^j(t) A_j$$

exprime que $A_0^n(t)$ est le barycentre de $\left(A_j, B_n^j(t)\right)_{0 \leqslant j \leqslant n}$, la courbe $\mathscr{C}$ est donc incluse dans la droite contenant les A_j.

Réciproque. Reprenons la question précédente ; en posant $\Delta_j^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k (-1)^k A_{j+p-k}$, on obtient par récurrence :

$$\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p} A_0^n(t) = \frac{n!}{(n-p)!} \sum_{j=0}^{n-p} B_{n-p}^j(t) \Delta_j^p .$$

Si la courbe $\mathscr{C}$ est rectiligne, portée par une droite de direction $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p} A_0^n(0) \in \mathbb{R}\overrightarrow{u} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{n!}{(n-p)!} \Delta_0^p \in \mathbb{R}\overrightarrow{u}.$$

$\Delta_0^1 = A_1 - A_0 \in \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ donc $A_1 \in A_0 + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$,

$\Delta_0^2 = A_2 - 2A_1 + A_0 \in \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ donne $A_1 \in A_0 + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$,

et, par récurrence, on obtient $A_k \in A_0 + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ quel que soit $k \in [\![0, n]\!]$.

Ainsi $\mathscr{C}$ est rectiligne si et seulement si $A_0, \ldots, A_n$ sont alignés.

▪ On suppose les points $(A_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ coplanaires.

La même démonstration montre que $\mathscr{C}$ est incluse dans le plan contenant les A_j.

Réciproque. Si $\mathscr{C}$ est plane, incluse dans le plan dirigé par $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on a de même :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \Delta_0^p \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$$

d'où, par récurrence :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], A_k \in A_0 + \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right).$$

4) A_0, A_1, A_2, A_3 quatre points distincts.

D'après 3), une condition nécessaire est que A_0, A_1, A_2, A_3 ssoient coplanaires et non alignés.

Le système $\left(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_3}\right)$ est alors de rang 2 et une condition nécessaire pour que $\mathscr{C}$ soit une parabole est que :

$$\sum_{j=0}^{3} B_3^j(t)A_j = (1-t)^3 A_0 + 3t(1-t)^2 A_1 + 3t^2(1-t)A_2 + t^3 A_3$$

ne contienne pas de terme en t^3, c'est-à-dire que :

$$A_3 - 3A_2 + 3A_1 - A_0 = 0 \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{A_0A_3} = 3\overrightarrow{A_1A_2}.$$

Réciproquement, supposons que $\overrightarrow{A_0A_3} = 3\overrightarrow{A_1A_2}$ c'est-à-dire $A_3 = A_0 + 3A_2 - 3A_1$.

Alors $\mathscr{C}$ est paramétrée par $t \mapsto \left(1 - 3t + 3t^2\right)A_0 + 3t(1-2t)A_1 + 3t^2 A_2$ soit :

$$t \to A_0 + 3t\left(A_1 - A_0\right) + 3t^2\left(A_0 + A_2 - 2A_1\right)$$

et on reconnaît bien une parabole.

Partie D

1) Il faut et il suffit qu'en chaque point A_{in}, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, on ait l'égalité des dérivées à gauche et à droite $M_g'\left(\frac{i}{k}\right)$ et $M_d'\left(\frac{i}{k}\right)$ et, d'après C.2), cela s'écrit :

$$kn\overrightarrow{A_{in-1}A_{in}} = kn\overrightarrow{A_{in}A_{in+1}}$$

(car $M(u) = M_i(ku - i + 1)$ donne $M'(u) = kM_i'(ku - i + 1)$) c'est-à-dire :

$$A_{in} = \frac{1}{2}\left(A_{in-1} + A_{in+1}\right).$$

2) Il faut et il suffit qu'en chaque point A_{in}, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, on ait l'égalité des dérivées premières et secondes à gauche et à droite :

$$M_g'\left(\frac{i}{k}\right) = M_d'\left(\frac{i}{k}\right) \quad \text{et} \quad M_g''\left(\frac{i}{k}\right) = M_d''\left(\frac{i}{k}\right)$$

c'est-à-dire $A_{in} = \frac{1}{2}\left(A_{in-1} + A_{in+1}\right)$ et, d'après C.2), $A_{in-2} - 2A_{in-1} + A_{in} = A_{in} - 2A_{in+1} + A_{in+2}$ soit encore :

$$A_{in} = \frac{1}{2}\left(A_{in-1} + A_{in+1}\right) \quad \text{et} \quad A_{in+2} - A_{in-2} = 2\left(A_{in+1} - A_{in-1}\right).$$

3) a) $n = 2$. Le vecteur dérivé en 0 est $kn\overrightarrow{A_0A_1}$ c'est-à-dire $2k\overrightarrow{A_0A_1}$ donc la donnée de $\overrightarrow{V_1}$ détermine de manière unique :

$$A_1 = A_0 + \frac{1}{2k}\overrightarrow{V_1}.$$

Alors les conditions $A_{in+1} = 2A_{in} - A_{in-1}$ c'est-à-dire $A_{2i+1} = 2A_{2i} - A_{2i-1}$, ($n = 2$), déterminent $A_3, A_5, \dots, A_{2n-1}$ de manière unique.

b) $n = 3$. Le vecteur dérivé première en 0 est $3k\overrightarrow{A_0A_1}$, la donnée de $\overrightarrow{V_1}$ détermine de manière unique :

$$A_1 = A_0 + \frac{1}{3k}\overrightarrow{V_1}.$$

Le vecteur dérivé seconde en 0 est $k^2 n(n-1)\left(A_2 - 2A_1 + A_0\right) = 6k^2\left(A_2 - 2A_1 + A_0\right)$: la donnée de $\overrightarrow{V_2}$ détermine de manière unique :

$$A_2 = 2A_1 + A_0 + \frac{1}{6k^2}\overrightarrow{V_2}.$$

$$u = -\frac{19}{45}A_0 + \frac{8}{15}A_3 - \frac{2}{15}A_6 + \frac{1}{45}A_9 \quad , \quad v = -\frac{38}{45}A_0 + \frac{16}{15}A_3 - \frac{4}{15}A_6 + \frac{2}{45}A_9$$

$$A_1 = \frac{26}{45}A_0 + \frac{8}{15}A_3 - \frac{2}{15}A_6 + \frac{1}{45}A_9$$

$$A_2 = \frac{7}{45}A_0 + \frac{16}{15}A_3 - \frac{4}{15}A_6 + \frac{2}{45}A_9$$

$$A_4 = -\frac{7}{45}A_0 + \frac{14}{15}A_3 + \frac{4}{15}A_6 - \frac{2}{45}A_9$$

$$A_5 = -\frac{2}{45}A_0 + \frac{4}{15}A_3 + \frac{14}{15}A_6 - \frac{7}{45}A_9$$

$$A_7 = \frac{2}{45}A_0 - \frac{4}{15}A_3 + \frac{16}{15}A_6 + \frac{7}{45}A_9$$

$$A_8 = \frac{1}{45}A_0 - \frac{2}{15}A_3 + \frac{8}{15}A_6 + \frac{26}{45}A_9$$

b) $N = N - M + M \to \|N''\|^2 = \|N'' - M''\|^2 + \|M''\|^2 + 2\left\langle M'' \,\middle|\, N'' - M''\right\rangle$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left\langle M'' \,\middle|\, N'' - M''\right\rangle \mathrm{d}u &= \left[\left\langle M'' \,\middle|\, N' - M'\right\rangle\right]_0^1 - \int_0^1 \left\langle M''' \,\middle|\, N' - M'\right\rangle \mathrm{d}u \\
&= \left[\left\langle M'' \,\middle|\, N' - M'\right\rangle\right]_0^1 - \left[\left\langle M''' \,\middle|\, N - M\right\rangle\right]_0^1 \\
&\qquad + \int_0^1 \left\langle M^{(4)} \,\middle|\, N - M\right\rangle \mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \left\langle M^{(4)} \,\middle|\, N - M\right\rangle \mathrm{d}u \quad \text{car } M''(0) = M''(1) = 0 \\
&\qquad \text{et } N(0) - M(0) = N(1) - M(1) = 0
\end{aligned}$$

donc :

$$\int_0^1 \left\langle M'' \,\middle|\, N'' - M''\right\rangle \mathrm{d}u = \int_0^1 \left\langle M^{(4)} \,\middle|\, N - M\right\rangle \mathrm{d}u = 0$$

car, $\mathscr{C}$ étant de degré $\leqslant 3$, on a $M^{(4)} = 0$. Il reste :

$$\int_0^1 \|N''\|^2 \,\mathrm{d}u = \int_0^1 \|M''\|^2 \,\mathrm{d}u + \int_0^1 \|N'' - M''\|^2 \,\mathrm{d}u$$

ce qui assure le résultat.

Aubin Imprimeur
LIGUGÉ, POITIERS

Achevé d'imprimer en septembre 2005
N° d'édition 208 03 39 - N° d'impression L 68988
Dépôt légal septembre 2005
Imprimé en France

Titres disponibles en deuxième année dans la filière PSI…

En Mathématiques
Analyse PSI
Algèbre et géométrie PSI

En Physique
Optique MP-PC-PSI-PT
Électromagnétisme PC-PSI
Physique des ondes PC-PSI
Thermodynamique PC-PSI
Mécanique des fluides PC-PSI
Électrotechnique PSI
Électronique PSI

En Chimie
Chimie PSI

Livres d'exercices
Mathématiques PSI
Physique PSI

LES NOUVEAUX
Précis
BRÉAL

Une collection tenant compte de vos besoins et de vos contraintes, conçue pour s'entraîner efficacement et progresser tout au long de l'année.

→ **Des exercices variés,** classés par thème et de difficulté progressive, couvrent la totalité du programme.

→ **Des solutions entièrement rédigées** détaillent l'ensemble des méthodes et des raisonnements à connaître en première année.

→ **De nombreux commentaires** enrichissent les corrigés d'astuces, de conseils et d'explications supplémentaires.

Les Nouveaux Précis Bréal sont **la collection de référence** pour réussir sa prépa et intégrer une grande école d'ingénieurs.

BRÉAL, L'ÉDITEUR DES PRÉPAS

Réf. : 208.0339 - ISBN : 2 7495 0511 9

www.editions-breal.fr

9 782749 505114